Cơ sở của hàm sinh

Trương Phước Nhân, 31/07/2018

Cho trước một dãy $(a_0, a_1, ...)$, ta cho tương ứng dãy này với hàm sinh $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$

Lưu ý rằng ta có thể xem nó như một phần tử của vành các chuỗi lũy thừa hình thức theo x (cách tiếp cận này ta sẽ sử dụng nhiều về lâu về dài), hoặc ta cũng có thể xem nó như một chuỗi lũy thừa thông thường theo biến phức x (cách tiếp cận này phù hợp cho người mới làm quen). Khi ta xem $A(x)$ như một chuỗi lũy thừa thông thường thì ta phải quan tâm đến tính hội tụ của chuỗi; ta sẽ vượt qua khó khăn này bằng cách giả sử rằng giá trị của x chỉ nằm trong miền hội tụ của $A(x)$ (do phần lớn các hàm sinh mà ta gặp đều có bán kính hội tụ khác 0). Trong suốt bài viết này, nhiều khi ta phải thực hiện các phép nhân các hàm sinh hoặc thực hiện các phép biến đổi trên các số hạng của chuỗi (chẳng hạn như lấy đạo hàm, tích phân) thì việc giả sử nêu ở trên là lý do tốt nhất để biện minh cho việc thực hiện các phép toán của ta.

Sau đây ta sẽ sử dụng hàm sinh để giải quyết một lớp bài toán kinh điển trong lý thuyết tổ hợp, cụ thể đó chính là bài toán tìm công thức tổng quát của dãy truy hồi tuyến tính cấp k.

Một dãy truy hồi tuyến tính bậc k là một dãy thỏa mãn $a_n = c_1a_{n-1} + ... + c_ka_{n-k}\,(n \ge k)$ trong đó c_i là các hằng số và $c_k \ne 0$ với các giá trị đầu $a_0, ..., a_{k-1}$ được cho trước.

Trước khi trình bày các kết quả tổng quát về bài toán này ta sẽ khảo sát một trường hợp rất đặc biệt, đó chính là dãy số Fibonacci được định nghĩa bởi $f_0 = 0, f_1 = 1$ và $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Đầu tiên ta bắt đầu bằng cho tương ứng dãy $(f_n)_{n\ge 0}$ dưới dạng $F(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + ...$

Nhận thấy,
$$\begin{aligned}F(x) &= x + (f_1 + f_0)x^2 + (f_2 + f_1)x^3 + ...\\
&= x + (f_1x^2 + f_2x^3 + ...) + (f_0x^2 + f_1)x^3 + ...\\
&= x + x(f_1 + f_2x^2 + ...) + x^2(f_0 + f_1x) + ...\\
&= x + xF(x) + x^2F(x) + ...\end{aligned}$$

nên $F(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$.

Bằng cách nhân hai vế cho x^n và lấy tổng tất cả các biểu thức, ta nhận được
$$\sum_{n\ge 2} f_nx^n = \sum_{n\ge 2} f_{n-1}x^n + \sum_{n\ge 2} f_{n-2}x^n$$
$$\Rightarrow F(x) - f_0 - f_1x = x\sum_{n\ge 1} f_nx^n + x^2\sum_{n\ge 2} f_nx^n,$$
$$\Rightarrow F(x) - f_0 - f_1x = x(F(x) - f_0) + x^2F(x)$$
$$\Rightarrow \qquad F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Kế tiếp ta tìm hệ số của x^n trong $F(x)$.

Đặt α_1, α_2 là các số thỏa mãn $1 - x - x^2 = (1 - \alpha_1x)(1 - \alpha_2x)$.

Bằng cách phân tích $\dfrac{x}{1 - x - x^2}$ thành các phân thức đơn giản ta có
$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A_1}{1 - \alpha_1x} + \frac{A_2}{1 - \alpha_2x}, \text{ trong đó } A_1, A_2 \text{ là các hằng số nào đó.}$$

Bây giờ, áp dụng công thức khai triển Taylor đặc biệt $\dfrac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + ...$ với $|z| < 1$, ta xác định được hệ số của x^n trong khai triển của biểu thức $\dfrac{x}{1 - x - x^2}$ là $A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n$.

Bằng cách tính toán trực tiếp có thể chọn α_1, α_2 lần lượt bằng $\alpha_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Khi đó, ta từ việc $f_0 = 0$ và $f_1 = 1$ nên nhận được hệ phương trình
$$\begin{aligned}0 &= A_1 + A_2\\
1 &= A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2.\end{aligned}$$

Giải hệ phương trình nêu trên ta thu được $A_1=\frac{1}{\sqrt{5}}, A_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ và ta nhận được công thức Binet:

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Bây giờ ta sẽ tổng quát cách tính vừa nêu cho trường hợp một dãy truy hồi bậc k.

Đầu tiên, ta cũng sẽ xác định công thức hàm sinh $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ tương tự như khi ta thực hiện cho dãy Fibonacci, $A(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $Q(x)=1-c_1x-c_2x^2-c_3x^3-\ldots-c_kx^k$ và $P(x)=A_{k-1}(x)-\sum_{j=1}^{k-1}c_jx^jA_{k-j-1}(x)$ với $A_l(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_lx^l$.

Chú ý rằng $A(x)$ là một phân thức với tử là một đa thức có bậc không quá $k-1$ và mẫu là một đa thức bậc k.

Làm thế nào ta có thể mở rộng việc sử dụng chuỗi Taylor cho các hàm phân thức? Để trả lời câu hỏi này ta cần đến kết quả phụ sau.

Kết quả 1. Giả sử $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là một phân thức hữu tỉ với $Q(x)$ là một đa thức bậc k và $P(x)$ là một đa thức bậc tối đa bằng $k-1$. Giả sử $Q(x)=\prod_{i=1}^{r}(a_i+b_ix)^{m_i}$ trong đó a_i,b_i là các số phức.

Khi đó, tồn tại các hằng số $A_{ij}, i=1,\ldots,r$, $j=1,\ldots,m_i$ sao cho $\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{A_{ij}}{(a_i+b_ix)^j}$.

Chứng minh.

Ta nhắc lại một số kiến thức cơ bản có liên quan đến định lý Bézout trên các đa thức.

Đầu tiên, Bézout khẳng định rằng nếu a,b là các số nguyên nguyên tố cùng nhau thì ta luôn tìm được các số nguyên c và d sao cho $ca+db=1$. Phép chứng minh của khẳng định này chỉ sử dụng một số đánh giá đơn giản trong thuật toán Euclidean; bản thân thuật toán này thường được sử dụng để tìm ước chung lớn nhất của p và q. Phép chứng minh trên các đa thức cũng được thực hiện một cách tương tự; tất cả những gì mà ta cần đó là thuật toán chia cho các đa thức:

Cho trước các đa thức $a(x)$ và $b(x)\neq 0$ xác định trên một trường nào đó sao cho bậc của $a(x)$ lớn hơn hoặc bằng bậc của $b(x)$. Khi đó, ta luôn tìm được đa thức $q(x)$ và $r(x)$ thỏa mãn $a(x)=b(x)q(x)+r(x)$ và bậc của $r(x)$ là nhỏ hơn thật sự bậc của $b(x)$ (quy ước bậc của đa thức không bằng -1).

Bằng cách thực hiện liên tiếp thuật toán chia, sau một số k bước nào đó, ta thu được chuỗi các đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}
a&=bq_0+r_0\\
b&=r_0q_1+r_1\\
r_0&=r_1q_2+r_2\\
&\ldots\\
r_{k-4}&=r_{k-3}q_{k-2}+r_{k-2}\\
r_{k-3}&=r_{k-2}q_{k-1}+r_{k-1}\\
r_{k-2}&=r_{k-1}q_k+r_k
\end{aligned}$$

trong đó tất cả các biểu thức ở trên đều là các đa thức theo biến x và r_k bằng 0 và r_{k-1} khác không.

Chú ý rằng r_{k-1} chia hết r_{k-2} (do $r_k=0$); nên nó cũng chia hết r_{k-3}; và tương tự như trên ta suy ra rằng nó chia hết cả b và a. Do b và a nguyên tố cùng nhau nên ta phải có $r_{k-1}=1$. Từ hệ thức thứ hai từ dưới lên ta nhận thấy rằng 1 là tổ hợp tuyến tính của r_{k-4} và r_{k-3}; và tiếp tục thực hiện quá trình này ta nhận ra rằng 1 là tổ hợp tuyến tính của b và a.

Tóm lại, nếu $a(x)$ và $b(x)$ là hai đa thức không có ước chung trên trường số phức thì tồn tại các đa thức $c(x)$ và $d(x)$ sao cho $c(x)a(x)+d(x)b(x)=1$.

Điều này có nghĩa là nếu $\dfrac{e(x)}{a(x)b(x)}$ là một hàm phân thức với $a(x)$ và $b(x)$ là hai đa thức không có ước chung trên trường số phức còn $e(x)$ là một đa thức khác không khác trên trường số phức thì khi đó ta tìm được các đa thức $e_1(x)$ và $e_2(x)$ thỏa mãn $\dfrac{e(x)}{a(x)b(x)}=\dfrac{e_1(x)}{a(x)}+\dfrac{e_2(x)}{b(x)}$.

Thật vậy, nếu $c(x)$ và $d(x)$ là các đa thức thỏa mãn $c(x)a(x)+d(x)b(x)=1$ thì ta chỉ cần đặt $e_1(x)=d(x)e(x)$ và $e_2(x)=c(x)e(x)$.

Áp dụng liên tục phân tích trên và lưu ý rằng mọi đa thức $Q(x)$ đều có thể phân tích trên trường số phức dưới dạng $\prod_{i=1}^{r}(a_i+b_ix)^{m_i}$, ta tìm được các đa thức $e_1(x),...,e_r(x)$ sao cho

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{r}\frac{e_i(x)}{(a_i+b_ix)^{m_i}}.$$

Bằng cách áp dụng thuật toán chia trên đa thức ta nhận được $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=E(x)+\sum_{i=1}^{r}\dfrac{e_i'(x)}{(a_i+b_ix)^{m_i}}$, trong đó $E(x)$ là một đa thức nào đó và các đa thức $e_i'(x)$ có bậc nhỏ hơn m_i.

Bằng cách chuyển qua giới hạn khi $x\to\infty$, ta nhận được $E(x)=0$.

Phần việc còn lại là ta cần chỉ ra rằng mọi phân thức có dạng $\dfrac{e'(x)}{(a+bx)^m}=\sum_{j=1}^{m}\dfrac{A_j}{(a+bx)^j}$.

Nhân cả hai vế của hệ thức trên cho $(a+bx)^m$, ta nhận được kết quả tương đương $e'(x)=\sum_{j=1}^{m}A_j(a+bx)^{m-j}$. Nhưng điều này thì lại là hiển nhiên, do các đa thức $(a+bx)^{m-1},...,(a+bx)^0$ lập thành một cơ sở trong không gian gồm tất cả các đa thức có bậc không vượt quá $m-1$ và hiển nhiên $e'(x)$ nằm trong không gian này.

Bây giờ ta áp dụng kết quả 1 cho hàm sinh $A(x)$.

Nếu ta giả sử rằng đa thức $Q(x)$ có phân tích $Q(x)=\prod_{i=1}^{r}(1-\alpha_ix)^{m_i}$, ta tìm được các hằng số $A_{ij}, i=1,...,r$, $j=1,...,m_i$ sao cho $A(x)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}\dfrac{A_{ij}}{(1-\alpha_ix)^j}$.

Từ phân tích trên ta nhận thấy rằng để xác định công thức tính a_n ta cần phải tìm hiểu khai triển Taylor của hàm $f(x)=(1-\alpha x)^{-s}$, trong đó s là một số nguyên dương.

Thật may mắn khi vấn đề này ta đã tìm được lời giải và thật ra là rất quen thuộc đối với chúng ta, kết quả đó được diễn đạt lại như sau:

Cho trước $\alpha\in\mathbb{R}$. Đặt $f_\alpha(x)=(1+x)^\alpha$ với $x\in(-1,1)$.

Khi đó chuỗi $\sum_{k\ge0}\dfrac{f_\alpha^k(0)}{k!}x^k=\sum_{k\ge0}\dfrac{(\alpha)_k}{k!}x^k$ hội tụ tuyệt đối và có tổng là $f_\alpha(x)$, trong đó $f_\alpha^k(0)$ là đạo hàm cấp k của $f_\alpha^k(0)$ tại $x=0$ và lưu ý rằng đạo hàm bậc 0 chính là hàm đơn vị.

Nếu ta thực hiện mở rộng định nghĩa hệ số nhị thức cho các chỉ số thực bằng cách đặt $\dbinom{\alpha}{n}=\dfrac{(\alpha)_k}{k!}$.

Khi đó, kết quả mà ta vừa trình bày ở trên chính là dạng mở rộng của định lý nhị thức:

Với mọi số thực α và mọi số thực x sao cho $(1+x)^{\alpha}=\sum_{k\geq 0}\binom{\alpha}{k}x^k$.

Chú ý rằng nếu $\alpha=n$ là một số nguyên dương thì $\binom{\alpha}{k}=\binom{n}{k}$ với mọi k .

Áp dụng định lý hệ số nhị thức với $\alpha=-s$, trong đó s là một số nguyên dương, ta nhận được

$$\begin{aligned}(1-x)^{-s}&=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{-s}{k}x^k\\&=\sum_{k\geq 0}\frac{(-s)_k}{k!}x^k\\&=\sum_{k\geq 0}\binom{s+k-1}{k}x^k\\&=\sum_{k\geq 0}\binom{s+k-1}{s-1}x^k .\end{aligned}$$

Chú ý rằng với $s=1$, ta nhận được $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...$,

với $s=2$, ta nhận được $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+....$

Tổng hợp các kết quả phân tích ở trên lại ta thu được kết quả sau

Kết quả 2. Giả sử dãy $(a_n)_{n\geq 0}$ được xác định bởi hệ thức truy hồi $a_n=c_1a_{n-1}+...+c_ka_{n-k}$ $(n\geq k)$, trong đó c_i là các hằng số và $c_k\neq 0$, và các giá trị ban đầu $a_0,...,a_{k-1}$ được cho trước. Hàm sinh $A(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ là một hàm phân thức hữu tỷ, điều này có nghĩa là $A(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $Q(x)=1-c_1x-c_2x^2-...-c_kx^k$ và $P(x)=A_{k-1}(x)-\sum_{j=1}^{k-1}c_jx^jA_{k-j-1}(x)$ với $A_l(x)=a_0+a_1x+...+a_lx^l$ sao cho $A(x)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{A_{ij}}{(a_i+b_ix)^j}$.

Khi đó, công thức của dãy a_n : $a_n=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}A_{ij}\binom{j+n-1}{j-1}\alpha_i^n$, trong đó α_i là một nghiệm của phương trình $z^k-c_1z^{k-1}-c_2z^{k-2}-...-c_k=0$ còn m_i là số bội của α_i. Các hằng số A_{ij} có thể tìm được bằng cách giải hệ k phương trình với k ẩn cho bởi các điều kiện ban đầu.

Chú ý rằng nếu ta sử dụng khái niệm hàm sinh theo nghĩa chuỗi hội tụ thì ở đây ta chỉ xét $|x|<\frac{1}{\max_i \alpha_i}$.

Nếu ta bổ sung thêm vào vế phải của hệ thức truy hồi của a_n một lượng $f(n)$, ta được

$$a_n=c_1a_{n-1}+...+c_ka_{n-k}+f(n)\quad (n\geq k),$$

Khi đó, $A(x)=\frac{P(x)+F_{\geq k}(x)}{Q(x)}$, trong đó $F_{\geq k}(x)=\sum_{n\geq k}f(n)x^n$.

Nếu $F_{\geq k}(x)$ là một hàm phân thức hữu tỷ của x thì bằng cách áp dụng một lần nữa phương pháp phân thức vừa trình bày ở trên ta cũng nhận được công thức tính cho dãy a_n .

Sau đây ta khảo sát một trường hợp đặc biệt của $f(n)$, đó chính là khi $f(n)$ là một đa thức theo n .

Muốn như vậy ta cần phải khảo sát chuỗi $P^{(l)}(x):=\sum_{n\geq 0}n^lx^n$ với một số nguyên $l\geq 0$.

Với $l=0$, chuỗi vô hạn trở thành $1+x+x^2+...=\frac{1}{1-x}$.

Với $l>0$, ta có hệ thức truy hồi sau $P^{(l)}(x)=x\frac{d}{dx}\left(P^{(l-1)}(x)\right)$.

Điều này kéo theo rằng $P^{(l)}(x)=\left(x\frac{d}{dx}\right)^{l}\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta dễ dàng chỉ ra được rằng:

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^{l} f(x)=\sum_{k=1}^{l}\left\{\begin{matrix} l \\ k \end{matrix}\right\} x^{k}\frac{d^{k}}{dx^{k}} f(x) \text{ với } k\ge 1 \text{, trong đó } \left\{\begin{matrix} l \\ k \end{matrix}\right\} \text{ là số Stirling loại 2.}$$

Do $\frac{d^{k}}{dx^{k}}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, nên ta thu được $P^{(l)}(x)=\sum_{k=1}^{l} k!\left\{\begin{matrix} l \\ k \end{matrix}\right\}\frac{x^{k}}{(1-x)^{k+1}}$.

Bây giờ ta chỉ quan tâm đến hệ số của x^{n} ở hai vế của đẳng thức trên thì bên vế trái ta thu được n^{l} còn ở bên vế phải ta thu được $\left[x^{n}\right]\left(\frac{x^{k}}{(1-x)^{k+1}}\right)=\left[x^{n-k}\right]\left(\frac{1}{(1-x)^{k+1}}\right)=\binom{(k+1)+(n-k)-1}{(k+1)-1}=\binom{n}{k}$,

nên do đó $n^{l}=\sum_{k=1}^{l}\left\{\begin{matrix} l \\ k \end{matrix}\right\}(n)_{k}$.

Như vậy, ta đã chứng minh được rằng:

Kết quả 3. Cho $f(n)=c_{0}+c_{1}n+c_{2}n^{2}+\ldots+c_{m}n^{m}$.

Khi đó, hàm sinh $F(x)=\sum_{n\ge 0} f(n)x^{n}$ được cho bởi công thức $\sum_{l=0}^{m} c_{l}\sum_{k=1}^{l} k!\left\{\begin{matrix} k \\ l \end{matrix}\right\}\frac{x^{k}}{(1-x)^{k+1}}$.

Tổng quan lại ta có thể áp dụng phương pháp phân thức để giải quyết bài toán xác định công thức của dãy a_{n} thỏa mãn $a_{n}=c_{1}a_{n-1}+\ldots+c_{k}a_{n-k}+f(n)\ (n\ge k)$, trong đó $f(n)$ là một đa thức theo biến n.

Tài liệu tham khảo:

[01]. David Galvin, Basic Discrete Mathematics, Spring 2015.
[02]. Trương Phước Nhân, Chuỗi lũy thừa đa thức, 09/06/2018.
[03]. Trương Phước Nhân, Phương pháp sử dụng hàm sinh, 09/06/2018.
[04]. Trương Phước Nhân, Ứng dụng chuỗi lũy thừa hình thức trong bài toán đếm, 22/06/2018.