Hình học hữu hạn

Trương Phước Nhân, 25/07/2018

1. Đại số tuyến tính trên các trường hữu hạn

Đầu tiên ta sẽ nhắc lại một kết quả quen thuộc về điều kiện tồn tại của các trường hữu hạn:

"Tồn tại một trường hữu hạn với q phần tử khi và chỉ khi q phải là lũy thừa của một số nguyên tố".

Đồng thời, nếu một trường như vậy tồn tại thì nó là duy nhất, theo nghĩa sai khác nhau một phép đẳng cấu. Ta thường gọi trường này là trường Galois bậc q và ký hiệu là $\mathrm{GF}(q)$.

Trong các tính toán truyền thống, ta thường xét trên các trường như trường số thực hoặc trường số hữu tỷ hoặc trường số phức. Tuy nhiên, trong khuôn khổ của bài viết này ta sẽ làm việc trên các trường hữu hạn.

Định nghĩa về hệ độc lập tuyến tính, hệ sinh, cơ sở, không gian con, công thức tính số chiều

$$\dim(U\cap W)+\dim(U+W)=\dim U+\dim W,$$

phép biểu diễn các ánh xạ tuyến tính bằng các ma trận, hạng,... đều được hiểu theo nghĩa thông thường.

Các phép biến đổi trên hàng và ma trận bậc thang thu gọn cũng được định nghĩa tương tự như theo truyền thống. Nhưng do chúng ta sẽ sử dụng đến chúng khá nhiều trong bài viết này nên ở đây ta sẽ phác thảo lại những nét chính về chúng.

Có ba loại phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của một ma trận:

- nhân một hàng với một vô hướng khác không;
- cộng bội của một hàng với một hàng khác;
- đổi chỗ hai hàng.

Các phép biến đổi này không làm thay đổi tính độc lập hoặc tính phụ thuộc của các hàng của ma trận.

Nói cách khác không làm thay đổi không gian hàng, không gian con sinh bởi các vector hàng của ma trận.

Một ma trận $A=(a_{ij})$ được gọi là ma trận bậc thang thu gọn nếu ba điều kiện sau thỏa mãn:

- với mọi hàng cho trước của ma trận A hoặc hàng này bằng 0 hoặc phần tử đầu tiên khác không của nó bằng 1 (phần tử 1 này được gọi là phần tử dẫn đầu);
- với mọi $i>1$, nếu hàng thứ i khác không thì hàng thứ $(i-1)$ cũng như vậy, và phần tử dẫn đầu của hàng thứ $(i-1)$ nằm phía bên trái phần tử dẫn đầu của hàng thứ i;
- nếu một cột chứa phần tử dẫn đầu của một hàng nào đó thì tất cả các phần tử khác của nó phải bằng 0.

Bây giờ từ định nghĩa trên ta suy ra rằng:

Với mọi ma trận cho trước ta đều có thể đưa về dạng ma trận bậc thang thu gọn bằng cách áp dụng liên tiếp các phép biến đổi sơ cấp trên hàng; và hơn nữa dạng ma trận bậc thang thu gọn này là duy nhất.

2. Các hệ số Gaussian

Bây giờ ta sẽ xem xét một số kết quả cơ bản thường gặp khi khảo sát các không gian vector trên trường hữu hạn.

Ký hiệu $V(n,q)$ là một không gian vector n chiều trên trường $\mathrm{GF}(q)$.

Kết quả 1. Số các vector trong không gian $V(n,q)$ bằng q^n.

Chứng minh. Bằng cách chọn một cơ sở nào đó trong không gian $V(n,q)$, ta luôn có thể thể diễn các vector bằng các bộ n phần tử được tạo thành từ các phần tử của $\mathrm{GF}(q)$; do đó có q^n vector.

Hệ số Gaussian $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ được định nghĩa là số các không gian con k chiều của không gian $V(n,q)$.

Kết quả 2. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q=\dfrac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\dots(q-1)}$.

Chứng minh. Đầu tiên, ta nhận thấy rằng số các hệ độc lập gồm k vector trong $V(n,q)$ bằng

$$(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{k-1}).$$

Thật vậy, một hệ độc lập gồm k vector khi và chỉ khi không có vector nào nằm trong không gian con sinh bởi một trong số các vector còn lại. Do đó, vector thứ nhất ta có thể chọn bất kỳ, ngoại trừ vector không, có q^n-1 cách chọn; vector thứ hai không được nằm trong không gian con 1 chiều sinh bởi vector thứ nhất, có

$q^n - q$ cách chọn;....; vector thứ i không được nằm trong không gian con $(i-1)$ chiều sinh bởi các vector trước nó, có $q^n - q^{i-1}$ cách chọn. Kết hợp các tính toán này ta nhận được khẳng định trên.

Tiếp theo, ta nhận thấy rằng một không gian con k - chiều sẽ được sinh ra bởi một hệ độc lập gồm k vector nào đó trong $V(n,q)$ và hệ vector này đóng vai trò là một cơ sở của nó, lưu ý rằng khi ta cho trước một không gian con U thì không gian con này có thể có rất nhiều cơ sở. Nhưng thật may mắn, từ cách tính số hệ độc lập ở trên thì ta nhận thấy rằng để tính số các cơ sở trong một không gian con k - chiều ta chỉ cần thay n bởi giá trị k.

Do đó, số các không gian con k - chiều bằng

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)...(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)...(q^k-q^{k-1})} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)...(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)...(q-1)}.$$

Nhận xét.

● Nhận thấy rằng số các không gian con k - chiều của $V(n,q)$ bằng với số các ma trận bậc thang thu gọn cấp $k \times n$ trên trường $\mathrm{GF}(q)$ sao cho không có hàng nào gồm toàn 0. Điều này cung cấp cho ta một cách giải thích khác cho công thức tính $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

● Nếu ta xem hệ số Gaussian như là một hàm theo biến thực q, trong đó ta giữ cố định các số nguyên n và k, thì:

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \lim_{q\to 1}\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)...(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)...(q-1)} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k(k-1)...1} = \binom{n}{k},$$

trong tính toán trên ta đã áp dụng kết quả cơ bản $\lim\limits_{q\to 1}\dfrac{q^a-1}{q^b-1} \underset{L'Hopital}{=} \lim\limits_{q\to 1}\dfrac{aq^{a-1}}{bq^{b-1}} = \dfrac{a}{b}$.

Chính vì nguyên nhân này mà các hệ số Gaussian cũng thường được gọi là các "q- analog" của các hệ số nhị thức.

Cách giải thích thông qua ngôn ngữ ma trận cung cấp cho ta nhiều tính chất quan trọng cho các hệ số Gaussian.

Kết quả 3. $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

Chứng minh. Xét các ma trận bậc thang cấp $k \times (n+1)$ sao cho không có hàng nào gồm toàn 0.

Ta phân các ma trận thành thành hai lớp: lớp thứ nhất gồm các ma trận có phần tử dẫn đầu của hàng thứ k nằm trên cột thứ $(n+1)$; lớp thứ hai gồm các ma trận còn lại. Lớp thứ nhất tương ứng với các ma trận bậc thang cấp $(k-1)\times n$ sao cho không có hàng nào gồm toàn 0, nên lớp thứ nhất chứa $\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$ ma trận . Mỗi phần tử thuộc lớp thứ hai tương đương với một ma trận bậc thang thu gọn cấp $k \times n$ sao cho không có hàng nào gồm toàn 0 và một cột độ dài k có các phần tử bất kỳ; do có $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ cách chọn ma trận và q^k cách chọn cột nên lớp thứ hai chứa $q^k\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ ma trận. Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Từ hệ thức vừa chứng minh ở trên ta thu lại được hệ thức truy hồi cho các hệ số nhị thức khi $q=1$. Tuy nhiên, không giống với hệ thức truy hồi cho các hệ số nhị thức, nó không đối xứng.

Kết quả 4. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$.

Chứng minh. Khẳng định trên được suy ra từ tính đẳng cấu giữa không gian con k chiều $V = V(n,q)$ và không gian đối ngẫu $(n-k)$ chiều V^* của V.

Kết quả 5. (Định lý q-nhị thức)

Với $n \ge 1$, $\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+q^i t\right)=\sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n.

Với $n=1$, khẳng định là hiển nhiên.

Giả sử khẳng định đã được kiểm chứng với mọi số nguyên nhỏ hơn n.

Khi đó, $\prod_{i=0}^{n}\left(1+q^i t\right)=\left[\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+q^i t\right)\right]\left(1+q^n t\right)=\left(\sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k\right)\left(1+q^n t\right)$.

Hệ số của t^k bên vế phải là

$$q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^n$$

$$= q^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \right)$$

$$= q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q .$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Cho $q=1$, ta nhận lại được định lý hệ số nhị thức.

Kết quả 6. Số các ma trận vuông cấp n không suy biến trên $\mathrm{GF}(q)$ bằng $\left(q^n-1\right)\left(q^n-q\right)...\left(q^n-q^{n-1}\right)$.

Chứng minh. Một ma trận vuông là không suy biến khi và chỉ khi các hàng của ma trận này là độc lập tuyến tính. Sử dụng cách lập luận như trong kết quả 2 ta thu được điều phải chứng minh.

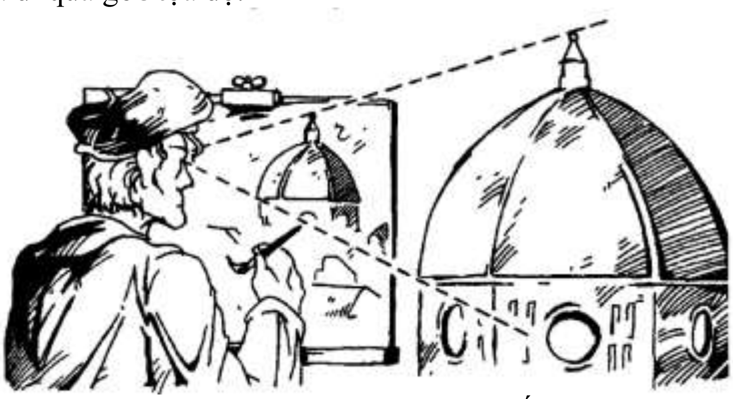
Chú ý rằng tập các ma trận vuông cấp n không suy biến lập thành một nhóm, nhóm này được gọi là nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}(n,q)$. Kết quả vừa chứng minh ở trên cung cấp công thức tính cấp của nhóm này.

3. Hình học xạ ảnh

3.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Định nghĩa của hình học xạ ảnh hiện đại có vẻ khá kỳ lạ cho những ai mới bắt đầu học về nó. Trong bài viết này ta sẽ thực hiện một số khảo sát đơn giản để xem nó đến từ đâu.

Một trong những mục tiêu mà một hoạ sĩ mong muốn đạt được là tạo ra một bức tranh trên mặt phẳng giấy 2-chiều có ảnh hưởng đến người xem xấp xỉ như cảnh vật 3-chiều mà nó mô tả. Trong thời kỳ phục hưng ở châu Âu, các họa sĩ đã bắt đầu tiếp cận vấn đề toán học này. Để tiến cận vấn đề này, ta lý tưởng hóa các yếu tố xuất hiện bằng cách xem mắt của họa sĩ là một điểm và xem điểm này như là gốc của một hệ tọa độ trong không gian 3 chiều. Người họa sĩ nhìn thấy vật thể khi có một tia sáng từ vật thể tới mắt anh ta. Nếu một vật thể khác được nhìn thấy bởi một tia sáng cùng phương sẽ xuất hiện ở cùng vị trí.(trên thực tế, các vật ở gần hơn sẽ che đi các vật thể còn lại). Do đó, các điểm của không gian được cảm nhận bởi họa sĩ có thể được đồng nhất với các tia đi qua gốc tọa độ.



Người họa sĩ muốn thể hiện không gian theo cảm nhận của anh ấy trên một mặt phẳng. Anh ấy dựng lên một "mặt phẳng ảnh" π, hiển nhiên không thể đi qua mắt của anh ấy. Một tia sáng từ vật thể đi đến mắt của người họa sĩ sẽ gặp mặt phẳng π tại một điểm; điểm này sẽ được dùng để biểu diễn tia này, cụ thể hơn nó biểu diễn các vật thể mà tia sáng đó là đường ngắm. Mở rộng mặt phẳng ảnh π ra vô hạn theo mọi hướng ta nhận được một mặt phẳng toán học. Nhận xét thêm rằng người họa sĩ chỉ có thể cảm nhận được các vật nằm ở một bên của mặt phẳng π', mặt phẳng π này đi qua gốc tọa độ biểu diễn cho đôi mắt của họa sĩ và song song với mặt phẳng π.

Về mặt toán học, ta có thể thay các tia bởi các đường thẳng đi qua gốc tọa độ, mở rộng tia theo cả hai hướng (lưu ý rằng việc này chỉ là khảo sát về mặt toán học chứ người họa sĩ không có đôi mắt ở sau đầu của anh ấy để có thể cảm nhận được các vật nằm ở phía sau anh ta). Với cách qui ước này ta nhận thấy mọi đường thẳng đi qua gốc tọa độ đều được biểu diễn bởi duy nhất một điểm trên mặt phẳng ảnh π, ngoại trừ các đường thẳng nằm trong π' (các đường thẳng này song song với π). Một ý tưởng toán học quan trọng được gợi ra ở đây đó chính là sử dụng một điểm ở ngoài mặt phẳng π để biểu diễn cho các đường thẳng trong không gian, điều này gợi ra ý tưởng về một mặt phẳng xạ ảnh thực.

Do đó, một mặt phẳng xạ ảnh có thể được cho theo hai cách: mặt phẳng ảnh π và một điểm nằm ở bên ngoài nó, hoặc tất cả các đường thẳng đi qua gốc tọa độ (tập các không gian con 1 chiều) trong không gian 3 chiều $\mathbb{R}^3$. Cách biểu diễn thứ hai có một bất lợi đó là các "điểm" của mặt phẳng xạ ảnh là các đường thẳng chứ không phải là các điểm mà ta thường quan niệm, nhưng lợi thế ở đây là tất cả các "điểm" đều giống nhau.

Cho trước một đường thẳng L trong $\mathbb{R}^3$ không đi qua gốc tọa độ, tập các đường thẳng nối các điểm của đường thẳng L với gốc tọa độ quét ra ra một mặt phẳng; mặt phẳng này giao với π theo một đường thẳng, ngoại trừ các đường thẳng nằm trên π'. Đó chính là được người họa sĩ dùng để biểu diễn đường thẳng L. Nói cách khác, theo cách mô tả thứ hai, một đường thẳng trong mặt phẳng xạ ảnh là một không gian con 2 chiều của $\mathbb{R}^3$, đường thẳng xạ ảnh tương ứng với π' thường được gọi là đường thẳng vô cực. Một điểm thú vị ở đây đó là hai đường thẳng trong không gian xạ ảnh luôn có giao với nhau; chẳng hạn, nếu L, L' là hai đường thẳng trong không gian 3 chiều song song với nhau và không song song với mặt phẳng π thì khi biểu diễn chúng trên π chúng giao nhau tại một điểm, điểm này nhận được bằng cách vẽ qua gốc tọa độ một đường thẳng song song với L và lấy giao với mặt phẳng π.

Các phân tích vừa trình bày ở trên cung cấp cho ta những gợi ý quan trọng tiến hành các khảo sát tổng quát hơn.

Không gian xạ ảnh n chiều trên một trường F, ký hiệu bởi $\mathrm{PG}(n,F)$, được định nghĩa là một không gian vector $(n+1)$ chiều $V = V(n+1, F)$. Các điểm của không gian xạ ảnh là các không gian con 1 chiều của V; các đường thẳng là các không gian con 2 chiều; ... Để tránh sự, ta sẽ sử dụng thuật ngữ k - phẳng trong hình học xạ ảnh để biểu diễn một không gian con $(k+1)$ chiều.

Tuy vậy, một số tính chất quen thuộc của hình học thông thường vẫn được thỏa mãn trong hình học xạ ảnh, ví dụ như:

a) Hai điểm phân biệt bất kỳ nằm trên duy nhất một đường thẳng.

b) Hai đường thẳng phân biệt nằm trong chính xác một mặt phẳng.

Các tính chất nêu trên được suy ra từ các kết quả cơ bản về đại số tuyến tính.

Với a), hai điểm là các không gian vector con 1 chiều và chúng sinh ra một không gian vector 2 chiều.

Với b), hai đường thẳng là các không gian vector con 2 chiều U_1 và U_2; chúng giao nhau tại một điểm có nghĩa là $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ nên $\dim(U_1 + U_2) = 3$, điều đó có nghĩa là hai đường thẳng này sinh ra một mặt phẳng.

Sau cùng là một tính chất thú vị mà ta đã đề cập đến ở trong phần phân tích:

c) Hai đường thẳng bất kỳ cùng nằm trong một mặt phẳng thì luôn cắt nhau

(Bằng chứng cho khẳng định này được suy ra bằng cách đảo các lập luận trong chứng minh của tính chất b), chú ý rằng $\dim(U_1 + U_2) = 3$ nên $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$)

Nói cách khác, không có hai đường thẳng song song!

Nếu trường F là một trường hữu hạn $\mathrm{GF}(q)$ thì ta ký hiệu lại không gian xạ ảnh là $\mathrm{PG}(n,q)$.

Bây giờ từ các kết quả cơ bản đã đạt được về các hệ số Gaussian ta có kết quả sau:

Kết quả 7. Không gian xạ ảnh $\mathrm{PG}(n,q)$ có $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ điểm, $\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q$ k - phẳng và mỗi k - phẳng chứa $\dfrac{q^{k+1}-1}{q-1}$ điểm.

Trường hợp đặc biệt, mặt phẳng xạ ảnh $\mathrm{PG}(n,q)$ có q^2+q+1 điểm, q^2+q+1 đường thẳng, mỗi đường thẳng chứa $q+1$ điểm, mỗi điểm nằm trong chính xác $q+1$ đường thẳng, hai điểm bất kỳ nằm trên duy nhất một đường thẳng và hai đường thẳng bất kỳ giao nhau tại duy nhất một điểm.

3.2. Mặt phẳng xạ ảnh

Một mặt phẳng xạ ảnh bậc q bao gồm một tập X gồm q^2+q+1 phần tử được gọi là các điểm và một tập $\mathcal{B}$ gồm các tập con $(q+1)$ phần tử của tập X được gọi là các đường thẳng thỏa mãn tính chất hai điểm phân biệt nằm trên duy nhất một đường thẳng.

Mặc dù cách định nghĩa ta vừa trình bày hơi khác so với định nghĩa ta thường dùng nhưng thật ra ta có thể chứng minh được rằng chúng hoàn toàn tương đương với nhau.

Do chỉ có duy nhất một mặt phẳng xạ ảnh bậc 1, đó chính là một tam giác, nên trong phần sau của bài viết ta sẽ chỉ giả sử rằng bậc luôn lớn hơn 1.

Sau đây là một số tính chất cơ bản của một mặt phẳng xạ ảnh

Kết quả 8. Trong một mặt phẳng xạ ảnh bậc q, các khẳng định sau được thỏa mãn:

- một điểm bất kỳ nằm trên chính xác $q+1$ đường thẳng;
- hai đường thẳng bất kỳ cắt nhau tại duy nhất một điểm;
- có chính xác q^2+q+1.

Chứng minh.

Chọn cố định một điểm p. Theo định nghĩa ta suy ra mặt phẳng xạ ảnh này chứa chính xác $q(q+1)$ điểm khác với điểm p thỏa mãn điều kiện mỗi điểm này đều nằm trên một đường thẳng đi qua p mà mỗi đường thẳng đi qua p chứa q điểm khác và không có hai đường thẳng chứa điểm bị trùng lặp lại khác điểm p nên ta suy ra có chính xác $q+1$ cùng đi qua điểm p.

Bây giờ ta xét hai đường thẳng phân biệt L_1 và L_2, và p là một điểm thuộc L_1. Khi đó, $q+1$ điểm của L_2 và điểm p xác định cho ta $q+1$ đường thẳng phân biệt đi qua p, nhưng từ phân tích ở ý đầu ta cũng nhận thấy rằng chỉ có $q+1$ đường thẳng phân biệt đi qua p nên đường thẳng L_1 phải nằm trong số các đường thẳng này. Nói cách khác L_1 và L_2 phải cắt nhau tại duy nhất một điểm.

Sau cùng, ta thực hiện đếm số các cặp (p,L) với $p\in L$, ta nhận được $|\mathcal{B}|.(q+1)=(q^2+q+1).(q+1)$ nên $|\mathcal{B}|=q^2+q+1$.

Từ các kết quả tính toán ở trên ta nhận ra "nguyên lý đối ngẫu" cho mặt phẳng xạ ảnh như nhau:

Cho $(X,\mathcal{B})$ là một mặt phẳng xạ ảnh bậc q , đặt $X'=\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'=\{\beta_x : x\in X\}$ trong đó $\beta_x=\{L\in\mathcal{B} : x\in L\}$.

Khi đó, $(X',\mathcal{B}')$ cũng là một mặt phẳng xạ ảnh bậc q.

Một điều khá lý thú ở đây đó là các điểm và đường của $(X',\mathcal{B}')$ lần lượt tương ứng với các đường và các điểm của $(X,\mathcal{B})$.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra đó là: với giá trị q nào thì tồn tại một mặt phẳng xạ ảnh bậc q?

Từ các phân tích ở mục trước ta nhận ra rằng luôn tồn tại các mặt phẳng xạ ảnh bậc là lũy thừa của một số nguyên tố.

Kết quả sau trình bày một tiêu chuẩn tổng quát hơn để kiểm tra khi nào thì tồn tại một mặt phẳng xạ ảnh hữu hạn, ta chỉ giới thiệu chứ không chứng minh lại nó ở đây.

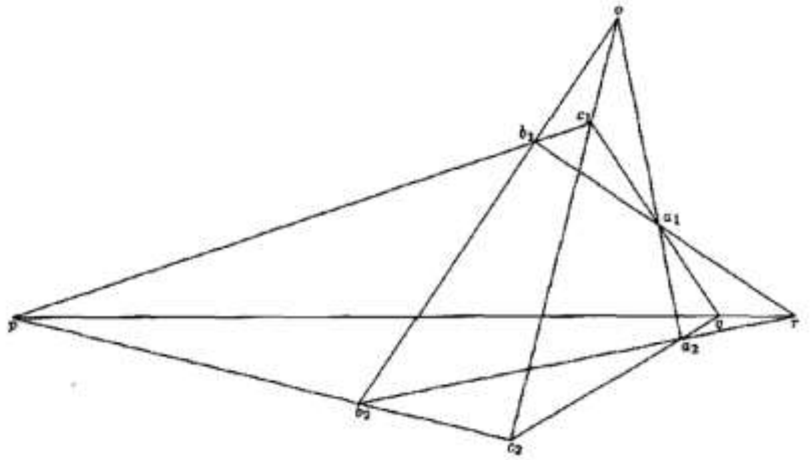
Kết quả 9. (Bruck-Ryser) Nếu tồn tại một mặt phẳng xạ ảnh bậc n thì $n\equiv 1$ hoặc 2 (mod 4) thì n là tổng bình của hai số nguyên.

Một vấn đề khác thú vị không kém đó là: làm sao ta có thể nhận ra được các mặt phẳng xạ ảnh $\mathrm{PG}(2,q)$ với q là lũy thừa của một số nguyên tố?

Thật ngạc nhiên là ta có sự gợi ý đến từ các định lý cổ điển của Desargues và Pappus.

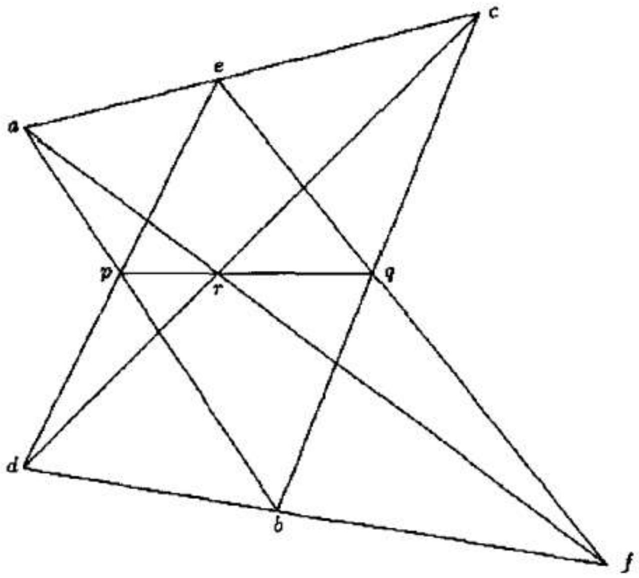
Định lý Desargues.

Cho $a_1b_1c_1$ và $a_2b_2c_2$ là các tam giác trong mặt phẳng xạ ảnh π sao cho các đường thẳng a_1a_2, b_1b_2 và c_1c_2 đồng quy. Đặt $p = b_1c_1 \cap b_2c_2$, $q = c_1a_1 \cap c_2a_2$ và $r = a_1b_1 \cap a_2b_2$. Khi đó, p, q, r thẳng hàng.



Định lý Pappus

Cho a, b, c, d, e, f là các điểm của mặt phẳng xạ ảnh π sao cho a, c, e và b, d, f lần lượt đều thẳng hàng. Đặt $p = ab \cap de, q = bc \cap ef, r = cd \cap fa$. Khi đó p, q, r thẳng hàng.



Kết quả 9. Cho trước một mặt phẳng xạ ảnh π. Khi đó ta có các khẳng định sau:
- π đẳng cấu với $\mathrm{PG}(2, q)$ với q là lũy thừa của một số nguyên tố;
- định lý Desargues đúng trong mặt phẳng π;
- định lý Pappus đúng trong mặt phẳng π.

Bây giờ ta nghiên cứu mối liên hệ giữa các mặt phẳng xạ ảnh hữu hạn với lý thuyết về các hình vuông Latin. Đầu tiên, ta định nghĩa một cấu trúc hình học quan trọng liên quan mật thiết tới các khảo sát của ta.

Một không gian affine bậc q bao gồm một tập X gồm q^2 phần tử được gọi là các điểm và một tập $\mathcal{B}$ gồm các tập con q phần tử của tập X được gọi là các đường thỏa mãn tính chất hai điểm bất kỳ cùng nằm trên duy nhất một đường thẳng.

Hai đường thẳng phân biệt của một không gian affine có tối đa một điểm chung, không giống với không gian xạ ảnh các đường thẳng có thể hoàn toàn rời nhau. Ta gọi hai đường thẳng là song song nếu hai đường thẳng trùng nhau hoặc rời nhau.

Kết quả 10. Trong một không gian affine bậc q, ta có các khẳng định sau:

i) một điểm bất kỳ nằm trên chính xác $q+1$ đường thẳng;

ii) có chính xác $q(q+1)$ đường thẳng;

iii) (Tiên đề song song của Euclid) Cho một điểm p và một đường thẳng L thì có duy nhất một đường thẳng L' đi qua p và song song với L;

iv) Quan hệ song song là một quan hệ tương đương; mỗi lớp song song chứa q đường thẳng và các lớp này tạo thành một phân hoạch của tập các điểm.

Chứng minh. Chọn cố định một điểm p. Theo định nghĩa ta suy ra mặt phẳng affiine này chứa chính xác q^2-1 điểm khác thỏa mãn điều kiện mỗi điểm này đều nằm trên một đường thẳng đi qua điểm p mà mỗi đường thẳng đi qua p chứa $q-1$ điểm khác với q và không có hai đường thẳng chứa điểm bị trùng lặp lại khác điểm p nên ta suy ra có chính xác $\frac{q^2-1}{q-1}=q+1$ đường thẳng cùng đi qua điểm p.

Bằng phương pháp đếm bằng hai cách tương tự như ta đã thực hiện đối với mặt phẳng xạ ảnh ta cũng tính được số tất cả các đường thẳng bằng $\frac{q^2(q+1)}{q}=q(q+1)$.

Xem xét một điểm p và một đường thẳng L. Nếu $p\in L$ thì hiển nhiên L là đường thẳng duy nhất đi qua p và song song với chính nó. Không mất tính tổng quát giả sử $p\notin L$, khi đó hiển nhiên là bằng cách nối điểm p với các điểm của đường thẳng L ta nhận được q đường thẳng phân biệt cùng đi qua p. Mặt khác, do chỉ có chính xác $q+1$ đường thẳng phân biệt cùng đi qua q nên ta suy ra tồn tại một đường thẳng đi qua p nhưng song song với đường thẳng L, đpcm.

Từ định nghĩa của khái niệm song song của hai đường thẳng ta suy ra ngay được các tính chất phản xạ và đối xứng nên phần việc còn lại của ta là kiểm chứng tính chất bắc cầu của khái niệm này. Nói cách khác, nếu ta có hai đường thẳng L,L' cùng song song với một đường thẳng L'' thì chúng phải song song với nhau. Nhận xét rằng khẳng định vừa nêu làm hiển nhiên nếu như có hai trong ba đường thẳng này trùng với nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử rằng chúng đôi một rời nhau. Nếu L và L' có một điểm p chung ta suy ra chúng cùng đi qua p và song song với L'', điều này mâu thuẫn với tiên đề về tính song song của Euclid. Do đó, L và L'' rời nhau, đpcm.

Mỗi lớp tương đương sẽ chứa $\frac{q^2}{q}=q$ đường thẳng , do mỗi đường thẳng chứa chính xác q điểm và chúng phủ trên tất cả các điểm.

Nhận xét. Do có tổng cộng là $q(q+1)$ đường thẳng mà mỗi lớp song song chỉ cần chứa q đường nên ta cũng tính ra được số các lớp song song là $\frac{q(q+1)}{q}=q+1$.

Kết quả 11. Tồn tại một mặt phẳng xạ ảnh bậc q khi và chỉ khi tồn tại một mặt phẳng affine bậc q.

Chứng minh. Giả sử $(X,\mathcal{B})$ là một mặt phẳng xạ ảnh.

Gọi L là một đường thẳn bất kỳ, đặt $X_0=X\setminus L$ và $\mathcal{B}_0=\{L'\setminus L : L'\in\mathcal{B}, L'\neq L\}$, nói một cách nôm na là ta xóa đi một đường thẳng bất kỳ và bất cả các điểm nằm trên đường thẳng đó.

Bằng cách tính toán trực tiếp ta nhận ra rằng có chính xác $(q^2+q+1)-(q+1)=q^2$ điểm trong x_0; mỗi đường thẳng mới chứa $(q+1)-1=q$ điểm, do mọi đường thẳng khác với L giao với L tại duy nhất một điểm; hai điểm bất kỳ cùng nằm trên chính xác một đường thẳng. Do đó, $(X_0,\mathcal{B}_0)$ là một mặt phẳng affine.

Ngược lại, giả sử $(X_0,\mathcal{B}_0)$ là một mặt phẳng affine.

Đặt Y là tập gồm tất cả các lớp song song gồm trong mặt phẳng này.

Ta tiền hành xây dựng không gian $(X,\mathcal{B})$ như sau:

Đầu tiên, chọn tập điểm mới X là tập $X_0\cup Y$; khi đó $|X|=q^2+q+1$.

Với mọi đường thẳng $L\in\mathcal{B}_0$, đặt $L^*=L\cup\{C\}$ trong đó C là lớp song song chứa L; đồng thời xem Y như một đường thẳng mới.

Do đó, ta xây dựng được một không gian $(X,\mathcal{B})$, trong đó $\mathcal{B}=\{L^*:L\in\mathcal{B}_0\}\cup\{Y\}$.

Một đường thẳng mới bất kỳ có $q+1$ điểm, do đường thẳng này được tạo thành từ đường L cũ bổ sung thêm một điểm mới và có chính xác $q+1$ lớp song song. Ta sẽ chỉ ra rằng hai điểm bất kỳ thuộc X cùng nằm trên duy nhất một đường thẳng.

Ta xem xét một số trường hợp sau:

● hai điểm x, y thuộc X_0 cùng nằm trên duy nhất một đường thẳng cũ nên chúng cùng nằm trên duy nhất một đường thẳng mới thuộc loại 1;

● cho trước một điểm $x \in X_0$ và một lớp song song $C \in Y$, tồn tại duy nhất một đường thẳng cũ chứa x trong lớp song song C nên có duy nhất một đường thẳng mới thuộc loại 1 chứa cả x và C.

● hai lớp song song bất kỳ cùng nằm trên duy nhất một đường thẳng thuộc loại 2, đường thẳng Y.

Do đó, $(X, \mathcal{B})$ là một mặt phẳng xạ ảnh.

Quá trình mở rộng từ một mặt phẳng affine thành một mặt phẳng xạ ảnh vừa trình bày ở trên được gọi là "bổ sung thêm đường thẳng tại vô cực". Đường thẳng Y là đường thẳng tại vô cực và các điểm của nó được gọi là các điểm tại vô cực, các điểm mà tại đó các đường thẳng song song trong mặt phẳng affine gặp nhau. Đây cũng chính là quá trình biến một "mặt phẳng ảnh" thành một mặt phẳng xạ ảnh thực.

Nhắc lại một số định nghĩa về các hình vuông Latin bậc n:

Một hình vuông Latin bậc n là một ma trận vuông cấp n với các phần tử thuộc tập $\{1, 2, ..., n\}$ thỏa mãn tính chất mỗi phần tử này chỉ xuất hiện chính xác một lần trong mỗi hàng và mỗi cột.

Hai hình vuông Latin $A = (a_{ij})_{n\times n}$ và $B = (b_{ij})_{n\times n}$ được gọi là trực giao nếu với mọi cặp phần tử (k, l) được tạo ra từ $\{1, 2, ..., n\}$ có duy nhất một cặp giá trị i và j sao cho $a_{ij} = k, b_{ij} = l$.

Một tập $\{A_1, A_2, ..., A_r\}$ các hình vuông Latin bậc được gọi là các hình vuông Latin trực giao lẫn nhau (MOLS) nếu hai hình vuông bất kỳ trong tập này trực giao với nhau.

Dễ dàng nhận thấy rằng một tập các hình vuông Latin bậc n trực giao lẫn nhau không thể có nhiều hơn $n-1$ thành viên.

Kết quả 12. Tồn tại $(n-1)$ MOLS bậc n khi và chỉ khi tồn tại một mặt phẳng affine bậc n.

Chứng minh. Cho trước một tập $\{A_1, A_2, ..., A_r\}$ gồm các hình vuông Latin MOLS bậc n, ta sẽ xây dựng một cấu trúc hình học gồm các điểm và các đường có dạng gần với một mặt phẳng affine ta sẽ gọi là "mặt phẳng affine bộ phận".

Ta chọn các điểm là các ô của một mảng X kích thước $n \times n$ xác định bởi:

$$X = \{(i, j) : i, j = 1, ..., n\}.$$

Có ba lại đường thẳng:

a) đường thẳng loại 1 có dạng $\{(x, j) : x = 1, ..., n\}$ với j là một phần tử cố định, $j = 1, ..., n$;

b) đường thẳng loại 2 có dạng $\{(i, y) : y = 1, ..., n\}$ với i là một phần tử cố định, $i = 1, ..., n$;

c) đường thẳng loại 3 có dạng $\{(i, j) : (A_m)_{ij} = k\}$ với A_m và k cố định, $m = 1, ..., r$, $k = 1, ..., n$.

Hiển nhiên, có n^2 điểm và mỗi đường thẳng chứa n điểm.

Ta sẽ chứng minh rằng hai điểm bất kỳ nằm trên tối đa một đường thẳng.

Điều này là hiển nhiên đối với các đường thẳng loại 1 hoặc đường thẳng loại 2; từ định nghĩa của một hình vuông Latin ta suy hai điểm của một đường thẳng loại 3 nằm trên các hàng và các cột khác nhau. Hơn thế nữa, các đường thẳng loại 3 được tạo ra từ cùng một hình vuông A_m là rời nhau. Bây giờ ta xét hai đường thẳng loại 3 lần lượt được định nghĩa bởi hình vuông A_{m_1}, phần tử k_1 và hình vuông A_{m_2}, phần tử k_2. Nhận xét rằng chúng không thể giao nhau tại hai điểm (i_1, j_1) và (i_2, j_2), trong trường hợp ngược lại thì ở hai vị trí này hình vuông A_{m_1} và A_{m_2} sẽ lần lượt có các phần tử k_1 và k_2, điều này mâu thuẫn với tính trực giao.

Bây giờ ta cũng tính được rằng mỗi điểm p nằm trên chính xác $r+2$ đường thẳng: một đường loại 1, một đường loại 2, và r đường loại 3 với mỗi đường được xây dựng từ một hình vuông nào đó của tập $\{A_1, A_2, ..., A_r\}$. Các đường thẳng này chứa tổng cộng là $(r+2)(n-1)$ điểm khác với p.

Do đó, $1 + (r+2)(n-1) \le n^2$, hay $r \le n-1$.

Dấu “$=$” xảy ra khi và chỉ khi hai điểm bất kỳ nằm trên duy nhất một đường thẳng, hay nói cách khác cấu trúc hình học này là một mặt phẳng affine.

Ngược lại, giả sử tồn tại một mặt phẳng affine bậc n. Từ các kết quả đã nhận được, mặt phẳng này chứa n^2 điểm và $n+1$ lớp song song của các đường thẳng. Ta chọn ra hai lớp song song $\{H_1,...,H_n\}$ và $\{V_1,...,V_n\}$ gồm các đường thẳng, các đường thẳng này lần lượt đóng vai trò là các đường thẳng loại 1 và đường thẳng loại 2. Bây giờ, một điểm bất kỳ sẽ nằm trên duy nhất một đường thẳng H_j và duy nhất một đường thẳng V_i, nên ta sẽ cho tương ứng điểm này với bộ (i, j) và cũng gọi (i, j) là tọa độ của điểm đang xét.

Bây giờ ta xét tập $\{L_1,...,L_{n-1}\}$ là một lớp song song bất kỳ, và định nghĩa một ma trận A theo quy tắc $A_{ij} = k$ nếu và chỉ nếu $(i, j) \in L_k$. Dễ dàng kiểm tra được rằng đây là một hình vuông Latin. Hơn nữa, các ma trận thu được từ các lớp song song khác nhau sẽ trực giao với nhau. Do đó ta nhận được một tập gồm $(n-1)$ hình vuông Latin bậc n MOLS từ mặt phẳng affine đã cho.

Nhận xét. Cho trước một tập gồm r hình vuông Latin bậc n MOLS, một cấu trúc hình học có thể được xây dựng như ta trình bày trong phần chứng minh trên. Cấu trúc này chứa n^2 điểm, $n(r+2)$ đường thẳng, mỗi đường thẳng chứa n điểm, hai điểm nằm trên tối đa một đường thẳng và có $r+2$ lớp song song. Ta cũng sẽ gọi đây là một “mặt phẳng affine bộ phận”.

4. Một số loại hình học khác

Hình học hữu hạn là một lĩnh vực rộng lớn bao gồm nhiều loại hình học con và tất cả đều được xây dựng trên các tập hữu hạn bằng cách sử dụng các tiên đề trong hình học: không gian xạ ảnh, không gian affine, không gian bộ phận,... Do đó, trong bài viết này ta chỉ có thể nói sơ qua thêm về hai loại hình học khác có liên quan khá chặt chẽ với các không gian xạ ảnh.

Như ta có thể thấy trong quá trình khảo sát có một mối liên hệ giữa các mặt phẳng xạ ảnh và các mặt phẳng affine. Một cách tương tự, ta cũng có những mối liên hệ tương tự như trên cho các số chiều lớn hơn. Sau đây ta sẽ nói cụ thể hơn về vấn đề này, một không gian affine n chiều, ký hiệu bởi $\mathrm{AG}(n,q)$, trên trường $\mathrm{GF}(q)$ là một cấu trúc hình học thu được từ không gian xạ ảnh $\mathrm{PG}(n,q)$ bằng cách loại bỏ đi một siêu phẳng H, không gian con có codim bằng 1, và tất cả các không gian con nằm trong đó, siêu phẳng bị xóa đi thường được gọi là siêu phẳng tại vô cực.

Tương tự như trong trường hợp mặt phẳng ta sẽ dùng một hệ tọa độ để diễn đạt các tính toán. Giả sử không gian vector nền $V(n+1,q)$ bao gồm các vector với tọa độ $(x_1,...,x_{n+1})$ ta có thể chọn siêu phẳng tại vô cực có phương trình $x_{n+1} = 0$; khi đó tất cả các điểm hữu hạn đều có duy nhất một biểu diễn với $x_{n+1} = 1$, ta giả sử biểu diễn đó là $(x_1,...,x_n,1)$ nên ta có thể biểu diễn điểm này bởi bộ n phần tử $(x_1,...,x_n)$.

Lưu ý rằng một không gian affine $\mathrm{AG}(n,q)$ có thể được định nghĩa thông qua không gian vector $V = V(n,q)$ như sau:

Một $k-$ phẳng của không gian $\mathrm{AG}(n,q)$ chính là một lớp ghép của một không gian vector con W của V (khái niệm lớp ghép được hiểu theo nghĩa trong lý thuyết nhóm cho phép toán cộng các phần tử của $V = V(n,q)$ và lưu ý rằng phép toán cộng này có tính giao hoán).

Chẳng hạn như đối với các điểm: chỉ có duy nhất một không gian con 0 chiều là $\{0\}$ và các lớp ghép của nó đều có dạng $\{v\}$ nên thông thường ta thường đồng nhất chúng với các vector $v \in V$).

Bằng tính toán trực tiếp ta nhận thấy rằng số các $k-$phẳng là $q^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ (do có $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ cách để chọn một không gian vector con W; q^n cách để tạo ra một lớp ghép nhưng các lớp ghép được tạo ra từ các phần tử sai khác nhau một phần tử thuộc W thì sẽ bị trùng lại với nhau nên chỉ có q^{n-k} cách tạo ra các lớp ghép phân biệt) và một $k-$phẳng chứa q^k điểm.

Kết quả 13. Không gian xạ ảnh $AG(n,q)$ có q^n điểm, $q^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ k - phẳng và mỗi k - phẳng chứa q^k điểm.

Tiếp theo ta sẽ giới thiệu nói sơ qua về một lớp hình học khá thú vị được phát sinh trong quá trình nghiên cứu giữa các cấu trúc hình vuông Latin trực giao và các mặt phẳng affine.

Cho trước các số nguyên dương s,t,α. Một cấu trúc hình học bộ phận với các tham số s,t,α là một hệ thống gồm các điểm và các đường thỏa mãn các tính chất sau:

● mọi đường thẳng chứa chính xác $s+1$ điểm và một điểm bất kỳ nằm trên chính xác $t+1$ đường thẳng;

● hai điểm bất kỳ nằm trên tối đa là một đường thẳng (ta cũng có thể chứng minh được dễ dàng rằng điều này tương đương với hai đường thẳng bất kỳ giao nhau tối đa tại một điểm);

● nếu điểm p không nằm trên đường thẳng L thì có chính xác α điểm của α điểm của L thẳng hàng với p (hoặc nếu nói theo một cách tương đương thì có chính xác α đường thẳng qua p và đồng thời có giao với L)

Một nhận xét khá bổ ích cho ta là đối ngẫu của một cấu trúc hình học bộ phận với các tham số s,t,α là một cấu trúc hình học bộ phận với các tham số t,s,α (đối ngẩu được định nghĩa tương tự như khi ta thực hiện cho các mặt phẳng xạ ảnh). Chú ý rằng $1 \le \alpha \le \min(s,t)+1$.

Một trong những nguyên nhân thúc đẩy nghiên cứu các cấu trúc hình học bộ phận là nó bao gồm nhiều cấu trúc con hợp thành.

Sau đây ta sẽ xét hai trường hợp đặc biệt:

Một cấu trúc hình học bộ phận thỏa mãn hệ thức $\alpha = s+1$ sẽ có tính chất hai điểm bất kỳ nằm trên duy nhất một đường thẳng .

Thật vậy, với p và q là các điểm bất kỳ và L là một đường thẳng đi qua q, nếu L cũng đồng thời đi qua p thì từ tiên đề 3 và hệ thức $\alpha = |L|$ ta suy ra được rằng mọi điểm của L đều thẳng hàng với p.

Ngược lại, một cấu trúc hình học sao cho hai điểm bất kỳ nằm trên duy nhất một đường thẳng và mọi đường thẳng đều chứa cùng một số lượng điểm thì nó là một cấu trúc hình học bộ phận thỏa mãn $\alpha = s+1$. Những cấu trúc như vậy bao gồm: mặt phẳng xạ ảnh, mặt phẳng affine, bộ ba Steiner và các đồ thị đầy đủ,..

Một mặt phẳng affine bộ phận, thu được từ một họ gồm r hình vuông Latin bậc n MOLS, là một cấu trúc hình học bộ phận với $s=n-1, t=r-1, \alpha=r-1$ (Các tham số s và t là hiển nhiên. Bây giờ, nếu p là một điểm không nằm trên đường thẳng L thì mọi đường thẳng đi qua p đều có giao với L ngoại trừ duy nhất một đường thẳng song song với L).

Ngược lại, giả sử $\mathcal{G}$ là một cấu trúc hình học bộ phận với $\alpha = t$, đặt $n=s+1$ và $r=t+1$. Ta cũng nói rằng hai đường thẳng là song song nếu chúng bằng nhau hoặc rời nhau; nhận thấy rằng với một điểm p và một đường thẳng L cho trước có duy nhất một đường thẳng L' đi qua p song song với L. Dễ dàng kiểm tra được rằng quan hệ song song này là một quan hệ tương đương. Do mọi đường thẳng đều chứa n điểm và từ đây ta cũng suy ra được rằng mỗi lớp song song chứa n đường thẳng (do một đường thẳng không thuộc lớp song song này đều có một lần giao mỗi đường của lớp song song) nên có tất cả n^2 điểm .

Do đó, $\mathcal{G}$ là một mặt phẳng affine bộ phận.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Trương Phước Nhân, Bài toán thực tế và lý thuyết trường hữu hạn, 23/07/2017.
[2]. Trương Phước Nhân, BIBD, 02/02/2018.
[3]. Trương Phước Nhân, Cấu hình tổ hợp, 16/07/2018.
[4]. Trương Phước Nhân, Đồ thị strong regular, 16/07/2018.
[5]. Trương Phước Nhân, Không gian tuyến tính hữu hạn, 22/07/2017.
[6]. Trương Phước Nhân, Không gian tuyến tính hữu hạn – phần 2, 03/08/2017.
[7]. Trương Phước Nhân, Lý thuyết cấu hình tổ hợp, 02/02/2018.
[8]. Trương Phước Nhân, Mặt phẳng affine, 02/02/2018.
[9]. Trương Phước Nhân, Resolvable design, 06/02/2018.