

Đếm số cây khung bằng phương pháp gán nhãn cho đồ thị lưỡng phân đầy đủ

Trương Phước Nhân, 31/12/2018

Nội dung bài viết trình bày cách tính số cây khung của một đồ thị lưỡng phân đầy đủ bằng phương pháp gán nhãn và có sự kết hợp với công cụ hàm sinh.

Cho trước hai tập $A = \{1', 2', \dots, m'\}$, $B = \{1, 2, \dots, n\}$ và kí hiệu $K_{m,n}$ là đồ thị lưỡng phân đầy đủ với tập đỉnh $A \cup B$.

Để thuận tiện cho việc trình bày các phép chứng minh trong bài viết ta sẽ quy ước gọi một cây khung của đồ thị $K_{m,n}$ có gốc nằm trong tập B là $[m, n]$ -tree.

Giả sử T là một $[m, n]$ -tree và v^* là gốc của cây khung này.

Trọng số của một đỉnh v của cây khung T được xác định bởi $w(v) = d(v, v^*)$, trong đó $d(v, v^*)$ là khoảng cách giữa đỉnh v và v^* .

Trọng số của cây khung T được xác định bởi $w(T) = \max\{w(v) \mid v \in V(T)\}$.

Nếu cây T có $w(T)$ bằng 1 hoặc 2 thì ta sẽ gọi cây T lần lượt là 1-rooted tree và 2-rooted tree.

Một đỉnh v_0 bất kỳ của cây T có trọng số chẵn và không phải là một lá của cây T sẽ được gọi là IP.

Đặt

$$OV(v_0) = \{v \mid v \in V(T) \text{ sao cho đường đi xuất phát từ gốc } v^* \text{ đến đỉnh } v \text{ phải đi qua đỉnh } v_0\},$$

$$OVW(v_0) = \max\{d(v_0, v) \mid v \in OV(v_0)\}.$$

Nếu $OVW(v_0) = 1$ thì đỉnh v_0 được gọi là 1-IP, trong trường hợp $OVW(v_0) = 2$ thì đỉnh v_0 được gọi là 2-IP.

Kí hiệu $OVG(v_0)$ là đồ thị con của cây khung T cảm sinh bởi tập đỉnh $\{v \mid v \in OV(v_0), d(v_0, v) \leq 2\}$.

Một $[m, n]$ -tree có $(k-r)$ đỉnh 1-IP và r đỉnh 2-IP được gọi là một $[m, n, k, r]$ -tree.

Khi đó, 2-rooted tree là một $[m, n, 1, 1]$ -tree và 1-rooted tree là một $[m, 1, 1, 0]$ -tree.

1. Đếm số các $[m, n]$ -tree

Để thực hiện phép đếm số các $[m, n]$ -tree ta cần đến một kết quả phụ quan trọng sau:

Kết quả 1.

Tồn tại một song ánh giữa tập các $[m, n, k, r]$ -tree và tập các rừng gồm r 2-rooted tree và $(k-r)$ 1-rooted tree trong đó các đỉnh của rừng có trọng số bằng 2 được đánh số bởi các đỉnh $\{1, 2, \dots, n+k-1\}$, các đỉnh có trọng số bằng 1 được đánh số bởi các đỉnh $\{1', 2', \dots, m'\}$ và các gốc có đỉnh được đánh số bởi các đỉnh $\{1, 2, \dots, n\}$.

Chứng minh kết quả 1

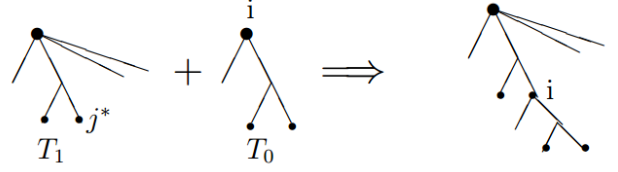
Đầu tiên, ta chỉ ra thuật toán để xây dựng một $[m, n, k, r]$ -tree từ một rừng gồm r 2-rooted tree và $(k-r)$ 1-rooted tree như sau:

- 1) Đánh dấu các đỉnh $n+1, n+2, \dots, n+r-1$ của rừng F bởi “*” còn các đỉnh $n+r, \dots, n+k-1$ bởi “#”.
- 2) Đặt F_0 là tập gồm các 2-rooted tree của rừng F và F_1 là tập gồm các 1-rooted tree của rừng F .

3) Tìm cây T_0 trong F_0 với gốc được đánh số nhỏ nhất sao cho không có đỉnh nào trong cây T_0 được đánh dấu “*”, ta tạm giả sử i là gốc được đánh số.

4) Tìm cây T_1 trong F_0 chứa đỉnh được đánh dấu “*” với giá trị nhỏ nhất, ta tạm giả sử j^* là đỉnh được đánh dấu.

5) Hợp cây T_0 và T_1 bằng cách đồng nhất đỉnh i với đỉnh j^* và đánh số lại đỉnh này bởi i .

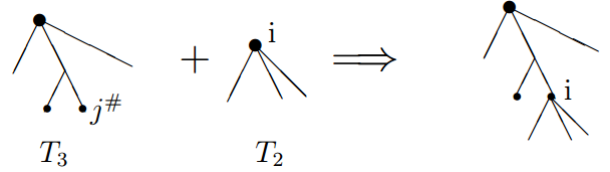


6) Lặp lại các bước (3), (4) và (5) cho đến khi rừng F không còn các đỉnh được đánh dấu “*”.

7) Tìm cây T_2 trong F_1 với gốc được đánh số nhỏ nhất, ta tạm giả sử i là gốc được đánh số.

8) Tìm cây T_3 trong F chứa đỉnh được đánh dấu “#” với giá trị nhỏ nhất, ta tạm giả sử $j^{\#}$ là đỉnh được đánh dấu.

9) Hợp cây T_2 và T_3 bằng cách đồng nhất đỉnh i với đỉnh $j^{\#}$ và đánh số lại đỉnh này bởi i .



10) Lặp lại các bước (7), (8) và (9) cho đến khi rừng F không còn các đỉnh được đánh dấu “#”.

Ngược lại, bằng cách đảo ngược lại quá trình trên ta nhận được một rừng từ một $[m, n, k, r]$ -tree, cụ thể:

1') Đặt $V_2 = \{v_1, \dots, v_r\}$ là r đỉnh $2-IP$,

và $V_1 = \{v_{r+1}, \dots, v_k\}$ là $(k-r)$ đỉnh $1-IP$.

2') Tìm trong tập V_1 đỉnh $1-IP$ có giá trị nhỏ nhất, ta tạm gọi đỉnh này là i .

3') Tách đồ thị con $OVG(i)$ và đánh số lại gốc i thành $(n+r)^{\#}$.

Khi đó, ta thu được 1-rooted tree với gốc i .

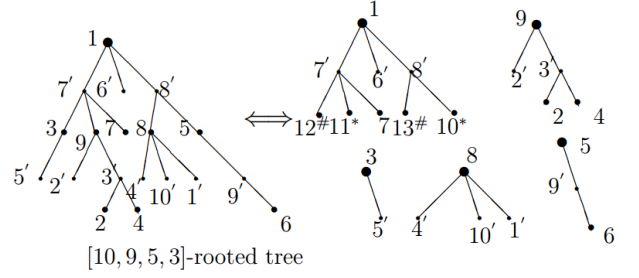
4') Lặp lại các bước (2), (3) và đánh số lại các đỉnh $1-IP$ bởi $(n+r+1)^{\#}, \dots, (n+k-1)^{\#}$ cho đến khi không còn đỉnh v trong tập V_1 sao cho $w(v) > 0$.

5') Tìm trong tập V_2 đỉnh $2-IP$ có giá trị nhỏ nhất, ta tạm gọi đỉnh này là i .

6') Tách đồ thị con $OVG(i)$ và đánh số lại đỉnh i thành $(n+1)^*$.

Khi đó, ta thu được 2-rooted tree với gốc i .

7') Lặp lại các bước (5), (6) và đánh số lại các đỉnh $2-IP$ bởi $(n+2)^*, \dots, (n+r-1)^*$ cho đến khi không còn đỉnh v trong tập V_2 sao cho $w(v) > 0$.



Đặt $T_{m,n}$ là số các $[m,n]$ -tree và xét hàm sinh mũ $T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{m,n} \frac{x^m y^n}{m! n!}$.

Kết quả 2. Hàm sinh mũ $T(x,y)$ thỏa mãn hệ thức $T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n^m m^{n-1} \frac{x^m y^n}{m! n!}$.

Chứng minh kết quả 2

Để thực hiện các phép tính trên hàm sinh mũ $T(x,y)$, ta chia hàm $T(x,y)$ thành hai hàm con như sau:

$$T(x,y) = T_1(x,y) + T_2(x,y),$$

trong đó $T_1(x,y)$ là hàm sinh mũ của các $[m,1]$ -tree, $T_2(x,y)$ là hàm sinh mũ của các $[m,n]$ -tree có trọng số lớn hơn 1.

Nhận xét rằng $T_1(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m y}{m!} = y(e^x - 1)$ và $\frac{T_1(x,y)}{y}$ là hàm sinh mũ của các 1-rooted tree với tập các gốc được cho trước.

Phần việc còn lại của ta là tính khai triển của hàm $T_2(x,y)$, như sau:

Đầu tiên, giả sử $T_{n-1}^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} T_{m,n-1}^* \frac{x^m}{m!}$ là hàm sinh mũ của các $[m,n]$ -tree có trọng số bằng 2 với tập các gốc được cho trước và giả sử thêm rằng số các đỉnh có trọng số bằng 1 và không phải là một lá là t ,
 Khi đó,

$$T_{n-1}^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\min\{m,n-1\}} \binom{m}{t} t! S(n-1, t) \frac{x^m}{m!},$$

trong đó $S(n-1, r)$ là số Stirling loại hai.

Bằng cách đặt $T_2(x,y) = \sum_{n=2}^{\infty} T_n(x) \frac{y^n}{n!}$, ta nhận thấy rằng hệ số của $\frac{x^m}{m!}$ trong khai triển của hàm $T_n(x)$ bằng số các $[m,n]$ -tree có trọng số lớn hơn 1.

Không mất tính tổng quát của vấn đề ta tạm giả sử số các IP của một $[m,n]$ -tree là k với $1 \leq k \leq n$ và số các $2-IP$ là r với $1 \leq r \leq \min\{n-1, k\}$.

Áp dụng kết quả 1: “Tồn tại một song ánh giữa tập các $[m, n, k, r]$ -tree và tập các rừng gồm r 2-rooted tree và $(k-r)$ 1-rooted tree”, nên công thức tính cho hàm $T_n(x)$ có dạng

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^N \sum_{n_1+n_2+\dots+n_r=n-1} T_{n_1}^*(x) \dots T_{n_r}^*(x) \left(\frac{T_1(x, y)}{y} \right)^{k-r},$$

trong đó $N = \min\{n-1, k\}$ và $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n-1$.

Bằng cách đặt $(T^*(x, n))^n = T_n^*(x)$,

$$\begin{aligned} e^{yT^*(x)} - 1 &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{T_{n-1}^*(x) y^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{t=1}^{\min\{m, n-1\}} \frac{S(n-1, t) x^m y^{n-1}}{(n-1)!(m-t)!} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{t=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n, t) x^m y^n}{n!(m-t)!} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{t=1}^m \frac{(e^y - 1)^t}{t!} \frac{m!}{(m-t)!} \frac{x^m}{m!} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left((e^y)^m - 1 \right) \frac{x^m}{m!} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(xe^y)^m}{m!} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \\ &= e^{xe^y} - e^x, \end{aligned}$$

nên hàm $T^*(x, n)$ không còn phụ thuộc vào n .

Để thuận tiện cho việc trình bày ta sẽ đơn giản kí hiệu $T^*(x, n)$ dưới dạng $T^*(x)$.

Nhận xét thêm rằng số các số hạng trong tổng $\sum_{n_1+n_2+\dots+n_r=n-1}$ bằng $\binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r} r! S(n-1, r)$.

(Do có $\binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r}$ cách để chọn ra gốc của các 2-rooted tree, 1-rooted tree của rừng và $r! S(n-1, r)$ cách để phân hoạch $n-1$ đỉnh có trọng số bằng 2 thành r khối để làm đỉnh của 2-rooted tree)

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^N \underbrace{\binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r} r! S(n-1, r)}_{\frac{n! S(n-1, r)}{(k-r)!(n-k)!}} (T^*(x))^{n-1} (e^x - 1)^{k-r}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó, } T_2(x, y) &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^{\min\{n-1, k\}} \frac{S(n-1, r)}{(k-r)!(n-k)!} (T^*(x))^{n-1} (e^x - 1)^{k-r} y^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^k \frac{S(n-1, r) (yT^*(x))^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(n-1)!(e^x - 1)^{k-r}}{(k-r)!(n-k)!} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^k \frac{\left(e^{yT^*(x)} - 1 \right)^r}{r!} \bigg|_{\{y, n-1\}} \frac{(e^x - 1)^{k-r} (n-1)! y}{(k-r)!(n-k)!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(e^{xe^y} - 1)^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \bigg|_{\{y, n-1\}} \frac{y}{n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (e^{nxe^y} - 1) \bigg|_{\{y, n-1\}} \frac{y}{n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^m x^m e^{my}}{m!} \bigg|_{\{y, n-1\}} \frac{y}{n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n^m m^{n-1} \frac{x^m y^n}{m! n!} \\
\Rightarrow T(x, y) &= T_1(x, y) + T_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n^m m^{n-1} \frac{x^m y^n}{m! n!}
\end{aligned}$$

2. Đếm số cây khung của K_n

Nhằm mục đích áp dụng kết quả vừa thu được ở trên cho đồ thị K_n ta sẽ đánh số lại các đỉnh của đồ thị K_n sao cho có r đỉnh có trọng số chẵn và $n-r$ đỉnh có trọng số lẻ. Từ định nghĩa của $T_{m,n}$ ta suy ra số các cây khung của đồ thị K_n với r đỉnh có trọng số chẵn bằng $\binom{n}{r} T_{n-r,r}$.

$$\text{Khi đó, } \kappa(K_n) = \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} T_{n-r,r} = \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} r^{n-r} (n-r)^{r-1} = n^{n-1}.$$

3. Đếm số cây khung của $K_{m,n}$

Từ định nghĩa của $T_{m,n}$ ta nhận thấy số cây khung với các đỉnh được gán nhãn và có gốc nằm trong A, B lần lượt bằng $T_{n,m}$ và $T_{m,n}$.

Khi đó, số cây khung được gán nhãn của đồ thị $K_{m,n}$ bằng $T_{n,m} + T_{m,n} = m^n n^{m-1} + n^m m^{n-1}$.

Do có $m+n$ đỉnh và ta có thể chọn bất kì một đỉnh nào để làm gốc của cây khung nên số cây khung của đồ thị $K_{m,n}$ bằng $\kappa(K_{m,n}) = \frac{m^n n^{m-1} + n^m m^{n-1}}{m+n} = m^{n-1} n^{m-1}$.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Yinglie Jin, Chunglin Liu, The enumeration of labelled spanning trees of $K_{m,n}$, Australasian Journal of Combinatorics, Volume 28 (2003), Pages 73-79.
- [2]. Trương Phước Nhân, Công thức tính số cây khung, 19/12/2018
- [3]. Trương Phước Nhân, Ứng dụng công thức Cauchy – Binet trong các bài toán về đồ thị, 28/12/2018.