Bài toán xác định hàm ngược - Công thức nghịch đảo Lagrange

Trương Phước Nhân, 18/01/2019

Nội dung của bài viết này ta bàn về cách để xác định hàm ngược dựa trên công cụ chuỗi lũy thừa.

Giả sử U và V là các tập con mở nằm trong mặt phẳng phức và f là một ánh xạ 1-1 từ U vào V sao cho $f(U)=V$. Ánh xạ g được gọi là hàm ngược của ánh xạ f trên V nếu $f(g(z))=z$ với mọi $z\in V$. Ánh xạ g được gọi là hàm ngược của ánh xạ f tại điểm z_0 nếu g là hàm ngược của f trong một lân cận nào đó của điểm z_0.

Nhận xét rằng trường số phức $\mathbb{C}$ có thể được đồng nhất với $\mathbb{R}^2$ như một không gian vector thực hai chiều bởi ánh xạ $x+iy\mapsto(x,y)$. Nếu trên trường số phức $\mathbb{C}$ ta trang bị tích vô hướng định nghĩa bởi hệ thức $\langle z,w\rangle=\operatorname{Re}(\bar{z}w)$ thì ta có thể xem $\mathbb{C}$ như một không gian Hilbert thực hai chiều trên trường số thực.

Nói như vậy có nghĩa là ta hoàn toàn có thể khảo sát các vấn đề trên hàm giải tích bằng cách sử dụng các công cụ hàm số thực hai biến, như sau:

Đặt $C^\infty(U)$ là tập hợp gồm tất cả các hàm số $\mathbb{C}$ - khả vi trên tập con mở U của $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$.

Do $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ và $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ nên một hàm $\mathbb{C}$ - khả vi $f(x,y)$ trên U có thể được xét như một hàm $F(z,\bar{z})$ được xác định bởi hệ thức $F(z,\bar{z})=f\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2},\dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)$.

Để thuận tiện cho việc trình bày các lập luận ta thay kí hiệu $F(z,\bar{z})$ bởi $f(z,\bar{z})$.

Để khảo sát hàm $f(z,\bar{z})$ ta định nghĩa thêm hai toán tử vi phân $\dfrac{\partial}{\partial z},\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}:C^\infty(U)\to C^\infty(U)$ lần lượt bởi các hệ thức $\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}-i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Một hàm $\mathbb{C}$ - khả vi $f(x,y)$ được gọi là chỉnh hình trên U nếu $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ trên U.

Để đơn giản hóa các khảo sát cho bài toán xác định hàm ngược ta chỉ khảo sát lớp các hàm chỉnh hình $f:U\to V$ sao cho f là một song ánh từ U vào V, f và f^{-1} đều là các hàm chỉnh hình.

Các ánh xạ chỉnh hình $f:U\to V$ thỏa mãn các tính chất nêu ở trên được gọi là ánh xạ song chỉnh hình.

Bài toán được đặt ra ở đây là :

> Cho trước hàm $f:U\to V$ chỉnh hình trong một lân cận của điểm $z_0\in U$.
>
> Khi nào thì hàm f là song chỉnh hình ? xác định hàm ngược f^{-1}?

Đầu tiên ta khảo sát ý thứ nhất của bài toán.

Nhắc lại rằng một ánh xạ f chỉnh hình trên tập con mở U của mặt phẳng $\mathbb{C}$ được đồng nhất với một hàm khả vi $f:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ bởi hệ thức $f(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ trong đó u,v là các hàm khả vi thực trên U thỏa mãn phương trình Cauchy – Riemann

$$u_x=v_y\ ,\ u_y=-v_x \text{ trên } U.$$

Với mỗi điểm $p\in U$, ma trận biểu diễn dạng vi phân $df_p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ theo cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^2$ cho bởi hệ thức

$$df_p = \begin{pmatrix} u_x(p) & u_y(p) \\ v_x(p) & v_y(p) \end{pmatrix}.$$

Trong trường hợp này Jacobian của ánh xạ f tại điểm p cho

$$J(f)(p) = \det df_p = u_x(p)v_y(p) - u_y(p)v_x(p) = u_x^2(p) + v_x^2(p) = |f'(p)|^2.$$

Do đó, ta có kết quả sau:

Kết quả 1.

Giả sử f là một hàm chỉnh hình trên tập U và $p \in U$ sao cho $f'(p) \neq 0$.

Khi đó, tồn tại một lân cận mở V của điểm p sao cho $f : V \to f(V)$ là ánh xạ song chỉnh hình.

Chứng minh kết quả 1.

Do $f'(p) \neq 0$ nên Jacobian của ánh xạ f tại điểm p bằng $J(f)(p) = |f'(p)|^2 > 0$.

Bằng cách áp dụng định lý hàm ngược cho các ánh xạ khả vi, tồn tại một lân cận mở V của điểm p sao cho ánh xạ $f : V \to W = f(V)$ là một ánh xạ vi phôi và $J(f)(q) \neq 0$ với mọi $q \in U$.

Đặt $g : W \to V$ là ánh xạ ngược của ánh xạ f.

Khi đó, g khả vi trên V.

Bằng cách biểu diễn lại g dưới dạng $g(w, \overline{w})$ ta nhận thấy rằng $g\left(f(z), \overline{f(z)}\right) = z$ với mọi $z \in V$ và $f\left(g(w), \overline{f(w)}\right) = w$ với mọi $w \in W$.

Ta sẽ chứng minh rằng g là hàm chỉnh hình trên W, tức là $\dfrac{\partial g}{\partial \overline{w}} = 0$ trên W.

Thật vậy,

$$0 = \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} g\left(f(z), \overline{f(z)}\right) = \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}.$$

Do f chỉnh hình trên U nên $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ trên U.

Điều này dẫn đến rằng $0 = \dfrac{\partial g}{\partial \overline{w}}\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$.

Do $f : V \to W$ là ánh xạ vi phôi nên $J(f)(z) = |f'(z)|^2 > 0$ với mọi $z \in V$.

Điều này dẫn đến $\dfrac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$ khác không trên V, hay $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial z}} \neq 0$ trên V.

Do đó, $\dfrac{\partial g}{\partial \overline{w}} = 0$ trên W.

Kết quả 2.

Giả sử f là một đơn ánh, chỉnh hình trên tập con mở U của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$.

Khi đó, $f' \neq 0$ trên U và $f : V \to f(V)$ là ánh xạ song chỉnh hình.

Chứng minh kết quả 2.

Do f chỉnh hình trên U nên f' cũng chỉnh nên trên U. Đồng thời do f là đơn ánh nên f không phải là một hàm hằng, $f(U)$ là tập mở và $f'(z) \not\equiv 0$ trên U.

Do đó các không điểm của hàm f' lập thành một tập con rời rạc của tập U.

Nếu $f'(z_0)=0$ thì tồn tại một lân cận mở $V=\Gamma(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$ của điểm z_0 sao cho $f'(z)\neq 0$ với mọi $z\neq z_0$ trên V.

Đặt $F(z)=f(z)-f(z_0)$ với mọi $z\in U$.

Khi đó, $F(z_0)=F'(z_0)=0$ và $F'(z)=f'(z)\neq 0$ với mọi $z\neq z_0$ trên V.

Do F chỉnh hình và khác hàm hằng nên ta có thể chọn δ đủ nhỏ sao cho $F(z)\neq 0$ với mọi $0<|z-z_0|<\delta$.

Do C là một tập compact , F liên tục và khác không trên $C=\left\{z:|z-z_0|=\dfrac{\delta}{2}\right\}$ nên $\exists\min\{|F(z)|:z\in C\}>0$.

Đặt $m=\dfrac{1}{2}\min\{|F(z)|:z\in C\}$.

Với mọi $0<|w|<m$, $|w|<|F(z)|$ với mọi $z\in C$ nên, bằng cách áp dụng định lí Rouche, ta suy ra hai hàm $F(z)-w$ và $F(z)$ có cùng số không điểm (tính cả số bội của các nghiệm) trên $\Gamma\left(z_0,\dfrac{\delta}{2}\right)=\left\{z:|z-z_0|<\dfrac{\delta}{2}\right\}$.

Do $F(z_0)=F'(z_0)=0$ nên số không điểm của hàm $F(z)$ tối thiểu bằng 2.

Nói cách khác, F không phải là một đơn ánh trên $\Gamma\left(z_0,\dfrac{\delta}{2}\right)$.

Do đó, tồn tại hàm ngược $g:f(U)\to U$.

Phần việc còn lại của ta là chứng minh tính chỉnh hình của hàm ngược g.

Bổ đề.

Cho trước f là một hàm chỉnh hình trên $\{z:|z|<R\}$.

Giả sử $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$ và f khác không trên tập $\{z:0<|z|<\rho<R\}$.

Đặt $m_0=\min\{|f(z)|:|z|=\rho\}$ và $|w|<m_0$.

Khi đó, nghiệm của phương trình $f(z)=w$ cho bởi công thức $z=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|z|=\rho}\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}d\zeta$.

Chứng minh bổ đề.

Đặt $F(z)=f(z)-w$ với mọi $|z|<R$.

Khi đó, hàm F chỉnh hình trên tập $\{z:|z|<R\}$.

Do $|w|<m_0$ nên, bằng cách áp dụng định lý Rouche, ta suy ra hai hàm $F(z)$ và $f(z)$ có cùng số không điểm trên tập $\{z:0<|z|<\rho<R\}$.

Do đó, phương trình $F(z)=0$ chỉ có duy nhất một nghiệm trên tập $\{z:0<|z|<\rho<R\}$.

Hơn nữa, nghiệm của phương trình $f(z)=w$ cho bởi công thức

$$z=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\rho}\zeta\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\rho}\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}d\zeta.$$

Điều này kết thúc phép chứng minh bổ đề.

Nhận xét rằng để tính chứng minh tính chỉnh hình của hàm ngược $g:f(U)\to U$ ta cần chỉ ra rằng với mọi $w_0\in f(U)$ hàm số $z=g(w)$ có thể khai triển thành chuỗi Taylor trong một lân cận nào đó của điểm w_0. Do $w_0\in f(U)$ nên $f(z_0)=w_0$. Chọn $\rho>0$ sao cho $f(z)\neq w_0$ với mọi $0<|z-z_0|<\rho$.

Đặt $m_0=\min\{|f(z)-w_0|:|z-z_0|=\rho\}$.

Nhận thấy rằng chuỗi $\frac{1}{f(\zeta)-w}=\frac{1}{(f(\zeta)-w_0)-(w-w_0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-w_0)^n}{(f(\zeta)-w_0)^{n+1}}$ hội tụ đều với mọi $|w-w_0|<m_0(1-\delta)$, nên

$$g(w)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\rho}z\frac{f'(z)}{f(z)-w}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\rho}z\frac{f'(z)}{(f(z)-w_0)^{n+1}}dz\right)(w-w_0)^n.$$

Điều này chứng minh tính chỉnh hình của hàm ngược g tại điểm w_0. Do w_0 có thể được chọn bất kì trong tập U nên hàm g chỉnh hình trên tập U.

Bằng phương pháp tính toán thặng dư ta nhận thấy rằng

$$\oint_{|z-z_0|=\rho}z\frac{f'(z)}{(f(z)-w_0)^{n+1}}dz=\frac{1}{n}\oint_{|z-z_0|=\rho}\frac{dz}{(f(z)-w_0)^n}=\frac{2\pi i}{n!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\left(\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}\right)^n\right].$$

Do đó ta nhận lại được công thức nghịch đảo Lagrange quen thuộc:

Kết quả 3.

Giả sử biến z được biểu diễn theo biến w dưới dạng phương trình $z=f(w)$ trong đó f là một hàm chỉnh hình tại z_0 và $f'(z_0)\neq 0$.

Khi đó, ta có thể biểu diễn biến w theo biến z dưới dạng $w=g(z)$ trong đó g cho bởi chuỗi lũy thừa $g(z)=z_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\left(\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}\right)^n\right](z-z_0)^n$.

<u>Tài liệu tham khảo:</u>

Wikipedia, Lagrange inversion theorem,??/??/????