Một số nguyên tắc cơ bản của phép đếm

Trương Phước Nhân, 02/06/2018

Trong một số vấn đề ta được cho trước một đồ thị G và ta cần đếm số các loại đồ thị con khác nhau hay số các loại đồ thị bộ phận thỏa mãn những điều kiện xác định nào đó thì một điều tất yếu và ta sẽ cần đến một công cụ đại số. Mục đích của bài viết này là ta sẽ đưa ra những nguyên tắc cơ bản nhất của phép đếm dưới dạng rất tổng quát.

1. Các phép thế của một tập hợp

Giả sử X là một tập hợp hữu hạn, ta gọi phép thế của tập hợp X là một ánh xạ 1-1 từ X lên X. Chẳng hạn, ánh xạ e mà $e(x)=x$ với mọi $x\in X$ là một phép thế, ta gọi đó là phép thế đơn vị. Nếu g là một phép thế của X thì ánh xạ ngược g^{-1} cũng là một phép thế của X. Nếu g và h là hai phép thế của X thì ánh xạ tích (còn gọi là ánh xạ hợp) gh được xác định bởi hệ thức $gh(x)=g\left[h(x)\right]$, cũng là một phép thế của X. Nếu g là một phép thế của X còn n là một số nguyên dương thì ánh xạ g^n được định nghĩa bởi $g^n(x)=\underbrace{ggg...g}_{n\text{ lần}}(x)$, cũng là một phép thế của X và được gọi là lũy thừa bậc n của phép thế g. Tương tự như vậy ánh xạ g^{-n} được định nghĩa bởi $g^{-n}(x)=\underbrace{g^{-1}g^{-1}g^{-1}...g^{-1}}_{n\text{ lần}}(x)$, cũng là một phép thế của X và được gọi là lũy thừa bậc trừ n của phép thế g. Thông thường ta quy ước $g^0=e$.

Nếu với hai phần tử $x,y\in X$ tồn tại một số nguyên n sao cho $y=g^n(x)$ thì ta viết $y\,\tau_g\,x$. Quan hệ τ_g là một quan hệ tương đương; bởi vì $x=g^0(x)$ (tính phản xạ), $y=g^n(x)\Leftrightarrow x=g^{-n}(y)$ (tính đối xứng) và nếu $y=g^n(x)$, $z=g^m(y)$ thì $z=g^{m+n}(x)$ (tính bắc cầu). Quan hệ τ_g được gọi là tương đương bắc cầu đối với phép thế g. Như ta đã biết, mỗi quan hệ tương đương trên tập hợp X xác định một phân hoạch tập X thành các lớp tương đương từng đôi một không giao nhau. Các lớp tương đương đối với τ_g được gọi là các lớp tương đương bắc cầu của phép thế g.

Chu trình của phép thế g là một phép thế thu được bằng cách thu hẹp g trên một trong các lớp bắc cầu của nó. Khi đó phép thế g là tích của các chu trình lấy theo thứ tự bất kỳ.

Nếu ρ là một quan hệ tương đương trên X thì tập hợp các lớp tương đương được gọi là tập hợp thương của X đối với ρ và ký hiệu là X/ρ. Nếu mỗi lớp tương đương $C\in X/\rho$ có cùng số phần tử thì người ta nói rằng quan hệ tương đương ρ là điều hòa. Phép thế g của tập hợp X được gọi là điều hòa nếu τ_g là quan hệ tương đương điều hòa.

2. Sự tương đương bắc cầu của nhóm các phép thế

Ta nói rằng tập hợp G các phép thế của tập hợp X lập thành một nhóm nếu

i. $e\in G$,

ii. $g,h\in G\Rightarrow gh\in G$,

iii. $g\in G\Rightarrow g^{-1}\in G$.

Chẳng hạn, tập hợp S_X gồm tất cả các phép thế của X là một nhóm và được gọi là nhóm đối xứng của X; tập hợp $\left\{e,g,g^2,g^3,....,g^{-1},g^{-2},...\right\}$ gồm tất cả các lũy thừa dương, âm của một phép thế g tạo thành một nhóm và được gọi là nhóm cyclic sinh bởi phép thế g.

Giả sử G là một nhóm các phép thế của tập hợp X, nếu với hai phần tử $x,y\in X$ có tồn tại một phép thế $g\in G$ sao cho $y=g(x)$ thì ta viết là $y\,\tau_G\,x$. Quan hệ τ_G là tương đương; bởi vì $x=e(x),e\in G$ (tính phản xạ), $y=g(x),g\in G\Rightarrow x=g^{-1}(y),g^{-1}\in G$ (tính đối xứng) và nếu $y=g(x),z=h(y)$ với $g,h\in G$ thì $z=gh(y),hg\in G$ (tính bắc cầu).

Quan hệ τ_G gọi là tương đương bắc cầu của nhóm G còn các lớp tương đương tương ứng gọi là các lớp tương đương bắc cầu của nhóm G.

Nếu chỉ có một lớp bắc cầu thì lớp đó trùng với cả tập hợp X, trong trường hợp đó ta nói rằng G là nhóm bắc cầu.

Nếu g là một phép thế của X còn G là nhóm cyclic sinh bởi g thì hiển nhiên quan hệ tương đương bắc cầu của G là đồng nhất với quan hệ tương đương bắc cầu của G; phép thế g có một chu trình khi và chỉ khi nhóm cyclic sinh bởi g là bắc cầu.

3. Số lớp bắc cầu

Giả sử g là một phép thế nào đó của X, ta đặt $X_g = \{x \mid x \in X, g(x) = x\}$. Nếu G là nhóm các phép thế của X và x là một phần tử tùy ý của X thì ta đặt .$G_x = \{g \mid g \in G, g(x) = x\}$.

Ta có thể dễ dàng kiểm tra trực tiếp được rằng G_x là một nhóm con của nhóm G. Ta hãy đếm số phần tử của tập hợp thương X / τ_G theo các $|X_g|$ khác nhau với $g \in G$.

Bổ đề 1. Giả sử G là một nhóm các phép thế của tập hợp X và nếu G_x là một nhóm con của G gồm các phép thế của nhóm G sao cho phần tử $x \in X$ là bất biến thì ta có $|\tau_G(x)| = \dfrac{|G|}{|G_x|}$, trong đó $\tau_G(x)$ là lớp bắc cầu của nhóm G chứa phần tử x.

Chứng minh. Đầu tiên, ta xác định ánh xạ đơn trị φ_x của nhóm G vào tập X như sau: $\varphi_x(g) = g(x)$ với $g \in G$.

Ta có $\varphi_x(G) = \tau_G(x)$ và ngoài ra $\varphi_x(g) = \varphi_x(h) \Leftrightarrow g(x) = h(y) \Leftrightarrow h \in gG_x$.

Nói cách khác đi φ_x là tương ứng 1-1 giữa $G / \varphi_x^{-1}\varphi_x$ và G / G_x. Nhưng ta biết rằng bản thân $G / \varphi_x^{-1}\varphi_x$ tương ứng 1-1 với $\varphi_x(G) = \tau_G(x)$. Vậy bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 2. Nếu x và y là hai phần tử thuộc cùng một lớp bắc cầu của nhóm G thì $|G_x| = |G_y|$.

Chứng minh. Thật vậy, với $y = g(x), g \in G$ ta có thể viết lại:

$$G_y = G_{g(x)} = \{h \mid h \in G, hg(x) = g(x)\} = \{h \mid h \in G, g^{-1}hg(x) = x\}.$$

Hơn nữa, ta có:

$$g^{-1}G_x g = \{h \mid h \in G: \text{ tồn tại một } k \in G_x \text{ sao cho } h = g^{-1}kg\} = \{h \mid h \in G: ghg^{-1}(x) = x\},$$

nghĩa là ta có $G_y = gG_x g^{-1}$.

Nhưng ta đã biết rằng nếu A là một tập hợp con bất kỳ của nhóm G và nếu $g, h \in G$ thì $|gAh| = |A|$, bởi vì $ga_1h = ga_2h \Rightarrow a_1h = a_2h \Rightarrow a_1 = a_2$. Như vậy bổ đề được chứng minh.

Định lý cơ bản. Giả sử G là một nhóm các phép thế của tập hợp X. Khi đó ta có $|X / \tau_G| = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |X_g|$.

Chứng minh. Thật vậy ta thực hiện đếm bằng hai cách số các cặp (g, x) sao cho $g(x) = x$ ta thu được đẳng thức sau

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X_g|. \ (1)$$

Nhưng

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{C \in X/\tau_G} \sum_{c \in C} |G_c|. \ (2)$$

Ta xét một lớp bắc cầu $C \in X / \tau_G$ và một phần tử $x \in C$, theo Bổ đề 2 thì $\sum_{c \in C} |G_c| = |\tau_G(x)|.|G_x|$.

Theo Bổ đề 1 thì $|\tau_G(x)| = \dfrac{|G|}{|G_x|}$.

Vậy: $\sum_{c \in C} |G_c| = |G|$, đẳng thức (2) có thể viết lại dưới dạng $\sum_{x \in X} |G_x| = |X / \tau_G|.|G|$. (2')

Từ (1) và (2') ta nhận được công thức cần chứng minh.

4. Phân hoạch số tự nhiên & quan hệ tương đương

Ta gọi một ánh xạ đơn trị a từ tập hợp $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\}$ gồm các số tự nhiên vào tập hợp tất cả các số tự nhiên là một phân hoạch (theo nghĩa của lý thuyết số); một phân hoạch cho tương ứng các số $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$ với các số $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ và thường được ký hiệu là $a=\left(\lambda_1^{\alpha_1},\lambda_2^{\alpha_2},...,\lambda_s^{\alpha_s}\right)$.

Ta gọi trọng lượng của phân hoạch a là số nguyên $w(a)=\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+...+\alpha_s\lambda_s$.

Ta gọi độ dài của phân hoạch a là số nguyên $d(a)=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_s$.

Giả sử ρ là quan hệ tương đương trên tập hợp X còn φ là ánh xạ 1-1 từ X lên Y; khi đó ánh xạ đa trị $\varphi\rho\varphi^{-1}$ từ tập hợp Y vào chính nó xác định một quan hệ tương đương trên Y mà các lớp $\varphi\rho\varphi^{-1}(y)$ của nó là các ảnh của các lớp tương đương của ρ.

Hai quan hệ tương đương ρ và σ xác định tương ứng trên các tập hợp X và Y gọi là liên hợp với nhau nếu tồn tại một ánh xạ 1-1 φ sao cho $\sigma=\varphi\rho\varphi^{-1}$.

Phân hoạch tương ứng với quan hệ tương đương ρ là phân hoạch $p[\rho]=\left(\lambda_1^{\alpha_1},\lambda_2^{\alpha_2},...\right)$, trong đó có α_1 lớp chứa λ_1 phần tử, α_2 lớp chứa λ_2 phần tử, v.v... Trọng lượng của $p[\rho]$ bằng $|X|$ còn độ dài của nó bằng $|X/\rho|$. Dễ dàng chứng minh được kết quả sau:

Kết quả 1. Các quan hệ tương đương ρ và σ xác định tương ứng trên các tập hợp X và Y là liên hợp với nhau khi và chỉ khi các phân hoạch tương ứng của chúng là đồng nhất như nhau.

5. Chỉ số chu trình

Khái niệm phân hoạch tương ứng với quan hệ tương đương cho phép ta phát biểu định lý cơ bản dưới một dạng mới. Đầu tiên ta đưa ra khái niệm về chỉ số do G.Polya đề xướng.

Giả sử G là nhóm các phép thế của tập hợp X còn a là một phân hoạch có trọng lượng $w(a)=|X|$; ta ký hiệu $h_G(a)$ là số các phép thế $g\in G$ sao cho $p\left[\tau_g\right]=a$. Ta gọi chỉ số chu trình của nhóm G là hàm q_G cho tương ứng mỗi phân hoạch a với một số: $q_G(a)=\dfrac{h_G(a)}{|G|}$.

Bổ đề 3. Nếu $g\in G$ thì $|X_g|=p\left[\tau_g\right](1)$, trong đó $p\left[\tau_g\right](1)$ là số các lớp của quan hệ tương đương τ_g đã rút gọn về một phần tử, tức là số các lớp, mà mỗi lớp gồm một phần tử của X bất biến đối với g.

Cách phát biểu mới của định lý cơ bản.

Nếu G là nhóm các phép thế của tập hợp X thì $|X/\tau_G|=\sum\limits_{w(a)=|X|}q_G(a)a(1)$.

Thật vậy, $|X/\tau_G|=\dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}|X_g|=\dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}p\left[\tau_g\right](1)=\dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{w(a)=|X|}h_G(a)a(1)=\sum\limits_{w(a)=|X|}q_G(a)a(1)$.

5. Ánh xạ đơn trị liên hợp

Giả sử f là một ánh xạ đơn trị của tập hợp X vào tập hợp Y, ánh xạ $f^{-1}f$ xác định một quan hệ tương đương trên X, đồng thời lớp $f^{-1}f(x)$ là tập hợp các phần tử của X có cùng một ảnh với x, ta nói rằng f là một ánh xạ loại a nếu $p\left[f^{-1}f\right]=a$.

Giả sử f_1 là ánh xạ đơn trị của một tập hợp X_1 lên một tập hợp Y_1, còn f_2 là ánh xạ đơn trị của một tập hợp X_2 lên một tập hợp Y_2; ta nói rằng f_1 và f_2 liên hợp với nhau nếu tồn tại một ánh xạ 1-1 φ của tập hợp X_1 lên X_2 và ánh xạ 1-1 ψ của tập hợp Y_1 lên Y_2 sao cho $f_2\varphi=\psi f_1$.

Kết quả 3. Hai ánh xạ đơn trị f_1 và f_2 là liên hợp với nhau khi và chỉ khi $p\left[f_1^{-1}f_1\right]=p\left[f_2^{-1}f_2\right]$.

Kết quả 4. Để cho hai ánh xạ đơn trị f_1 và f_2 của các tập hợp X_1 và X_2 vào Y là liên hợp với nhau chỉ cần tồn tại ánh xạ 1-1 của tập hợp X_1 lên X_2 sao cho $f_2\varphi=f_1$.

6. Bậc của một ánh xạ đơn trị

Giả sử f là một ánh xạ đơn trị của tập hợp hữu hạn X lên tập hợp Y; ta gọi bậc của ánh xạ f là ánh xạ δf cho tương ứng số các phần tử của tập hợp $f^{-1}(y)$ với mỗi phần tử $y \in Y$.

Kết quả 5. Hai ánh xạ f_1 và f_2 của tập hợp X_1 và X_2 vào Y có cùng bậc khi và chỉ khi tồn tại ánh xạ 1-1 φ của tập hợp X_1 lên X_2 sao cho $f_2\varphi = f_1$.

Đặc biệt, từ $\delta f_1 = \delta f_2$ suy ra rằng f_1 và f_2 có cùng một ảnh và liên hợp với nhau.

Từ điều kiện trên ta suy ra ánh xạ f là ánh xạ loại a khi và chỉ khi $\delta\delta f = a$, tức là khi a là phân hoạch tương ứng với δf.

Kết quả 6. Nếu ánh xạ f là loại a thì ánh xạ δf là loại δa.

Chứng minh. Từ $\delta\delta f = a$ ta suy ra $\delta\delta\delta f = \delta a$.

Giả sử v là một ánh xạ đơn trị của tập hợp hữu hạn X vào tập hợp các số tự nhiên; ta gọi độ dài của v là số $d(v) = \sum_{x \in X} v(x)$ (trong trường hợp v là phân hoạch thì ta lại có khái niệm "độ dài" của một phân hoạch)

Kết quả 7. $d(v) = w(\delta v)$ và $|X| = d(\delta v)$

Từ đó suy ra rằng nếu f là một ánh xạ đơn trị loại a từ X vào Y thì $|X| = w(a), |f(X)| = d(a)$.

7. Từ và từ Abel

Ta sẽ gọi từ là một dãy hữu hạn các phần tử của một tập hợp X cho trước. Ta gọi loại của từ m là phân hoạch $a = \left(\lambda_1^{\alpha_1}, \lambda_2^{\alpha_2}, ..., \lambda_s^{\alpha_s}\right)$ chỉ rõ ràng có α_1 phần tử của X có mặt trong m đúng λ_1 lần, α_2 phần tử của X có mặt trong m đúng λ_2 lần v.v... Như vậy số phần tử của X có mặt trong m là $d(a)$, đồng thời độ dài của từ là $w(a)$.

Nếu một từ được xem như không phụ thuộc vào thứ tự sắp xếp các phần tử của X có trong nó thì người ta nói rằng đó là một từ Abel.

Sau này ta kí hiệu $M(X)$ là tập hợp các từ chứa mỗi phần tử của X ít nhất một lần và $M_a(X)$ là tập hợp tất cả các từ loại a của $M(X)$; $M_v(X)$ là tập hợp tất cả các từ của $M(X)$ mà từ Abel của chúng là v; $M_k(X)$ là tập hợp các từ của $M(X)$ có độ dài k. Ký hiệu I_k là khoảng $\{1, 2, ..., k\}$.

Cuối cùng, giả sử G là nhóm các phép thế của tập hợp I_k và giả sử $g \in G$. Ký hiệu $\overline{g}$ là phép thế của tập hợp $M_k(X)$ xác định bằng cách sau đây: $\overline{g}(m) = mg$ $(m \in M_k(X))$.

Kết quả 8. Tập hợp $\overline{G}$ các phép thế $\overline{g}$ lập thành một nhóm, gọi là khuyếch trương của G lên $M_k(X)$.

Chứng minh. Nếu g và h là hai phép thế của tập hợp I_k thì $\overline{gh^{-1}} = \overline{h^{-1}}.\overline{g} = \left(\overline{h}\right)^{-1}.\overline{g}$.

Nếu a là một phân hoạch đã cho thì tập hợp $M_a(X)$ các từ loại a được lập lên từ X và chứa tất cả các phần tử của X là hợp của các tập hợp con không giao nhau từng đôi lập lên từ $M_v(X)$, trong đó v có bậc a: $M_a(X) = \bigcup_{\delta v = a} M_v(X)$. (3)

Còn có một phương pháp khác để phân tích $M_a(X)$.

Thật vậy, xét quan hệ tương đương ρ trên tập hợp các số nguyên $\{1, 2, ..., s-1, s\}$ và ký hiệu $M_\rho(X)$ là tập hợp tất cả các $m \in M(X)$ mà $m^{-1}m = \rho$. Khi đó $M_a(X)$ là tập hợp của các các tập hợp con không giao nhau từng đôi lập lên từ các $M_\rho(X)$, trong đó ρ có phân hoạch a: $M_a(X) = \bigcup_{p[\rho] = a} M_\rho(X)$. (4)

Từ hai phương pháp phân tích (3) và (4) ta suy ra một phân tích "mịn hơn":

$$M_a(X) = \bigcup_{\substack{\delta v = a \\ p[\rho] = a}} \left(M_v(X) \cap M_\rho(X)\right). \quad (5)$$

Ký hiệu $M_{v,g}(X)$ là tập hợp tất cả các từ $m \in M_v(X)$ sao cho: $m^{-1}m \supset \tau_g$.

$M_g(X)$ là hợp của các tập M_ρ với mọi quan hệ tương đương ρ thỏa mãn điều kiện $\rho \supset \tau_g$.

Khi đó: $M_{v,g}(X) = M_v(X) \cap M_g(X)$.

Kết quả 9. Nếu cho g là phép thế của khoảng $I_k = \{1, 2, ..., k\}$ thì tập hợp các từ $m \in M_k(X)$ bất biến đối với phép thế $\overline{g}$ là $M_g(X)$.

Chứng minh.

$$\overline{g}(m) = m \Leftrightarrow mg = m$$
$$\Leftrightarrow mg(i) = m(i) \text{ với mọi } i \in I_k$$
$$\Leftrightarrow g(i) \in m^{-1}m(i) \text{ với mọi } i \in I_k$$
$$\Leftrightarrow g^n(i) \in m^{-1}m(i) \text{ với mọi } i \in I_k \text{ và với mọi } n \text{ nguyên}$$
$$\Leftrightarrow \tau_g(i) \in m^{-1}m(i) \text{ với mọi } i \in I_k$$
$$\Leftrightarrow \tau_g \in m^{-1}m.$$

Điều này chứng minh kết quả trên.

Hệ quả. Đối với phép thế g đã cho của khoảng I_k thì tập hợp các từ của $M_v(X)$ bất biến đối với $\overline{g}$ là $M_{v,g}(X)$.

Kết quả 10. Giả sử v là từ Abel gồm các phần tử của X, có độ dài $d(v) = k$ và giả sử G là một nhóm các phép thế của khoảng I_k. Giả sử $\overline{G}$ là khuyếch trương của G lên $M_v(X)$.

Khi đó: $\left|M_v(X)/\tau_{\overline{G}}\right| = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\left|M_{v,g}(X)\right|$.

Theo Kết quả 5, tập hợp tất cả các ánh xạ f từ tập hợp X vào Y mà có cùng bậc và thỏa mãn điều kiện $f^{-1}f \supset \rho$, trong đó ρ là quan hệ tương đương đã cho, sẽ nhận được bằng cách nhân một trong số những ánh xạ ấy vào bên phải với phép thế φ mà $\varphi\rho\varphi^{-1} = \rho$. Nhận xét đó chỉ ra rằng $\left|M_{v,g}(X)\right|$ chỉ phụ thuộc vào δv và $p[g]$. Bởi vậy ta đặt $\left|M_{v,g}(X)\right| = \Phi(\delta v, p[g])$.

Kết quả 11. Giả sử v là một từ Abel trên X có độ dài $d(v) = k$ và giả sử G là nhóm các phép thế của khoảng I_k. Giả sử $\overline{G}$ là khuyếch trương của G lên $M_v(X)$.

Khi đó: $\left|M_v(X)/\tau_{\overline{G}}\right| = \sum_{w(a)=k} q_G(a)\Phi(\delta v, p[g])$.

Chứng minh.

$$\left|M_v(X)/\tau_{\overline{G}}\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\left|M_{v,g}(X)\right|$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\Phi(\delta v, p[g])$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{w(a)=k}\ \sum_{p[\tau_g]=a}\Phi(\delta v, a)$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{w(a)=k} h_G(a)\Phi(\delta v, a)$$
$$= \sum_{w(a)=k} q_G(a)\Phi(\delta v, a).$$

Trước khi chỉ ra rằng tại sao kết quả này dùng làm cơ sở cho các phép đếm, ta xét vài trường hợp riêng

Ta gọi hệ số đa thức là hàm c cho tương ứng mỗi phân hoạch $a = \left(\lambda_1^{\alpha_1}, \lambda_2^{\alpha_2}, ..., \lambda_s^{\alpha_s}\right)$ với số $c(a) = \dfrac{(\alpha_1\lambda_1 + ... + \alpha_s\lambda_s)!}{(\lambda_1!)^{\alpha_1}...(\lambda_s!)^{\alpha_s}}$. Dễ dàng thấy rằng số các ánh xạ của tập hợp X lên tập hợp Y có bậc v đã cho là bằng $c(\delta v)$. Nhưng số đó trùng với số các từ m bậc v mà $x \in m^{-1}m(x)$. Vậy $|M_v(X)| = c(\delta v)$, $\Phi(a, 1^w) = c(a)$. Vì $M_v(X) \cap M_\rho(X) = \varnothing$ khi $d(v) < d(p[\rho])$ nên ma trận $\Phi(a,b)$ là ma trận tam giác.

Ta đưa ra hàm phân hoạch $\chi(a)$ được định nghĩa là $\chi(a) = c(\delta a)$. Dễ dàng thấy rằng $\chi(a)$ biểu thị số các từ Abel bậc bằng a.

Ta cũng đưa ra hàm phân hoạch $\varepsilon(a)$ bằng cách đặt $\varepsilon(a) = \frac{c(a)\chi(a)}{d(a)!} = \frac{(\alpha_1\lambda_1 + ... + \alpha_s\lambda_s)!}{(\lambda_1!)^{\alpha_1}...(\lambda_s!)^{\alpha_s}\alpha_1!...\alpha_s!}$. Dễ dàng thấy rằng $\varepsilon(a)$ biểu thị số quan hệ tương đương ρ mà $p[\rho] = a$.

8. Thí dụ

Bài toán. Có 6 quả cầu: 3 quả màu đỏ, 2 quả màu đen, 1 quả màu trắng, các quả cầu cùng màu thì không phân biệt. Hỏi có bao nhiêu cách bố trí các quả cầu ấy tại các đỉnh của một khối bát diện tự do trong không gian ?

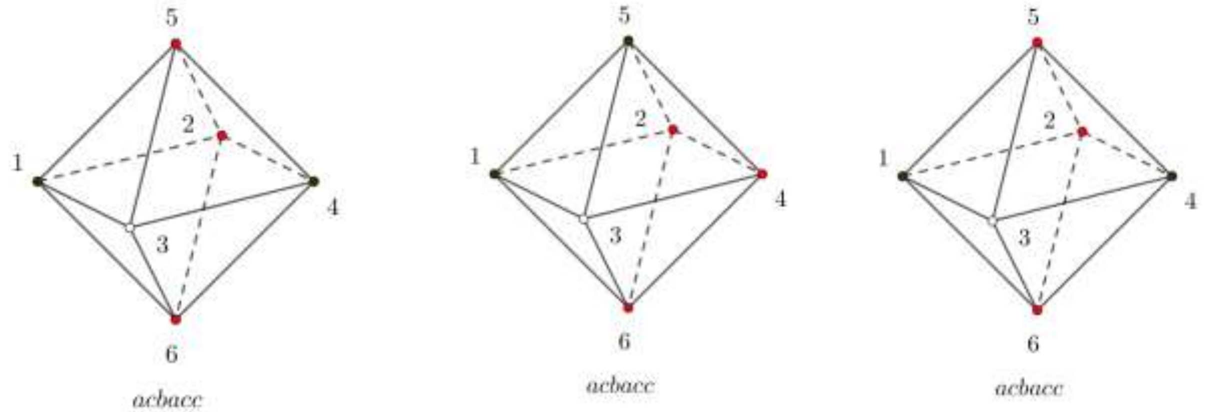
Đầu tiên ta giả thiết ngược lại với đầu đề rằng khối bát diện cố định trong không gian. Giả sử $X = \{a,b,c\}$, trong đó a chỉ màu đen, b chỉ màu trắng, c chỉ màu đỏ. Khi đó tồn tại một tương ứng 1-1 giữa các cách sắp xếp khác nhau các quả cầu với các từ bậc v, trong đó v là từ Abel: $v = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Bởi vậy lời giải cho câu hỏi trong trường hợp khối bát diện cố định là

$$|M_v(X)| = c(\delta v) = c(1,2,3) = \frac{6!}{1!2!3!} = 60.$$

Bây giờ ta xét khối bát diện tự do trong không gian, ở đây tồn tại tương ứng 1-1 giữa các cách sắp xếp khác nhau các quả cầu và các lớp bắc cầu của các từ bậc v đối với nhóm G các di chuyển khác nhau của khối bát diện. Lời giải của câu hỏi lần này là $|M_v(X)/\tau_{\overline{G}}| = \sum_{w(a)=6} q_G(a)\Phi[(1,2,3),a]$.

Bây giờ ta phải tìm chỉ số chu trình q_G cho nhóm G của khối bát diện. Ta đánh số các đỉnh của nó bằng các số từ 1 đến 6 như trên hình vẽ và ta đếm tất cả các phần tử của G.



Chỉ có một phép thế $g \in G$ mà $p[\tau_g] = (1^6)$, đó chính là phép thế đồng nhất.

Có 6 phép thế $g \in G$ mà $p[\tau_g] = (1^2, 4)$; chúng được lập ra bằng 6 phép quay một góc 90^0 quanh một đường chéo, đó là $(4516),(6154),(1243),(3421),(2536),(6352)$.

Có 3 phép thế $g \in G$ mà $p[\tau_g] = (1^2, 2^2)$; chúng được lập ra bằng 3 phép quay 180^0 xung quanh một đường chéo, đó là $(41)(56),(14)(23),(23)(56)$.

Có 6 phép thế $g \in G$ mà $p[\tau_g] = (2^3)$; chúng được lập ra bằng phép quay 180^0 xung quanh đường thẳng đi qua các điểm giữa của hai cạnh đối diện, đó là

$$(12)(34)(56),(13)(24)(56),(14)(25)(36),$$
$$(14)(35)(26),(15)(46)(23),(16)(45)(23).$$

Có 8 phép thế $g \in G$ mà $p\left[\tau_g\right] = \left(3^2\right)$; chúng được lập ra bằng 8 phép quay 120^0 quanh đường thẳng đi qua các điểm giữa của các mặt đối diện.

24 phép thế vừa nêu lập thành nhóm G các di chuyển của khối bát diện đều.

Bởi vậy: $q_G\left(1^6\right) = \frac{1}{24}, q_G\left(1^2,4\right) = \frac{6}{24}, q_G\left(1^2,2^2\right) = \frac{3}{24}, q_G\left(2^3\right) = \frac{6}{24}, q_G\left(3^2\right) = \frac{8}{24}$. Các giá trị q_G còn lại bằng 0.

Ngoài ra, ta biết rằng

$\Phi\left[(1,2,3),\left(1^6\right)\right] = c(1,2,3) = 60$;

$\Phi\left[(1,2,3),\left(1^2,4\right)\right] = 0$ vì từ Abel a^2bc^3 không chứa một phần tử nào bậc bốn;

$\Phi\left[(1,2,3),\left(1^2,2^2\right)\right] = 4$ vì từ Abel a^2bc^3 có thể viết theo bốn cách khác nhau:

$$(b)(c)\left(a^2\right)\left(c^3\right);(b)(c)\left(c^2\right)\left(a^2\right);(c)(b)\left(a^2\right)\left(c^2\right);(c)(b)\left(c^2\right)\left(a^2\right);$$

$\Phi\left[(1,2,3),\left(2^3\right)\right] = 0$ bởi vì từ Abel a^2bc^3 không chứa ba phần tử bậc hai;

$\Phi\left[(1,2,3),\left(3^2\right)\right] = 0$ bởi vì từ Abel a^2bc^3 không chứa hai phần tử bậc ba.

Vậy $\left|M_v(X)/\tau_{\overline{G}}\right| = \frac{60}{24} + \frac{3}{24}.4 = 3$.

Do đó lời giải cho bài toán đặt ra là: chỉ có ba cách khác nhau sắp 3 quả cầu đỏ, 2 quả cầu đen và 1 quả cầu trắng trên một khối bát diện tự do trong không gian.

Tài liệu tham khảo

[1]. Claude Berge, Lý thuyết đồ thị và ứng dụng, bản dịch tiếng Việt của Nguyễn Hữu Nguyên – Nguyễn Văn Vy, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ Thuật.

[2]. Trương Phước Nhân, Bài toán đếm các cấu hình đối xứng, 15/02/2018.