Association scheme

Trương Phước Nhân, 29/07/2018

Trong bài viết này ta sẽ giới thiệu tổng quan cơ bản về lý thuyết association scheme.

1. Định nghĩa

Association scheme với d lớp là một tập $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, ..., A_d\}$ gồm các $(0,1)$-ma trận thỏa mãn

a) $A_0 = I$.

b) $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$.

c) $A_i^T \in \mathcal{A}$ với mỗi $i = 1,..., d$.

d) $A_i A_j = A_j A_i \in \operatorname{span}(\mathcal{A})$.

Nhận xét.

Điều kiện b) chỉ ra rằng các ma trận $A_0, A_1, ..., A_d$ độc lập tuyến tính với nhau. Điều kiện d) chỉ ra rằng cấu trúc đại số sinh bởi các ma trận này có số chiều bằng $d+1$. Do J bằng tổng của các A_i nên nó giao hoán với mỗi A_i, điều này chỉ ra rằng tổng tất cả các phần tử trên các hàng và các cột của A_i là một hằng số.

Một association scheme được gọi là đối xứng nếu mỗi ma trận A_i là một ma trận đối xứng.

Nhận thấy rằng, ta có thể $A_1, ..., A_d$ là các ma trận liên hợp của các đồ thị định hướng $X_1, ..., X_d$ với cùng tập đỉnh: Xét X là một đồ thị với tập đỉnh V và đường kính d. Với mỗi $i = 1,..., d$, ký hiệu bởi X_i là đồ thị với tập đỉnh V và hai đỉnh liên hợp với nhau trong X_i nếu khoảng cách giữa chúng bằng i trong X, hiển nhiên $X = X_1$. Đặt A_i là ma trận liên hợp của $X_i, i = 1,..., d$, A_0 thay cho ma trận đơn vị I.

Khi đó, $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, ..., A_d\}$ là một association scheme.

2. Đồ thị strong regular

Association schemes chỉ có duy nhất một lớp là đơn giản nhất. Trong trường hợp này ta có $A_0 = I$ và $A_1 = J - I$; đồ thị định hướng X_1 là một đồ thị đầy đủ. Đối với các association scheme gồm hai lớp trở lên, vấn đề khảo sát các tính chất đặc trưng trở nên khó khăn hơn nhiều. Chính vì lý do đó mà ta sẽ hạn chế các khảo sát để làm giảm bớt tính phức tạp của vấn đề.

Đầu tiên, ta khảo sát các association scheme đối xứng có hai lớp và ta sẽ chỉ ra rằng chúng tương đương về mặt cấu trúc với các đồ thị strong regular.

Thay vì trình bày một chứng minh dài dòng và mang tính máy móc ta sẽ lấy một ví dụ làm dẫn chứng cho khẳng định của ta.

Xét các đồ thị với đường kính bằng hai và bậc lớn nhất bằng k. Nếu X là một đồ thị như vậy và $u \in V(X)$, thì u có tối đa k láng giềng và $k(k-1)$ đỉnh có khoảng cách đến u bằng 2.

Do đó, $|V(X)| \leq 1 + k + k^2 - k = k^2 + 1$.

Nếu đẳng thức xảy ra thì X là một đồ thị đều bậc k và girth của đồ thị này lớn hơn hoặc bằng năm.

Điều này gợi ý cho ta khảo sat1 các đồ thị đều bậc k có $k^2 + 1$ đỉnh và đường kính bằng 2.

Giả sử X là một đồ thị như vậy và ký hiệu A là ma trận liên hợp của nó.

Ta sẽ chứng minh rằng $A^2 + A - (k-1)I = J$.

Thật vậy, khẳng định trên được suy ra từ việc phần tử (i, j) của A^2 bằng số các đường đi độ dài bằng hai từ i đến j trong X. Số các đường đi độ dài bằng hai xuất phát và kết thúc tại cùng một điểm bằng bậc của chính điểm đó, do X là đồ thị đều, $(A^2)_{i,i} = k$. Số các đường đi độ dài bằng hai xuất phát tại một đỉnh i và kết thúc tại một đỉnh j liên hợp với nó bằng số các tam giác chứa trong X chứa cạnh ij, $(A^2)_{i,j} = 0$. Sau cùng, nếu i và j là các đỉnh phân biệt và không liên hợp trong X thì $(A^2)_{i,j} = 1$, do X không chứa 4-chu trình và đường kính X bằng hai. Kết hợp các trường hợp trên ta nhận được $A^2 + A - (k-1)I = J$.

Tiếp theo, ta sẽ trình bày mối liên kết của đồ thị X với cấu trúc association scheme.

Ma trận liên hợp $\overline{A}$ của đồ thị bù $\overline{X}$ của X bằng $J - I - A$.

Từ hệ thức $A^2+A-(k-1)I=J$ ta suy ra $\overline{A}=J-I-A=A^2-kI$.

Do $\overline{A}$ là một đa thức theo A, nên nó giao hoán với A. Đồng thời ta cũng nhận thấy rằng A^2 là một tổ hợp tuyến tính của I, A và $\overline{A}$. Do $AJ=JA=kJ$ nên ta cũng nhận thấy rằng $A\overline{A}$ và $\overline{A}^2$ là các tổ hợp tuyến tính của I và $\overline{A}$. Do đó, các ma trận I, A và $\overline{A}$ lập thành một association scheme với hai lớp.

Ta có thể nhận được một số thông tin quan trọng về đồ thị X từ hệ thức $A^2+A-(k-1)I=J$. Ý tưởng chính ở đây nằm ở chỗ ta có thể xác định được các giá trị riêng của A từ hệ thức trên.

Nhận xét rằng $1:=(1,...,1)$ là một vector riêng của ma trận A, do $A1=k1$, và giá trị riêng tương ứng của nó chính là k. Giả sử λ là một giá trị riêng của A với vector riêng tương ứng z. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng z trực giao với 1, nên $Jz=0$. Do đó $0=Jz=\left(A^2+A-(k-1)I\right)z=\left(\lambda^2+\lambda-k+1\right)z$ nên λ là một không điểm của tam thức $t^2+t-k+1$.

Gọi các nghiệm của tam thức này là θ và τ. Do $\theta\tau=1-k$ nên ta có thể giả sử rằng $\theta>0>\tau$.

Ký hiệu m_θ và m_τ lần lượt là số bội của các giá trị riêng θ và τ của ma trận A. Do X có k^2+1 đỉnh và k là một giá trị riêng với số bội ít nhất bằng một, nên ta có $1+m_\theta+m_\tau=k^2+1$.

Đồng thời, $\operatorname{tr}(A)=0$ nên $k+m_\theta\theta+m_\tau\tau=0$.

Từ hai phương trình trên ta suy ra được $m_\tau=\dfrac{\theta k^2+k}{\theta-\tau}$.

Ta chia làm hai trường hợp con. Đầu tiên, giả sử θ và τ là các số vô tỷ, ta có

$$0=k+(m_\theta-m_\tau)\theta+m_\tau(\theta+\tau)=k-m_\tau+(m_\theta-m_\tau)\theta$$

và do $k-m_\tau$ là một số nguyên và θ là vô tỷ, nên ta suy ra rằng $m_\theta-m_\tau=0$. Từ hệ thức này ta cũng suy ra được rằng $k=m_\theta=m_\tau$, nên từ hệ thức $1+m_\theta+m_\tau=k^2+1$ ta thu được $k^2-2k=0$. Chỉ có duy nhất một nghiệm của phương trình này là phù hợp, đó là $k=2$, nên $X=C_5$.

Do đó, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử θ và τ là các số hữu tỷ, nên chúng cũng là các số nguyên. Do θ và τ là các nghiệm của tam thức $t^2+t-k+1$, nên ta có $(\theta-\tau)^2=1+4(k-1)=4k-3$ và do đó $4k-3$ phải là một số chính phương. Do $4k-3$ lẻ nên ta có thể giả sử $4k-3=(2s+1)^2$ và do đó $k=s^2+s+1$.

Từ kết quả vừa nhận được ta suy ra $\theta=s$ và $\tau=-s-1$ và do đó $m_\tau=\dfrac{\left(s^2+s+1\right)\left(s\left(s^2+s+1\right)+1\right)}{2s+1}$.

Bây giờ $4s^2+4s+4=(2s+1)^2+3$

và $8s^3+8s^2+8s+2=2s(2s+1)^2+3(2s+1)+5=\left(4s^2+4s+3\right)(2s+1)+5$.

Do đó, tồn tại một đa thức p với các hệ số nguyên sao cho $32m_\tau=p(s)+\dfrac{15}{2s+1}$.

Nhận thấy rằng m_τ là một số nguyên khi và chỉ khi $2s+1$ chia hết 15.

Điều này chỉ ra rằng $s\in\{1,2,7\}$ và do đó $k\in\{3,7,57\}$.

Tóm lại, ta đã chỉ ra được rằng nếu tồn tại một đồ thị đều bậc k với đường kính bằng hai trên k^2+1 thì k là 2,3,7 hoặc 57 (tương ứng với v là 5,10,50 hoặc 3250).

Trường hợp $k=2$ chính là C_5.

Trường hợp $k=3$ chính là đồ thị Petersen.

Trường hợp $k=7$ là đồ thị Hoffman-Singleton.

Trường hợp $k=57$ vẫn còn là một vấn đề mở chưa được giải quyết.

3. Đại số Bose- Mesner

Đại số Bose- Mesner của một association scheme $\mathcal{A}=\{A_0, A_1, ..., A_d\}$ là đại số được sinh bởi các ma trận $A_0, A_1, ..., A_d$; nói cách khác, nó bao gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính của các ma trận này trên $\mathbb{C}$. Ta định nghĩa tích Schur $A\circ B$ của hai ma trận cùng bậc được xác định bởi hệ thức $(A\circ B)_{i,j}:=A_{i,j}B_{i,j}$.

Tích Schur là một tích giao hoán và kết hợp với phần tử đơn vị là J. Do đại số Bose-Mesner được sinh bởi $\mathcal{A} \cup \{O\}$ và tập này đóng qua phép tính tích Schur, nên ta suy ra đại số Bose-Mesner là đóng qua phép tính tích Schur. Do đó, nó cũng là một đại số với phép tính tích Schur. Đồng thời, đại số Bose-Mesner cũng đóng qua phép lấy liên hợp phức và phép chuyển vị.

Đại số coherent là một đại số ma trận trên $\mathbb{C}$ đóng qua phép tính tích Schur, đóng qua phép lấy liên hợp phức và phép chuyển vị, và chứa I và J. Mọi đại số Bose-Mesner là một đại số coherent giao hoán.

Định nghĩa tâm của một tập các ma trận hoán vị cấp $v \times v$ là tập gồm tất cả các ma trận giao hoán với mọi phần tử của tập này các ma trận hoán vị này.

Kết quả 1. Tâm của một tập các ma trận hoán vị cấp $v \times v$ là một đại số coherent.

Chứng minh. Ta chỉ cần chỉ ra rằng tâm của một ma trận hoán vị P là một đại số coherent. Điểm mấu chốt chính ở đây chính là cần chỉ ra rằng tâm của P là đóng qua phép tính tích Schur.

Giả sử M và N là các ma trận giao hoán với P.

Khi đó, $P(M \circ N) = (PM) \circ (PN) = (MP) \circ (NP) = (M \circ N)P$ và do đó tâm của P đóng qua phép tính tích Schur.

Một nhóm hoán vị Γ trên một tập V được gọi là generously transitive nếu với mọi cặp điểm u và v nằm trong V tồn tại một phần tử γ thuộc Γ sao cho $u\gamma = v, v\gamma = u$.

Kết quả 2. Tâm của một nhóm hoán vị là đại số Bose-Mesner của một association scheme đối xứng khi và chỉ khi nhóm này là generously transitive.

Chứng minh. Giả sử Γ là một nhóm hoán vị trên tập V. Tâm của Γ là một đại số coherent nên ta chỉ cần chứng minh rằng nó giao hoán. Chú ý rằng Γ có tác động tương tự như là một nhóm hoán vị của $V \times V$, các quỹ đạo của Γ tạo thành một phân hoạch của tập hợp này.

Tập $\{(v,v) : v \in V\}$, thường được gọi là đường chéo của $V \times V$, là hợp của một số quỹ đạo của Γ, và là một quỹ đạo duy nhất khi và chỉ khi Γ là tranitive. Giả sử u và v là hai điểm phân biệt. Khi đó uv và vu nằm trong cùng một quỹ đạo khi và chỉ khi tồn tại một phần tử của Γ hoán đổi vị trí của u và v.

Do đó, nếu Γ là transitive thì nó là generously transitive khi và chỉ khi tất cả các ma trận trong tâm của Γ đều đối xứng. Do tích của hai ma trận đối xứng A và B là đối xứng khi và chỉ khi $AB = BA$. Điều này kết thúc chứng minh của chúng ta.

4. Lũy đẳng

Cho $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$ là đại số Bose-Mesner của association scheme $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, ..., A_d\}$.

Các ma trận $A_0, A_1, ..., A_d$ lập thành một cơ sở, mỗi ma trận này là một lũy đẳng Schur.

Hai lũy đẳng E và F được gọi là trực giao nếu $EF = 0$.

Tiếp theo, ta định nghĩa một thứ tự bộ phận trên tập các lũy đẳng của một đại số giao hoán $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$:

Giả sử E và F là các lũy đẳng trong $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$, ta kí hiệu $E \le F$ nếu $FE = E$. Quan hệ thỏa mãn các tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu, nên nó là một thứ tự bộ phận. Phần tử lũy đẳng tối tiểu là phần tử tối tiểu của tập các phần tử lũy đẳng khác không.

Kết quả 3. Cho $\mathcal{B}$ là một đại số ma trận giao hoán với phần tử đơn vị trên một trường đóng kín đại số. Giả sử rằng nếu $N \in \mathcal{B}$ và $N^2 = 0$ thì $N = 0$. Khi đó, $\mathcal{B}$ có một cơ sở gồm các lũy đẳng trực giao với nhau từng đôi một.

Chứng minh. Đầu tiên, ta sẽ chứng minh rằng mỗi phần tử của $\mathcal{B}$ là một tổ hợp tuyến tính của các lũy đẳng.

Giả sử $A \in \mathcal{B}$. Kí hiệu $\psi(t)$ là đa thức cực tiểu của A và giả sử rằng $\psi(t) = \prod_{i=1}^{k} (t - \theta_i)^{m_i}$.

Nếu ta đặt $\psi_i(t) := \dfrac{\psi(t)}{(t-\theta_i)^{m_i}}$ thì các đa thức $\psi_1, ..., \psi_k$ là nguyên tố cùng nhau, do đó tồn tại các đa thức $f_1(t), ..., f_k(t)$ thỏa mãn $1 = \sum_i f_i(t)\psi_i(t)$. Do đó, $I = \sum_i f_i(A)\psi_i(A)$.

Nếu $i \ne j$ thì $\psi_i(A)\psi_j(A) = 0$, bởi vì ψ chia hết $\psi_i\psi_j$.

Bằng cách nhân hai vế của hệ thức $I = \sum_i f_i(A)\psi_i(A)$ cho $f_i(A)\psi_i(A)$, ta nhận được

$$f_i(A)\psi_i(A) = \left(f_i(A)\psi_i(A)\right)^2.$$

Do đó, $f_i(A)\psi_i(A)$ là lũy đẳng, ta ký hiệu lại phần tử này thành E_i. Chú ý rằng $E_iE_j = 0$ nếu $i \neq j$.

Do ψ chia hết $(t-\theta_i)^{m_i}\psi_i(t)$ nên ta có $(A-\theta_i I)^{m_i} E_i = 0$. Do đó, $\left[(A-\theta_i I)E_i\right]^{m_i} = 0$ và bằng cách sử dụng giả thiết đầu bài ta suy ra được rằng $(A-\theta_i I)E_i = 0$.

Ta có thể biểu diễn lại hệ thức $I = \sum_i f_i(A)\psi_i(A)$ dưới dạng $I = E_1 + ... + E_k$, nên

$$A = AE_1 + ... + AE_k = \theta_1 E_1 + ... + \theta_k E_k.$$

Hệ thức trên chứng tỏ rằng A là một tổ hợp tuyến tính của các lũy đẳng, hay $\mathcal{B}$ được sinh ra bởi các lũy đẳng.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng luôn tồn tại các phần tử lũy đẳng tối tiểu.

Giả sử E và F là các lũy đẳng phân biệt và $E \leq F$.

Khi đó, $F(I-E) = F - E \neq 0$ nhưng $E(I-E) = 0$.

Do đó, không gian cột của E phải là một không gian con thực sự của không gian cột của F.

Như vậy, nếu $E_1, ..., E_m$ là các lũy đẳng phân biệt và $E_1 \leq ... \leq E_m$ thì bằng cách lập luận tương tự ta nhận được $m \leq n+1$. Điều này chỉ ra sự tồn tại của các phần tử lũy đẳng cực tiểu.

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng mỗi phần tử lũy đẳng luôn là tổng của một số phần tử lũy đẳng cực tiểu.

Giả sử F là một lũy đẳng và E là một phần tử lũy đẳng cực tiểu.

Nếu $EF \neq 0$ thì $EF \leq E$ và do đó $EF = E$.

Điều này chỉ ra rằng các phần tử lũy đẳng cực tiểu trực giao với nhau.

Đặt F_0 là tổng của các phần tử lũy đẳng cực tiểu E sao cho $E \leq F$.

Khi đó F_0 là một phần tử lũy đẳng. Nếu $F_0 \neq F$ thì $F - F_0$ là một phần tử lũy đẳng nên tồn tại một phần tử lũy đẳng cực tiểu trước trước nó, điều này mâu thuẫn với cách chọn của F_0. Do đó, $\mathcal{B}$ được sinh ra bởi các phần tử lũy đẳng cực tiểu.

Giả sử $\mathcal{B}$ là một đại số đóng kín với phép lấy tích Schur và có chứa J. Từ khẳng định vừa chứng minh ở trên ta suy ra $\mathcal{B}$ có một cơ sở gồm các $(0,1)$-ma trận.

Ma trận N được gọi là lũy linh nếu $N^k = 0$.Kết quả 3 chỉ ra rằng một đại số giao hoán có phần tử đơn vị sẽ có một cơ sở lũy đẳng trực giao nếu nó không có chứa các ma trận lũy linh khác O, do một tổ hợp tuyến tính không tầm thường các ma trận lũy đẳng khác không trực giao với nhau không thể là lũy linh nên điều kiện cần là hiển nhiên.

Một đại số giao hoán được gọi là nửa đơn nếu nó không chứa các phần tử lũy linh khác không.

5. Lũy đẳng của assciation schemes

Trong phần cuối của bài viết ta sẽ áp dụng các kết quả lý thuyết vừa thu được ở trên để khảo sát một số điểm về các đại số

Kết quả 4. Giả sử $\mathcal{B}$ là một đại số con giao hoán của $\mathrm{Mat}_{v\times v}(\mathbb{C})$ đóng với phép lấy liên hợp phức, chuyển vị và chứa phần tử đơn vị. Khi đó $\mathcal{B}$ có một cơ sở lũy đẳng $E_0, ..., E_d$ sao cho

a) $E_iE_j = 0$ với mọi $i \neq j$.

b) Các cột của E_i là các giá trị riêng của các ma trận nằm trong $\mathcal{B}$.

c) $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$.

d) $E_i^* = E_i$.

Chứng minh. Giả sử $N \in \mathcal{B}$ và $N^2 = 0$.

Khi đó, $(N^*N)^2 = (N^*)^2N^2 = 0$ nên $\mathrm{tr}\left((N^*N)^*(N^*N)\right) = \mathrm{tr}\left((N^*N)^2\right) = 0$.

Nếu ta đặt $H := N^*N$, thì $\mathrm{tr}(H^*H) = 0$ khi và chỉ khi $H = 0$, nên $N^*N = 0$.

Khi đó, $\mathrm{tr}(N^*N) = 0$ nên $N = 0$.

Do đó, $\mathcal{B}$ thỏa mãn các giả thiết của kết quả 3, nên $\mathcal{B}$ có một cơ sở lũy đẳng trực giao với nhau từng đôi một, ta tạm gọi là $E_0, ..., E_d$.

Nếu $A \in \mathcal{B}$ thì $A = \sum_i a_i E_i$ với các vô hướng a_i nào đó.

Do các phần tử lũy đẳng E_i trực giao với nhau, nên $AE_r = a_r E_r$.

Điều này chỉ ra rằng các cột của E_r là các vector riêng của A, và vô hướng a_r đóng vai trò là giá trị riêng tương ứng của A.

Do $I \in \mathcal{B}$ nên nó là một tổ hợp tuyến tính nào đó của các $E_0,...,E_d$: $I = \sum_i a_i E_i$ với các vô hướng a_i nào đó.

Từ phân tích ở ý trước ta nhận thấy các vô hướng a_i là các giá trị riêng của I, nên tất cả chúng đều phải bằng 1.

Sau cùng ta chỉ cần chỉ ra rằng các lũy đẳng E_i là Hermitian. Do $\mathcal{B}$ đóng với phép chuyển vị và liên hợp phức, nên $E_i^* \in \mathcal{B}$. Do đó, tồn tại các vô hướng $a_0,...,a_d$ sao cho $E_i^* = \sum_j a_j E_j$, nên $E_i^* E_i = f_i E_i$.

Do $\operatorname{tr}\left(E_i^* E_i\right) > 0$ và $\operatorname{tr}\left(E_i\right) > 0$, nên ta suy ra rằng $f_i \neq 0$. Nhưng do E_i^* là một phần tử lũy đẳng cực tiểu nên $f_j = 0$ nếu $j \neq i$. Điều này chỉ ra rằng E_i^* là một bội vô hướng của E_i, nhưng do $\operatorname{tr}\left(E_i\right) = \operatorname{tr}\left(E_i^*\right)$, nên $E_i^* = E_i$.

Nhận xét rằng đại số Bose-Mesner của một association scheme thỏa mãn tất cả các yêu câu nêu trong kết quả 4 nên ta có thể áp dụng trực tiếp kết quả trên mà không phải lo ngại gì cả. Do

Sau cùng để chứng tỏ sức mạnh của kết quả 3, ta sẽ áp dụng nó để tìm lại một kết quả cơ bản trong đại số tuyến tính. Do $\frac{1}{v} J \in \mathcal{B}$ và bản thân nó là ma trận lũy đẳng với hạng bằng một nên nó là một phần tử lũy đẳng cực tiểu và do đó nó là một trong số các E_i, ta quy ước rằng nó chính là E_0.

Một ma trận phức A được gọi là chuẩn nếu $AA^* = A^* A$. Đồng thời trong quá khảo sát ta cũng sẽ quy ước rằng đại số sinh bởi các ma trận luôn chứa phần tử đơn vị.

Kết quả 5. Nếu ma trận A là chuẩn thì A đồng dạng với một ma trận chéo.

Chứng minh. Đại số sinh bởi A và A^* là giao hoán và đóng với phép lấy chuyển vị và liên hợp phức. Áp dụng kết quả 3, ta suy ra đại số này chứa một cơ sở lũy linh trực giao $F_1,...,F_d$. Do mỗi ma trận F_i là Hermitian nên từ điều kiện $F_i F_j = 0$ ta suy ra không gian cột của F_i và F_j.

Điều này chỉ ra rằng tồn tại một cơ sở gồm các giá trị riêng của ma trận A.

6. Các tham số đặc trưng của association scheme

Với mỗi association scheme ta có 4 loại tham số đặc trưng cho nó là: các giá trị riêng, các giá trị riêng đối ngẫu, các số giao và các tham số Krein. Sau đây ta sẽ lần lượt giới thiệu các loại tham số này và một số ứng dụng cơ bản của chúng.

6.1. Giá trị riêng và giá trị riêng đối ngẫu

Từ các khảo sát cơ bản trên đại số Bose-Mesner của một association scheme, ta nhận ra rằng tồn tại các vô hướng $p_i(j)$ sao cho $A_i = \sum_{r=0}^{d} p_i(r) E_r, i = 0,...,d$. Các vô hướng $p_i(j)$ được gọi là các giá trị riêng của scheme. Do chúng là các giá trị riêng của các $(0,1)$-ma trận A_i, nên chúng là các số nguyên đại số.

Chú ý rằng $A_i J = p_i(0) J$ nên do đó $p_i(0)$ bằng giá trị hằng của tổng các phần tử trên mỗi hàng của A_i.

Đặt $v_i := p_i(0)$, và các giá trị $v_0,...,v_d$ được gọi là bậc của các scheme.

Do $I = \sum_i E_i$, nên ta cũng thu được $p_0(i) = 1$ với mỗi i.

Các giá trị riêng của A_i^T là các số $\overline{p_i(j)}$, với $i = 0,1,..., d$.

Tương tự, tồn tại các vô hướng $q_i(j)$ sao cho $E_j = \frac{1}{v} \sum_{r=0}^{d} q_j(r) A_r$, $j = 0,...,d$. Các vô hướng $q_i(j)$ được gọi là các giá trị riêng đối ngẫu của scheme. Do $E_0 = \frac{1}{v} \sum_i A_i$, nên ta suy ra $q_0(i) = 1$.

Do các cột của E_i là các vector riêng của mỗi ma trận thuộc $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$, nên không gian cột của nó là một không gian riêng của $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$. Số chiều của không gian riêng này bằng hạng của E_i.

Do E_i là lũy đẳng nên các giá trị riêng của nó bằng 0 hoặc 1 và $\operatorname{rank}(E_i)=\operatorname{tr}(E_i)$.

Các giá trị $\operatorname{tr}(E_i)$ được gọi là số bộ của scheme.

Từ hệ thức $E_j=\frac{1}{v}\sum_{r=0}^{d}q_j(r)A_r$, ta suy ra $\operatorname{tr}(E_i)=\frac{1}{v}\sum_{i}q_i(r)\operatorname{tr}(A_r)$.

Bây giờ, do $\operatorname{tr}(A_r)=0$ nếu $r\neq 0$ và $\operatorname{tr}(A_0)=v$, ta suy ra được rằng $\operatorname{tr}(E_i)=q_i(0)$, ta cũng quy ước ký hiệu lại $\operatorname{tr}(E_i)$ dưới dạng m_i.

Ma trận riêng của $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$ là ma trận P cấp $(d+1)\times(d+1)$ xác định bởi $P_{i,j}=p_j(i)$.

Ma trận riêng đối ngẫu của $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$ là ma trận Q cấp $(d+1)\times(d+1)$ xác định bởi $Q_{i,j}=q_j(i)$.

Từ các hệ thức $A_i=\sum_{r=0}^{d}p_i(r)E_r, i=0,...,d$ và $E_j=\frac{1}{v}\sum_{r=0}^{d}q_j(r)A_r$, $j=0,...,d$, ta suy ra $PQ=vI$.

Từ kết quả vừa nhận được ở trên ta nhận thấy rằng các giá trị riêng đối ngẫu của $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$ được xác định bởi các giá trị riêng.

Trước khi tiếp tục trình bày các loại tham số đặc trưng còn lại của association scheme ta sẽ ứng dụng các phân tích lý thuyết vừa trình bày ở trên vào khảo sát lại một dạng cấu trúc tổ hợp kinh điển, cụ thể đó là các các đồ thị strong regular.

Một đồ thị X được gọi là strong regular nếu nó không phải là đồ thị đầy đủ, khác rỗng và tồn tại các số nguyên k,a và c sao cho:

a) X là đồ thị đều bậc k.

b) hai đỉnh liên hợp bất kỳ có chung chính xác a láng giềng.

c) hai đỉnh phân biệt không liên hợp với nhau có chung chính xác c láng giềng.

Nếu A là ma trận liên hợp của X thì các điều kiện vừa nêu tương đương với hai phương trình ma trận

$$AJ=kJ,\ A^2=kI+aA+c(J-I-A).$$

Ta viết lại phương trình thứ hai lại dưới dạng $A^2-(a-c)A-(k-c)I=cJ$.

Một đồ thị strong regular trên v đỉnh với các tham số k,a và c như trên thường được ký hiệu lại dưới dạng $\operatorname{srg}(v,k,a,c)$.

Dễ dàng kiểm tra được rằng, bằng cách sử dụng các phương trình nêu ở trên, nếu A là ma trận liên hợp của một đồ thị strong regular thì $I,A,J-I-A$ lập thành một association scheme với hai lớp.

Ngược lại, một association scheme với hai lớp bất kỳ có thể được xét như một đồ thị strong regular.

Giả sử A_1 là ma trận liên hợp của một đồ thị strong regular X và $\mathcal{A}$ là association tương ứng, với các ma trận lũy đẳng E_0,E_1,E_2.

Nếu X là k-đều thì $A_0=E_0+E_1+E_2, A_1=kE_0+\theta E_1+\tau E_2$.

Do $A_2=J-I-A_1$, nên ta cũng tính được $A_2=(v-1-k)E_0-(\theta+1)E_1-(\tau+1)E_2$.

Do đó, $P=\begin{pmatrix}1 & k & v-1-k\\ 1 & \theta & -\theta-1\\ 1 & \tau & -\tau-1\end{pmatrix}$, từ đây ta tính được $Q=\frac{1}{\theta-\tau}\begin{pmatrix}\theta-\tau & -k-(v-1)\tau & k+(v-1)\tau\\ \theta-\tau & v-k+\tau & k-v-\theta\\ \theta-\tau & \tau-k & k-\theta\end{pmatrix}$.

Các phần tử nằm ở hàng đầu tiên của ma trận Q chính là số bội của các giá trị riêng của đồ thị.

6.2. Số giao

Giả sử $\mathcal{A}$ là một scheme với d lớp. Do $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$ là đóng với phép nhân hai ma trận thông thường, nên tồn tại các vô hướng $p_{i,j}(k)$ sao cho $A_iA_j=\sum_{k=0}^{d}p_{i,j}(k)A_k$. Các vô hướng $p_{i,j}(k)$ được gọi là các số giao của scheme. Nhận thấy rằng $p_{i,j}(k)A_k=A_k\circ(A_iA_j)$, nên các số giao đều là các số nguyên không âm.

Đồng thời, $p_{i,j}(k) = \frac{\text{sum}\left(A_k \circ (A_i A_j)\right)}{vv_k} = \frac{\text{tr}\left(A_k{}^T A_i A_j\right)}{vv_k}$.

Ta định nghĩa các ma trận giao $B_0, ..., B_d$ bởi các hệ thức $(B_i)_{j,k} := p_{i,j}(k)$.

Nếu ta gọi π là quan hệ phân hoạch của tập đỉnh $V(\mathcal{A})$ thì $B_i = A/\pi$.

Do đó các ma trận $B_0, ..., B_d$ sinh ra một đại số giao hoán gồm các ma trận cấp $(d+1)\times(d+1)$ đẳng cấu với $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$ như một đại số. Tuy nhiên cần lưu ý rằng trong trường hợp tổng quát nó không đóng kín Schur.

Các số giao được xác định bởi các giá trị riêng của scheme: giá trị riêng của $A_k{}^T A_i A_j$ trên không gian cột của E_l là $p_i(l) p_j(l) \overline{p_k(l)}$, từ hệ thức $p_{i,j}(k) = \frac{\text{tr}\left(A_k{}^T A_i A_j\right)}{vv_k}$ ta suy ra $p_{i,j}(k) = \frac{1}{vv_k}\sum_{l=0}^{d} m_l p_i(l) p_j(l) \overline{p_k(l)}$.

Giả sử rằng $X_1, ..., X_d$ là các đồ thị của một association scheme. Nếu X_i có đường kính s thì các ma trận $A_i^0, ..., A_i^s$ là độc lập tuyến tính, điều này suy ra từ sự kiện $s+1$ lũy thừa đầu tiên của $A_i + I$ là độc lập tuyến tính. Do đó, đường kính của X_i bị chặn trên bởi d, số các lớp của scheme.

Một association scheme với d lớp được gọi là metric đối với quan hệ thứ i nếu đường kính của X_i bằng d. Nếu scheme là metric đối với quan hệ thứ i thì X_i được gọi là đồ thị distance-regular.

6.3. Tham số Krein

Cho $\mathcal{A}$ là một scheme trên v đỉnh với d lớp.

Khi đó, tồn tại các vô hướng $q_{i,j}(k)$ sao cho $E_i \circ E_j = \frac{1}{v}\sum_{k=0}^{d} q_{i,j}(k) E_k$.

Ta gọi các vô hướng này là các tham số Krein của scheme, nó đóng vai trò như là các tham số đối ngẫu của các số giao.

Ta có $q_{i,j}(k) E_k = vE_k(E_i \circ E_j)$, và do đó $q_{i,j}(k) = v\frac{\text{sum}\left(E_k \circ E_i \circ E_j\right)}{m_k} = v\frac{\text{tr}\left(E_k (E_i \circ E_j)\right)}{m_k}$.

Bây giờ, từ hệ thức $\overline{E_k} \circ E_i \circ E_j = \frac{1}{v^3}\sum_{l=0}^{d} q_i(l) q_j(l) \overline{q_k(l)} A_l$ ta suy ra

$$q_{i,j}(k) = \frac{1}{vm_k}\sum_{l=0}^{d} q_i(l) q_j(l) \overline{q_k(l)} v_l = \frac{m_i m_j}{v}\sum_{l=0}^{d} \frac{\overline{p_l(i)}\,\overline{p_l(j)} p_l(k)}{v_l^2}.$$

Nếu M là một ma trận vuông và $p(t)$ là một đa thức thì ta định nghĩa đa thức Schur $p \circ M$ là ma trận xác định bởi $(p \circ M)_{i,j} = p(M)_{i,j}$.

Ta định nghĩa đường kính Schur của một ma trận M là số nguyên dương s nhỏ nhất sao cho ta tìm được một đa thức p có bậc s và $p \circ M$ khả nghịch. (Nếu A là ma trận liên hợp của một đồ thị có hướng thì đường kính của đồ thị chính là số nguyên dương s nhỏ nhất sao cho ta tìm được một đa thức p có bậc s và $p \circ A$ là khả nghịch Schur)

Kết quả 6. Nếu E là một ma trận vuông với đường kính Schur bằng s thì các lũy thừa Schur $J, E, ..., E^{\circ s}$ là độc lập tuyến tính.

Chứng minh. Nếu $E^{\circ(r+1)}$ nằm trong spanU_r của r lũy thừa Schur đầu tiên của E thì U_r bất biến qua phép nhân Schur với E_r. Do đó U_r chứa tất cả các đa thức Schur trên E. Nếu $r < s$ thì không có đa thức Schur nào trên E là khả nghịch, mâu thuẫn với giả thiết đầu bài. Điều đó chỉ ra rằng các không gian $U_0, ..., U_s$ là một dãy tăng thực sự, điều phải chứng minh.

Cho $\mathcal{A}$ là một association scheme với d lớp.

Nếu E_i là một ma trận lũy đẳng của $\mathcal{A}$ với đường kính Schur bằng s thì $s \le d$. Association $\mathcal{A}$ được gọi là cometric đối với E_i nếu đường kính Schur của E_i bằng d.

Kết quả 7. Các tham số Krein là các số thực không âm.

Chứng minh. Từ hệ thức $E_i \circ E_j = \frac{1}{v}\sum_{k=0}^{d} q_{i,j}(k) E_k$, ta suy ra rằng các tham số Krein là các giá trị riêng của ma trận $vE_i \circ E_j$. Do các ma trận E_i và E_j là nửa xác định dương nên ma trận $E_i \otimes E_j$ cũng là nửa xác định dương. Ma trận $E_i \circ E_j$ là ma trận con chính của tích Kronecker này nên nó cũng là nửa xác định dương.

Do đó, các giá trị riêng của nó là các số thực không âm.

Sau đây ta sẽ cung cấp thêm một phép chứng minh chi tiết hơn cho khẳng định: các tham số Krein là các số thực không âm.

Giả sử $\mathcal{A}$ là một association scheme trên v đỉnh và ký hiệu $e_1,...,e_v$ là cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{C}^v$.

Đặt $\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{v} e_i \otimes e_i \otimes e_i$.

Kết quả 8. Cho $\mathcal{A}$ là một association scheme.

Khi đó $q_{i,j}(k) = \frac{v}{m_k}\left\|\left(E_i \otimes E_j \otimes E_k\right)\mathcal{J}\right\|^2$, và $q_{i,j}(k) = 0$ khi và chỉ khi $\left(E_i \otimes E_j \otimes E_k\right)\mathcal{J} = 0$.

Chứng minh.

Ta có $\operatorname{sum}\left(E_i \circ E_j \circ E_k\right) = \mathcal{J}^*\left(E_i \otimes E_j \otimes E_k\right)\mathcal{J}$.

Do $E_i \otimes E_j \otimes E_k$ là lũy đẳng và tự liên hợp, nên $\operatorname{sum}\left(E_i \circ E_j \circ E_k\right) = \left\|\left(E_i \otimes E_j \otimes E_k\right)\mathcal{J}\right\|^2$.

Kết hợp với hệ thức $q_{i,j}(k) = v\frac{\operatorname{sum}\left(E_k \circ E_i \circ E_j\right)}{m_k}$, ta suy ra điều phải chứng minh.

Nếu $q_{i,j}(k) = 0$ thì $E_k\left(E_i \circ E_j\right) = 0$ và do đó mỗi cột của E_k^T trực giao với mỗi cột của $E_i \circ E_j$.

Sau đây ta sẽ trình bày một kết quả tổng quát hơn của nhận xét vừa chỉ ra ở trên.

Kết quả 9. Cho $\mathcal{A}$ là một association scheme trên v đỉnh. Nếu $q_{i,j}(k) = 0$ và x, y, z là ba phần tử của $\mathbb{C}^v$ thì $E_k^T z$ trực giao với $E_i x \circ E_j y$.

Chứng minh.

Ta có $\mathcal{J}^*\left(E_i \otimes E_j \otimes E_k^T\right)(x \otimes y \otimes z) = 1^*\left(E_i x \circ E_j y \circ E_k^T z\right)$.

Nếu $q_{i,j}(k) = 0$ thì vế trái của hệ thức này bằng không.

Mặt khác, vế phải của hệ thức trên bằng không khi và chỉ khi $E_k^T z$ trực giao với $E_i x \circ E_j y$.

Giả sử $\mathcal{A}$ là cometric đối với E_1. Một đa thức điều hòa bậc i được định nghĩa là một phần tử của không gian cột của E_i. Một hàm đa thức bậc i là một tổ hợp tuyến tính của các đa thức điều hòa có bậc tối đa bằng i. Kết quả vừa chứng minh ở trên chỉ ra rằng nếu f là một đa thức bậc 1 và g là một đa thức bậc i thì $f \circ g$ có bậc tối đa là $i+1$. (chú ý rằng $f \circ g$ là tích thông thường của các hàm)

Tài liệu tham khảo:

[1]. Chris Godsil, Association Schemes, University of Waterloo, 2010.
[2]. Trương Phước Nhân, Cấu hình tổ hợp liên kết với đồ thị strong regular, 28/07/2018.
[3]. Trương Phước Nhân, Đồ thị strong regular,16/07/2018.