Định lý de Bruijn – Erdös

Trương Phước Nhân, 30/07/2018

Kết quả. (de Bruijn-Erdös) Cho $\mathcal{F}$ là một họ các tập con của một $n-$ tập X. Giả sử rằng hai tập bất kỳ thuộc $\mathcal{F}$ đều có chung chính xác một điểm. Khi đó $|\mathcal{F}| \le n$.

Dấu "=" xảy ra cho một trong các trường hợp sau:

a) bằng cách đánh số lại các điểm và các tập nếu cần, $\mathcal{F} = \{A_1, ..., A_n\}$, trong đó $A_i = \{i, n\}$, $i = 1, ..., n-1$, và $A_n = \{n\}$.

b) bằng cách đánh số lại các điểm và các tập nếu cần, $\mathcal{F} = \{A_1, ..., A_n\}$, trong đó $A_i = \{i, n\}$, $i = 1, ..., n-1$, và $A_n = \{1, 2, ..., n-1\}$.

c) tồn tại một số nguyên dương q sao cho $n = q^2 + q + 1$, mỗi tập thuộc $\mathcal{F}$ đều có $q+1$ phần tử và mỗi điểm nằm trên chính xác $q+1$ thành viên của $\mathcal{F}$.

Chứng minh.

Đầu tiên, ta có thể giả sử sử rằng một tập thuộc $\mathcal{F}$ đều chứa ít nhất hai điểm.

Thật vậy, nếu có một tập thuộc $\mathcal{F}$ là rỗng thì họ $\mathcal{F}$ chỉ gồm một thành viên duy nhất. Nếu $\mathcal{F}$ chứa một tập đơn, ta tạm giả sử là $\{n\}$, thì tất cả các tập còn lại thuộc $\mathcal{F}$ đều chứa n, và hai thành viên bất kỳ của họ $\mathcal{F}$ sẽ chỉ giao nhau tại n; nên có thêm tối đa là $n-1$ tập khác thuộc họ $\mathcal{F}$, trường hợp họ $\mathcal{F}$ có chính xác n thành viên chính là trường hợp a) của khẳng định.

Đồng thời, ta cũng có thể giả sử rằng $X \notin \mathcal{F}$; trong trường hợp ngược lại thì chỉ có tối đa là một tập khác thuộc $\mathcal{F}$, đó chính là một tập đơn.

Bây giờ ta đi vào ý chính của chứng minh, nhưng ta cần đến một thủ thuật nhỏ như sau:

Nếu $|\mathcal{F}| > n$ thì có một họ con của $\mathcal{F}$ có chính xác n thành viên.

Ta sẽ khảo sát họ mới này và chỉ ra rằng không thể bổ sung thêm thành viên mới vào nó mà vẫn thỏa mãn các yêu cầu của giả thiết.

Do đó, không làm mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $|\mathcal{F}| = n$.

Đặt $\mathcal{F} = \{A_1, ..., A_n\}$, hơn nữa, với mỗi $i = 1, 2, ..., n$, ta đặt

$B_i = X \setminus A_i$;

$k_i = |A_i|$;

r_i là số các tập thuộc $\mathcal{F}$ chứa i. (r_i được gọi là số replication của điểm i)

Khẳng định 1. Nếu $i \notin A_j$ thì $k_j \ge r_i$.

Thật vậy, do mỗi thành viên của $\mathcal{F}$ có chứa i giao với A_j tại duy nhất một điểm, và các điểm giao này đều khác nhau.

Khẳng định 2. Các tập $B_1, ..., B_n$ thỏa mãn điều kiện Hall.

Thật vậy, nếu J là một tập con của $\{1, ..., n\}$ thì $B(J) := \bigcup_{j \in J} B_j$ là một tập gồm các điểm không được chứa trong các tập A_j với mọi $j \in J$. Nếu $J = \{j\}$ thì $B(J) = B_j = X \setminus A_j \ne \varnothing$, theo giả thiết bổ sung; nên điều kiện Hall được thỏa mãn trong trường hợp này. Nếu $2 \le |J| \le n-1$ thì $|B(J)| \ge n-1$ (bởi vì, nếu $i, j \in J$ thì mọi điểm đều thuộc $B(J)$, ngoại trừ điểm nằm trong $A_i \cap A_j$). Nếu $|J| = n$ thì kết luận là hiển nhiên.

Do đó, ta tìm được một SDR cho họ $(B_j : j = 1, ..., n)$.

Bằng cách đánh số lại các tập nếu cần thiết, ta có thể giả sử i là một phần tử đại diện của B_i, nên ta có bao hàm thức $i \notin A_i$ với mọi $i = 1, ..., n$.

Từ khẳng định 1, ta suy ra $k_i \ge r_i$ với mọi $i = 1, ..., n$.

Bây giờ ta tiến hành đếm số các cặp (i, A_j) với $i \in A_j$.

Do mỗi điểm i nằm trong r_i tập A_j và mỗi tập A_j chứa k_j điểm i, nên ta có $\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{j=1}^{n} k_j$.

Từ hai kết quả trên ta suy ra được $k_i = r_i$ với mọi $i = 1,..., n$.

Nhận thấy rằng để dấu "$=$" xảy ra trong đánh giá $k_i \ge r_i$ thì mọi điểm nằm trên A_i phải thuộc một thành viên nào đó của họ $\mathcal{F}$ có chứa điểm i.

Bây giờ ta xem lại chứng minh ở khẳng định 2, ta nhận thấy rằng một tập J là critial chỉ khi $|J| = 1$ hoặc $n-1$. Nếu một tập $J = \{j\}$ là critical thì $|B_j| = 1$, hay $|A_j| = n-1$. Nếu một tập có kích thước $n-1$ là critical thì có $n-1$ tập A_i cùng đi qua một điểm cố định. Cả hai trường hợp này đều chính là trường hợp b) ở trong kết luận của bài toán.

Do đó, không làm giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng không có tập J nào là critial ngoại trừ $J = \varnothing$ hoặc $J = \{1,..., n\}$.

Như vậy, từ phép chứng minh của định lý Hall ta suy ra rằng với mọi cách chọn các tập B_j ta đều có thể chọn ra từ mỗi tập này một điểm làm phần tử đại diện của nó.

Bây giờ, giả sử x, y là hai điểm bất kỳ thuộc X.

Ta sẽ chứng minh rằng có một thành viên của $\mathcal{F}$ chứa cả x và y.

Thật vậy, trong trường hợp ngược lại, bằng cách đánh số lại các thành viên của $\mathcal{F}$ nếu thấy cần thiết, tập A_1 chứa y nhưng không chứa x. Do đó B_1 chứa x, và ta có thể giả sử rằng x là phần tử đại đại của tập B_1 này. Như đã chỉ ra ở trên thì mọi điểm nằm trên A_1, trong đó có cả điểm y, phải thuộc một thành viên nào đó của họ $\mathcal{F}$ có chứa điểm x.

Nói một cách khác, từ giả thiết ban đầu của bài toán, hai điểm bất kỳ nằm trên duy nhất một thành viên của họ $\mathcal{F}$.

Điều khẳng định trên chỉ ra rằng không thể có một họ $\mathcal{F}$ với nhiều hơn n thành viên.

Thật vậy, trong trường hợp ngược lại, ta cũng sẽ chọn ra một họ con của $\mathcal{F}$ gồm n thành viên thì họ này sẽ phải thỏa mãn khẳng định vừa được chứng minh ở trên. Nếu A là một thành viên khác, không phải là một tập đơn, và $x, y \in A$, thì có một tập A_i nào đó trong số n thành viên ban đầu chứa cả x và y, nên A_i và A có ít nhất hai điểm giao chung, điều này mâu thuẫn giả thiết đầu bài.

Giả sử tồn tại hai điểm x, y sao cho $r_x \ne r_y$.

Khi đó, một thành viên bất kỳ của $\mathcal{F}$ sẽ chứa ít nhất một trong hai điểm x và y.

Giả sử z là một điểm khác, không mất tính tổng quá, ta có thể giả sử $r_x \ne r_z$ (ta có thể thay x bởi y nếu thấy cần thiết), và ta cũng thấy rằng một thành viên bất kỳ của $\mathcal{F}$ sẽ chứa ít nhất một trong hai điểm x và z. Nhưng lưu ý rằng chỉ có duy nhất một thành viên, ta tạm gọi là A, chứa cả y và z. Do đó, mọi thành viên khác A đều chứa x, đây chính là trường hợp b) nêu trong khẳng định của bài toán ban đầu.

Do đó, ta có thể giả sử rằng r_x là hằng số, ta tạm ký hiệu $r_x = q+1$.

Bây giờ, từ khẳng định 1, ta suy ra $|A| = q+1$ với mọi $A \in \mathcal{F}$.

Chọn một điểm x cố định thì ta sẽ tìm được chính xác $q+1$ thành viên của họ $\mathcal{F}$ cùng chứa x, mỗi thành viên này chứa thêm q điểm khác của X và không có điểm nào trong số các điểm này bị trùng lặp lại.

Do đó, $n = 1 + (q+1)q = q^2 + q + 1$.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Stefan H.M. van Zwam, MAT377 – Combinatorial Mathematics, April,04/2014
[2]. Trương Phước Nhân, Transversal, 12/07/2018.
[3]. J.H. van Lint- R.M. Wilson, A course in combinatorics, Cambridge University Press, 2001.