Lý thuyết chuỗi Laurent

Trương Phước Nhân, 08/01/2018

Trong bài viết "**Lý thuyết chuỗi lũy thừa**" ta đã khảo sát các vấn đề cơ bản về chuỗi lũy thừa về mặt thao tác tính toán trên các chuỗi lũy thừa khác nhau và đồng thời có tìm hiểu sơ qua về cách tính các hệ số trong khai triển lũy thừa dựa trên phép tính đạo hàm cấp cao. Nhưng ta cũng có thể nhận thấy rằng việc sử dụng chuỗi lũy thừa và phép tính đạo hàm phải yêu cầu điều kiện rất ngặt. Để khắc phục ngược điểm của việc tính toán này trong bài viết này ta sẽ nghiên cứu dựa trên chuỗi Laurent (một dạng mở rộng của chuỗi lũy thừa) và tích phân chu tuyến.

1. Khái niệm cơ bản

Chuỗi Taylor là công cụ chính khi ta nghiên cứu cấu trúc của một hàm số trong lân cận của một điểm nào đó mà tại đó hàm số có đạo hàm mọi cấp. Tuy nhiên điều kiện này rất ngặt nên gây ra nhiều khó khăn trong quá trình khảo sát. Việc sử dụng chuỗi Taylor không còn hiệu quả mà ta phải dùng một công cụ khác. Đó là chuỗi Laurent mà ta sẽ nghiên cứu sau đây.

Chuỗi Laurent là chuỗi hàm có dạng

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\left(z-z_0\right)^n=\ldots+\frac{a_{-m}}{\left(z-z_0\right)^{-m}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1\left(z-z_0\right)+\ldots+a_n\left(z-z_0\right)^n+\ldots=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{\left(z-z_0\right)^n}}_{(1)}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n}_{(2)}$$

trong đó a_n ($n\in\mathbb{Z}$) và z_0 là những hằng số phức.

Đầu tiên ta có một số nhận xét rằng chuỗi (1) là một chuỗi lũy thừa thông thường nên nếu nó hội tụ thì miền hội tụ sẽ là hình tròn $\left\{z:\left|z-z_0\right|<R\right\}$.

Mặt khác, bằng phép đổi biến $w=\dfrac{1}{z-z_0}$, ta có thể biểu diễn lại chuỗi (2) lại dưới dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}w^n$ nên nếu nó hội tụ thì miền hội tụ sẽ là hình tròn $\left\{w:\left|w\right|<r'=\dfrac{1}{r}\right\}=\left\{z:\left|z-z_0\right|>r\right\}$.

Do đó nếu chuỗi Laurent hội tụ thì miền hội tụ của nó sẽ là hình vành khăn $\left\{z:r<\left|z-z_0\right|<R\right\}$.

Tương tự như đối với định lý Taylor cho các chuỗi lũy thừa ta cũng có định lý Laurent về việc biểu diễn một hàm số giải tích thành chuỗi Laurent như sau:

Kết quả 1. (Laurent)

Cho trước hàm số $f\left(z\right)$ giải tích trong hình vành khăn $\left\{z:r<\left|z-z_0\right|<R\right\}$ trong đó $0\le r<R\le+\infty$.

Khi đó, hàm số $f\left(z\right)$ luôn có duy nhất một khai triển thành chuỗi Laurent $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$,

trong đó $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\dfrac{f\left(z\right)dz}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, C là một đường cong Jordan đóng trơn từng khúc nào đó nằm trong hình vành khăn $\left\{z:r<\left|z-z_0\right|<R\right\}$.

Chứng minh kết quả 1.

Giả sử z là một điểm cố định của hình vành khăn $\left\{z:r_1<\left|z-z_0\right|<R_1,r<r_1<R_1<R\right\}$.

Kí hiệu các đường tròn biên của hình vành khăn là $\Gamma\left(r_1\right)=\left\{z:\left|z-z_0\right|=r_1\right\}$ và $\Gamma\left(R_1\right)=\left\{z:\left|z-z_0\right|=R_1\right\}$.

Áp dụng công thức tích phân Cauchy ta thu được

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma\left(R_1\right)}\frac{f\left(\zeta\right)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma\left(r_1\right)}\frac{f\left(\zeta\right)d\zeta}{\zeta-z}.$$

Trên đường tròn $\Gamma\left(R_1\right)$ ta có $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<\frac{R_1}{R_1}=1$ nên nhân Cauchy $\frac{1}{\zeta-z}$ của tích phân có thể biểu diễn dưới dạng $\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}.\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-z_0\right)^n}{\left(\zeta-z_0\right)^{n+1}}$, $\zeta\in\Gamma\left(R_1\right)$.

Do chuỗi hàm này hội tụ đều về hàm $\frac{1}{\zeta-z}$ trên đường tròn $\Gamma\left(R_1\right)$ nên, bằng cách nhân chuỗi này với hàm $\frac{f(z)}{2\pi i}$ và lấy tích phân kết quả theo đường tròn $\Gamma\left(R_1\right)$, ta thu được

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma(R_1)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n \text{, trong đó } a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma(R_1)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\left(\zeta-z_0\right)^{n+1}}.$$

Trên đường tròn $\Gamma\left(r_1\right)$ ta có $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<\frac{r_1}{r_1}=1$ nên nhân Cauchy $\frac{1}{\zeta-z}$ của tích phân có thể biểu diễn dưới dạng $\frac{1}{\zeta-z}=-\frac{1}{z-z_0}.\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\zeta-z_0\right)^{n-1}}{\left(z-z_0\right)^n}$, $\zeta\in\Gamma\left(r_1\right)$.

Do chuỗi hàm này hội tụ đều về hàm $\frac{1}{\zeta-z}$ trên đường tròn $\Gamma\left(r_1\right)$ nên, bằng cách nhân chuỗi này với hàm $\frac{f(z)}{2\pi i}$ và lấy tích phân kết quả theo đường tròn $\Gamma\left(r_1\right)$, ta thu được

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma(r_1)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}a_{-n}\left(z-z_0\right)^{-n} \text{, trong đó } a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma(r_1)}f(\zeta)\left(\zeta-z_0\right)^{n-1}d\zeta.$$

Kết hợp các kết quả thu được ở trên ta thu được $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$,

trong đó

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma(R_1)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\left(\zeta-z_0\right)^{n+1}},\ n=0,1,2,...,$$

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma(r_1)}f(\zeta)\left(\zeta-z_0\right)^{n-1}d\zeta.$$

Phần việc còn lại là chứng minh tính duy nhất của khai triển thu được trong đoạn lập luận nêu trên.

Giả sử hàm $f(z)$ khai triển được thành chuỗi Laurent như sau:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$$

Theo định lý Abel chuỗi Laurent này hội tụ đều về hàm $f(z)$ trong miền đóng K bất kì chứa trong hình vành khăn $\left\{z: r_1<\left|z-z_0\right|<R_1, r<r_1<R_1<R\right\}$.

Do đó, bằng cách nhân cả hai vế với $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\left(z-z_0\right)^{m+1}}$ rồi lấy tích phân kết quả theo đường cong kín C theo hướng ngược chiều kim đồng hồ, ta nhận được

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{\left(z-z_0\right)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{dz}{\left(z-z_0\right)^{m+1-n}}.$$

Do $\oint_C \frac{dz}{\left(z-z_0\right)^{m+1-n}} = \begin{cases} 0\,,\ m\neq n \\ 2\pi i,\ m=n \end{cases}$ nên ta suy ra $a_m = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{\left(z-z_0\right)^{m+1}}, m\in\mathbb{Z}$.

Điều đó chứng tỏ rằng khai triển Laurent trong hình vành khăn $\left\{z : r_1 < |z-z_0| < R_1, r < r_1 < R_1 < R\right\}$ là duy nhất. Do r_1 và R_1 có thể được chọn tương ứng gần với r và R tùy ý nên khai triển này hội tụ trong toàn vành $\left\{z : r < |z-z_0| < R\right\}$ và khai triển đó là duy nhất.

Kết quả 2.

Giả sử hàm số $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $\left\{z : r < |z-z_0| < R\right\}$.

Khi đó các hệ số trong khai triển Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(z-z_0\right)^n$ của hàm $f(z)$ trong hình vành khăn $\left\{z : r < |z-z_0| < R\right\}$ thỏa mãn đánh giá

$$|a_n| \le \frac{M}{\rho^n}, n\in\mathbb{Z},$$

trong đó $M = \sup\limits_{z\in\Gamma(\rho)} |f(z)|, \Gamma(\rho) = \left\{z : |z-z_0| = \rho, r<\rho<R\right\}$.

Chứng minh kết quả 2.

Áp dụng công thức tính toán hệ số trong khai triển Laurent, ta có

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma(\rho)} \frac{|f(z)||dz|}{|z-z_0|^{n+1}} \le \frac{M}{2\pi\rho^{n+1}}\oint_{\Gamma(\rho)} |dz| = \frac{M}{2\pi\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$$

2. Điểm bất thường cô lập

Chuỗi Laurent cho phép chúng ta nghiên cứu dễ dàng hơn các hàm giải tích trong lân cận của điểm nào đó mà tại điểm đó hàm mất tính giải tích.

Giả sử hàm số $f(z)$ giải tích trong lân cận nào đó của điểm $z=z_0$ có thể ngoại trừ ra tại chính điểm z_0.

Nói cách khác, hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $\left\{z : 0 < |z-z_0| < r\right\}$.

Khi đó có hai khả năng sau đây có thể xảy ra

(1) Tìm được số A sao cho nếu đặt $f(z_0) = A$ thì hàm $f(z)$ giải tích tại điểm $z=z_0$, tức là giải tích trong toàn hình tròn $\left\{z : |z-z_0| < r\right\}$. Trong trường hợp này điểm $z=z_0$ được gọi là *điểm bất thường khử được* của hàm $f(z)$.

(2) Hàm số $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $\left\{z : 0 < |z-z_0| < r\right\}$ nhưng không giải tích trong hình tròn $\left\{z : |z-z_0| < r\right\}$. Trong trường hợp này điểm $z=z_0$ được gọi là *điểm bất thường cô lập* của hàm $f(z)$.

Để khảo sát dáng điệu của hàm số $f(z)$ trong lân cận của điểm $z=z_0$ ta thực hiện khai triển hàm $f(z)$ thành chuỗi Laurent trong hình vành khăn $\left\{z : 0 < |z-z_0| < r\right\}$:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, 0<|z-z_0|<r,$$

trong đó

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(\rho)} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, n\in\mathbb{Z}, 0<\rho<r.$$

Kết quả 3.

Nếu hàm số $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $\{z: 0<|z-z_0|<r\}$ thì $z=z_0$ là điểm bất thường khử được của $f(z)$ khi và chỉ khi hàm $f(z)$ có môđun bị chặn trong một lân cận nào đó của điểm $z=z_0$.

Chứng minh kết quả 2.

Điều kiện cần. Giả sử $z=z_0$ là điểm bất thường khử được của hàm $f(z)$.

Khi đó ta tìm được số A sao cho sau khi ta thay $f(z_0)=A$ thì hàm $f(z)$ giải tích tại điểm $z=z_0$ và do đó nó liên tục tại điểm z_0.

Từ sự tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ suy ra $f(z)$ bị chặn trong lân cận nào đó của điểm z_0.

Điều kiện đủ. Giả sử tồn tại lân cận $U(z_0;\delta)$, $0<\delta\le r$ và tồn tại hằng số $M>0$ sao cho $|f(z)|\le M$ với mọi $z\in U(z_0;\delta)$, $z\ne z_0$

Áp dụng kết quả 2, $|a_n|\le \frac{M}{\rho^n}, n\in\mathbb{Z}$, ta thu được $|a_{-n}|\le M\rho^n, n=1,2,...,$

Nhận xét rằng các hệ số $a_{-n}, n=1,2,...,$ không phụ thuộc vào ρ.

Do đó khi ta chuyển qua giới hạn bằng cách cho $\rho\to 0$ ta thu được $a_{-n}=0, n=1,2,...$

Từ đây ta suy ra rằng khai triển Laurent của hàm $f(z)$ có dạng $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, 0<|z-z_0|<r$.

Do đó, bằng cách đặt $f(z_0)=a_0$, ta dễ dàng chứng minh được rằng hàm $f(z)$ giải tích trong hình tròn $\{z: |z-z_0|<r\}$, nên $z=z_0$ là điểm bất thường khử được.

Nhận xét rằng khái niệm "điểm bất thường khử được" được dùng tương tự như khái niệm "điểm gián đoạn khử được". Đối với hàm hai biến thực $F(x,y)$ xác định, khả vi trong lân cận điểm (x_0,y_0) (có thể trừ ra tại chính điểm (x_0,y_0)), tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} F(x,y)=A$ và sau khi ta bổ sung giá trị $F(x_0,y_0)=A$ ta sẽ thu được hàm $F(x,y)$ liên tục tại (x_0,y_0) nhưng nói chung không khả vi tại (x_0,y_0). Tuy nhiên đối với hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $0<|z-z_0|<r$ chỉ với một điều kiện về tính bị chặn của nó trong lân cận điểm $z=z_0$ là ta đã có giới hạn $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ tồn tại hữu hạn và sau khi bổ sung giá trị $f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ ta thu được hàm giải tích tại chính điểm $z=z_0$.

Từ kết quả 3) ta suy ra rằng điểm $z=z_0$ là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $\{z: 0<|z-z_0|<r\}$ khi và chỉ khi $|f(z)|$ không bị chặn trong bất cứ lân cận nào của điểm $z=z_0$, tức là $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}|f(z)|=\infty$.

Do đó, có ba loại điểm bất thường cô lập :

a) Điểm z_0 được gọi là bất thường khử được nếu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \neq \infty$.

b) Điểm z_0 được gọi là cực điểm nếu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

c) Điểm z_0 được gọi là bất thường cốt yếu nếu hàm $f(z)$ không có giới hạn khi z dần về z_0.

Kết quả 4.

Điều kiện cần và đủ để điểm $z = z_0$ là cực điểm của hàm $f(z)$ là điểm z_0 là không điểm của hàm $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

Chứng minh kết quả 4.

Điều kiện cần. Giả sử $z = z_0$ là cực điểm của hàm $f(z)$.

Khi đó, $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$ nên tồn tại một lân cận $\{z : |z - z_0| < \delta, \delta < r\}$ của điểm z_0 sao cho trong lân cận này hàm $f(z)$ thỏa mãn đánh giá $|f(z)| > 1$.

Như vậy, trong lân cận này hàm $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ là hàm giải tích có thể trừ ra tại điểm $z = z_0$.

Mặt khác, từ hệ thức $|\varphi(z)| = \dfrac{1}{|f(z)|} < 1$ nên từ kết quả 3) ta suy ra rằng $z = z_0$ là điểm bất thường khử được đối với hàm $\varphi(z)$.

Nhận xét rằng giá trị của hàm số tại điểm z_0 bằng $\varphi(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$.

Do đó, hàm $\varphi(z)$ giải tích trong lân cận $\{z : |z - z_0| < \delta, \delta < r\}$ nên $z = z_0$ là không điểm của hàm này.

Điều kiện đủ. Giả sử $z = z_0$ là không điểm của hàm $\varphi(z)$.

Ta sẽ chứng minh rằng $z = z_0$ là cực điểm của hàm $f(z)$.

Thật vậy, do $z = z_0$ là không điểm của hàm $\varphi(z)$ và $\varphi(z) \not\equiv 0$ nên $\exists \Delta > 0$ đủ bé sao cho trong lân cận $\{z : |z - z_0| < \Delta\}$ hàm $\varphi(z)$không có không điểm nào khác ngoài $z = z_0$. Do $f(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$ nên hàm $f(z)$ giải tích trong lân cận thủng $\{z : 0 < |z - z_0| < \Delta\}$ và tiến dần đến ∞ khi $z \to z_0$.

Do đó, $z = z_0$ là cực điểm của hàm $f(z)$.

Nhận xét rằng từ kết quả vừa thu được ta nhận thấy một sự tương ứng 1-1 giữa các không điểm và cực điểm nên từ điều này ta sẽ định nghĩa thêm cấp của một cực điểm (dạng tương tự của khái niệm cấp của một không điểm)

Điểm $z = z_0$ được gọi là cực điểm cấp m ($m \geq 1$) đối với hàm $f(z)$ nếu điểm $z = z_0$ là không điểm cấp m đối với hàm $\dfrac{1}{f(z)}$.

Nhận xét rằng từ phân tích ở trên thì trong khai triển Laurent của hàm $f(z)$ trong lân cận của một điểm bất thường khử được thì phần chính của chuỗi Laurent bằng 0. Ngược lại, nếu phần chính của chuỗi Laurent bằng 0 thì điểm z_0 là một điểm bất thường khử được. Nói cách khác ta có thể xác định được z_0 có là điểm bất thường khử được hay không nhờ vào dáng điệu của chuỗi Laurent trong một lân cận thủng xung quanh điểm đó.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: "Dáng điệu của chuỗi Laurent tại cực điểm và điểm bất thường cô lập sẽ như thế nào?"

Đầu tiên, ta sẽ khảo sát dáng điệu của hàm trong lân cận của các cực điểm.

Kết quả 5.

Điều kiện cần và đủ để $z=z_0$ là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$ là phần chính của khai triển Laurent của hàm trong lân cận điểm $z=z_0$ chứa không quá m số hạng, tức là $a_n=0, -\infty<n\le-(m+1), a_{-m}\ne 0$.

Chứng minh kết quả 5.

Điều kiện cần. Giả sử $z=z_0$ là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

Khi đó, $z=z_0$ là không điểm cấp m đối với hàm $\dfrac{1}{f(z)}$. Từ đó ta cũng suy ra rằng trong lân cận nào đó của điểm $z=z_0$, ta có

$$\frac{1}{f(z)}=A_m(z-z_0)^m+A_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\dots, A_m\ne 0,$$

và do đó

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}.\frac{1}{A_m+A_{m+1}(z-z_0)+\dots}.$$

Chuỗi lũy thừa $A_m+A_{m+1}(z-z_0)+\dots$ biểu diễn một hàm giải tích không triệt tiêu trong một lân cận nào đó của điểm $z=z_0$, do $A_m\ne 0$.

Do đó, hàm $\varphi(z)=\dfrac{1}{A_m+A_{m+1}(z-z_0)+\dots}$ là hàm giải tích trong lân cận của điểm $z=z_0$ nên khai triển của hàm $\varphi(z)$ có dạng $\varphi(z)=\alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+\dots+\alpha_n(z-z_0)^n+\dots, \alpha_0=\dfrac{1}{A_m}\ne 0$.

Thay kết quả trên vào khai triển của hàm $f(z)$ ta thu được chuỗi

$$f(z)=\frac{\alpha_0}{(z-z_0)^m}+\frac{\alpha_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\dots$$

Nhận xét rằng do khai triển Laurent của một hàm là duy nhất nên chuỗi ở vế phải của biểu thức trên là khai triển Laurent của hàm $f(z)$, nên $z=z_0$ là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

Điều kiện đủ. Giả sử trong lân cận nào đó của điểm $z=z_0$ hàm $f(z)$ có khai triển

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)^{-1}}+a_0+a_1(z-z_0)+\dots,\ a_{-m}\ne 0.$$

Do đó, ta có thể biểu diễn khai triển của hàm $f(z)$ lại dưới dạng $f(z)=\dfrac{a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\dots}{(z-z_0)^m}$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \cdot \frac{1}{a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \ldots}, a_{-m} \neq 0.$$

Bằng cách thay hàm giải tích $\frac{1}{a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \ldots}$ bởi khai triển Taylor của nó theo các lũy thừa theo $z - z_0$, ta thu được

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \left[b_0 + b_1(z-z_0) + \ldots \right]$$

$$= b_0 (z-z_0)^m + b_1 (z-z_0)^{m+1} + \ldots,\ b_0 = \frac{1}{a_{-m}} \neq 0.$$

Khai triển mà ta vừa tìm được chứng tỏ rằng $z = z_0$ là không điểm cấp m của hàm $\frac{1}{f(z)}$.

Do đó, $z = z_0$ là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

Bằng cách kết hợp các kết quả phân tích dáng điệu vừa thu được ở các phần trên ta thu được kết quả

Kết quả 6.

Điều kiện cần và đủ để $z = z_0$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$ là phần chính của khai triển Laurent của hàm trong lân cận điểm $z = z_0$ có vô số số hạng.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Trương Văn Thương, Hàm số biến số phức, Nhà xuất bản Giáo Dục.

[2]. Nguyễn Thủy Thanh, Cơ sở lý thuyết hàm biến phức, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội.

[3]. Trương Phước Nhân, Lý thuyết chuỗi lũy thừa, 02/01/2019.