Các ứng dụng cơ bản của kỹ thuật hàm sinh

Trương Phước Nhân, 10/08/2018

1. Trích ra các cấp số cộng

Cho trước một dãy $(a_n)_{n\geq 0}$, với hàm sinh tương ứng là $A(x)$, và trong một số trường hợp ta cần phải xem xét đến dãy số $(a_0,0,a_2,0,a_4,...)$.

Một câu hỏi được đặt ra là bằng cách nào ta có thể xác định được hàm sinh của dãy số mới này mà không cần phải bắt đầu lại các tính toán ?

Một giải pháp đơn giản cho vấn đề này được đưa ra như sau:

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+...$$

và $$A(-x)=a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+a_4x^4-a_5x^5+...$$

nên $$\frac{A(x)+A(-x)}{2}=a_0+0x+a_2x^2+0x^3+a_4x^4+0x^5+...$$

Do đó, $(a_0,0,a_2,0,a_4,...)\leftrightarrow\dfrac{A(x)+A(-x)}{2}$.

Ví dụ 1. Tính $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k}$?

Do $\left(\binom{n}{k}\right)_{k\geq 0}\leftrightarrow(1+x)^n$, nên $\left(\binom{n}{0},0,\binom{n}{2},0,\binom{n}{4},0,...\right)\leftrightarrow\dfrac{(1+x)^n+(1-x)^n}{2}$.

Bằng cách đặt $x=1$, ta thu được $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k}=2^{n-1}$.

Tương tự, nếu ta muốn trích ra dãy con gồm các chỉ số lẻ của một dãy thì ta cũng có

$$(0,a_1,0,a_3,0,a_5,...)\leftrightarrow\frac{A(x)-A(-x)}{2}.$$

Chẳng hạn, $\left(0,\binom{n}{1},0,\binom{n}{3},0,...\right)\leftrightarrow\dfrac{(1+x)^n-(1-x)^n}{2}$.

Bằng cách đặt $x=1$, ta thu được $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k+1}=2^{n-1}$.

Bây giờ nếu ta muốn trích ra dãy con gồm các chỉ số cách nhau 3 đơn vị hoặc m đơn vị thì như thế nào? Để giải quyết vấn đề này ta cần phải sử dụng đến căn đơn vị.

Nhắc lại một kiến thức cơ bản: có chính xác m số phức phân biệt z sao cho $z^m=1$; các số phức này được xác định bởi $e^{\frac{2k\pi i}{m}}$ với $k=0,1,...,n-1$.

Với mỗi $m\geq 1$ và $0\leq k\leq m-1$, bằng cách đặt $\omega_k^{(m)}=e^{\frac{2k\pi i}{m}}$.

Chú y rằng $\omega_0^{(m)}=1$, nên ta sẽ sử dụng 1 thay thế cho $\omega_0^{(m)}$.

Đồng thời, $\sum_{k=0}^{m-1}\omega_k^{(m)}=0$, bởi vì vế trái của hệ số z^{m-1} trong đa thức z^m-1 bằng 0, và $\omega_{k_1}^{(m)}\omega_{k_2}^{(m)}=\omega_{k_1+k_2}^{(m)}$.

Cho trước dãy số $(a_n)_{n\geq 0}$ với hàm sinh tương ứng là $A(x)$, với $m\geq 1$ và $k\in\{0,...,m-1\}$,

$$A\left(\omega_k^{(m)}x\right)=\sum_{n\geq 0}\omega_{nk}^{(m)}a_nx^n,$$

nên $$\sum_{k=0}^{m-1}A\left(\omega_k^{(m)}x\right)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n\geq 0}\omega_{nk}^{(m)}a_nx^n$$
$$=\sum_{n\geq 0}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\omega_{nk}^{(m)}\right]a_nx^n.$$

Nếu n là một bội số của m thì $\sum_{k=0}^{m-1}\omega_{nk}^{(m)}=m$, nếu n không phải là một bội số của m thì

$$\sum_{k=0}^{m-1}\omega_{nk}^{(m)}=\sum_{k=0}^{m-1}e^{\frac{2k\pi i}{m}}$$
$$=\frac{1-e^{2n\pi i}}{1-e^{\frac{2n\pi i}{m}}}$$
$$=0.$$

Do đó, $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}A\left(\omega_k^{(m)}x\right)=\sum_{n\ge 0}a_{mn}x^{mn}$, đây là hàm sinh của dãy con gồm các chỉ số là bội của m.

Một ví dụ đơn giản minh họa cho kỹ thuật này như sau:

Ta biết rằng $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+...=e^x$, nên ta dễ dàng tính ra được

$$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x.$$

Câu hỏi đặt ra là $1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+...=?$

Nhận thấy rằng căn bậc 3 của đơn vị bao gồm 1, $\omega_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ và $\omega_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, nên

$$1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+...=\frac{e^x+e^{\omega_1 x}+e^{\omega_2 x}}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\left(e^x+2e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right),$$

một cách tương tự ta cũng sẽ tìm được tổng của các chuỗi có dạng $\sum_{n\ge 0}\frac{x^{nm}}{(nm)!}$ với mọi $m\ge 1$.

Một ví dụ khác minh họa cho kỹ thuật này đó chính là xác định $\sum_{k\ge 0}\binom{n}{3k}$?

Đơn giản ta dễ dàng nhận thấy $\sum_{k\ge 0}\binom{n}{3k}=\frac{1}{3}\left(2^n+\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n\right)=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right)$.

Ta cũng có thể sử dụng kỹ thuật căn đơn vị này để trích ra dãy con gồm các chỉ số sai khác nhau một bội của m. Để đơn giản ta chỉ tính toán minh họa cho trường hợp $m=3$:

$$\sum_{n\ge 0}a_{3n+1}x^{3n+1}=\frac{A(x)+\omega_2 A(\omega_1 x)+\omega_1 A(\omega_2 x)}{3}$$

và $$\sum_{n\ge 0}a_{3n+2}x^{3n+2}=\frac{A(x)+\omega_1 A(\omega_1 x)+\omega_2 A(\omega_2 x)}{3}.$$

2. Xác định công thức tường minh của tổng

Cố định $k\ge 0$ và với mỗi $n\ge k$ ta khảo sát dạng thu gọn của tổng $\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}$?

Đầu tiên ta ký hiệu lại tổng cần tính ở dạng s_n và gọi $S(x)$ là hàm sinh tương ứng của dãy $(s_n)_{n\ge k}$.

Khi đó, $S(x)=\sum_{n\ge k}s_n x^n$

$$=\sum_{n\ge k}\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}x^n$$
$$=\sum_{n\ge k}\sum_{m\ge k}\binom{m}{k}x^n 1_{k\le m\le n}$$
$$=\sum_{m\ge k}\sum_{n\ge m}\binom{m}{k}x^n$$

$$= \sum_{m \ge k} \binom{m}{k} \frac{x^n}{1-x}$$

$$= \frac{x^k}{(1-x)^{k+2}}.$$

Do đó, $s_n = \left[x^n\right] S(x)$

$$= \left[x^n\right] \frac{x^k}{(1-x)^{k+2}}$$

$$= \left[x^{n-k}\right] \frac{1}{(1-x)^{k+2}}$$

$$= \binom{n+1}{k+1}.$$

Tài liệu tham khảo:

[01]. David Galvin, Basic Discrete Mathematics, Spring 2015.
[02]. Trương Phước Nhân, Chuỗi lũy thừa đa thức, 09/06/2018.
[03]. Trương Phước Nhân, Cơ sở của hàm sinh, 31/07/2018.
[04]. Trương Phước Nhân, Phương pháp sử dụng hàm sinh, 09/06/2018.
[05]. Trương Phước Nhân, Ứng dụng chuỗi lũy thừa hình thức trong bài toán đếm, 22/06/2018.