Bài toán phân tích hàm phân thức hữu tỉ

Trương Phước Nhân, 10/12/2018

Nội dung của bài viết trình các khảo sát lý thuyết của bài toán phân tích hàm phân thức hữu tỉ, một kết quả khá quen thuộc đối với dân toán.

Bài toán.

Giả sử $F=\dfrac{A}{S_1^{\alpha_1}\dots S_n^{\alpha_n}}$ trong đó $A\in\mathbb{K}[x]$, $S_1,\dots,S_n\in\mathbb{K}[x]$ là các đa thức bất khả quy không đồng nhất bằng không và nguyên tố cùng nhau từng đôi một và $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ là các số tự nhiên nào đó.

Khi đó, tồn tại duy nhất một họ các đa thức $\left(E,C_{\alpha_1,1},\dots,C_{\alpha_1,\alpha_1},C_{\alpha_2,1},\dots,C_{\alpha_2,\alpha_2},\dots,C_{\alpha_n,1},\dots,C_{\alpha_n,\alpha_n}\right)$ sao cho

$F=E+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\alpha_j}\dfrac{C_{\alpha_j,j}}{S_i^j}$ và $\deg\left(C_{\alpha_i,j}\right)<\deg\left(S_i\right)$ với mọi $i\in\{1,\dots,n\}$ và $j\in\{1,\dots,\alpha_i\}$.

Chứng minh.

Để chứng minh kết quả của bài toán trên ta sẽ chia bài toán này thành các bài toán con như sau:

Bài toán 1.

Giả sử $F=\dfrac{A}{S}$ trong đó $A\in\mathbb{K}[x]$, $S\in\mathbb{K}[x]$ là đa thức không đồng nhất bằng không.

Khi đó, tồn tại duy nhất cặp đa thức (E,R) sao cho $F=E+\dfrac{R}{S}$ và $\deg(R)<\deg(S)$.

Chứng minh bài toán 1.

1) Tồn tại

Áp dụng thuật toán chia Euclide cho cặp đa thức (A,S) ta tìm được cặp đa thức (E,R) sao cho

$$A=SE+R \text{ thỏa mãn } \deg(R)<\deg(S).$$

Khi đó, $F=\dfrac{A}{S}=\dfrac{SE+R}{S}=E+\dfrac{R}{S}$.

2) Duy nhất

Giả sử $F=E_1+\dfrac{R_1}{S}=E_2+\dfrac{R_2}{S}$.

$$\Rightarrow E_1-E_2=\frac{R_2-R_1}{S}$$

$$\Rightarrow \deg\left(E_1-E_2\right)=\deg\left(R_1-R_2\right)-\deg(S)<0.$$

$$\Rightarrow E_1=E_2$$

$$\Rightarrow R_1=R_2$$

Bài toán 2.

Giả sử $F=\dfrac{A}{S_1\dots S_n}$ trong đó $A\in\mathbb{K}[x]$, $S_1,\dots,S_n\in\mathbb{K}[x]$ là các đa thức không đồng nhất bằng không và nguyên tố cùng nhau từng đôi một.

Khi đó, tồn tại duy nhất họ các đa thức $(A_1,\dots,A_n)$ sao cho $F=\dfrac{A_1}{S_1}+\dots+\dfrac{A_n}{S_n}$.

Chứng minh bài toán 2.

Ta chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp quy nạp toán học theo n.

- $n=1$: Khẳng định của bài toán là hiển nhiên.

● $n=2$: Do $\left(S_1,S_2\right)=1$ nên bằng cách áp dụng định lý Bezout ta tìm được cặp đa thức $\left(U_1,U_2\right)$ sao cho $S_1U_1+S_2U_2=1$.

Khi đó, $\dfrac{A}{S_1S_2}=\dfrac{A\left(S_1U_1+S_2U_2\right)}{S_1S_2}=\dfrac{AU_2}{S_1}+\dfrac{AU_1}{S_2}$.

● Giả sử khẳng định của bài toán đúng với $n=k$ và $S_1,...,S_{k+1}\in\mathbb{K}[x]$ là các đa thức không đồng nhất bằng không và nguyên tố cùng nhau từng đôi một.

$\Rightarrow\left(S_1...S_k,S_{k+1}\right)=1$

Áp dụng kết quả khảo sát cho trường hợp $n=2$, ta tìm được các đa thức $C_1,A_{k+1}\in\mathbb{K}[x]$ sao cho

$$\frac{A}{S_1...S_kS_{k+1}}=\frac{C_1}{S_1...S_k}+\frac{A_{k+1}}{S_{k+1}}.$$

Áp dụng giả thiết quy nạp, ta tìm được họ các đa thức $\left(A_1,...,A_k\right)$ sao cho $\dfrac{C_1}{S_1...S_k}=\dfrac{A_1}{S_1}+...+\dfrac{A_k}{S_k}$.

Kết hợp các kết quả trên ta thu được $\dfrac{A}{S_1...S_kS_{k+1}}=\dfrac{A_1}{S_1}+...+\dfrac{A_k}{S_k}+\dfrac{A_{k+1}}{S_{k+1}}$, tức là khẳng định của bài toán đúng với $n=k+1$.

Theo nguyên lý quy nạp toán học ta suy ra điều phải chứng minh.

Kết hợp kết quả của các bài toán 1) và 2) ta thu được khẳng định sau

Bài toán 3.

Giả sử $F=\dfrac{A}{S_1...S_n}$ trong đó $A\in\mathbb{K}[x]$, $S_1,...,S_n\in\mathbb{K}[x]$ là các đa thức không đồng nhất bằng không và nguyên tố cùng nhau từng đôi một.

Khi đó, tồn tại duy nhất họ các đa thức $\left(E,R_1,...,R_n\right)$ sao cho

$$F=E+\frac{R_1}{S_1}+...+\frac{R_n}{S_n} \text{ và } \deg\left(R_i\right)<\deg\left(S_i\right) \text{ với mọi } i\in\{1,...,n\}.$$

Chứng minh bài toán 3.

1) Tồn tại

Áp dụng kết quả của bài toán 2, ta tìm được họ các đa thức $\left(A_1,...,A_n\right)$ sao cho $F=\dfrac{A_1}{S_1}+...+\dfrac{A_n}{S_n}$.

Bằng cách áp dụng kết quả của bài toán 1, ta tìm được các đa thức $E_1,...,E_n,R_1,...,R_n\in\mathbb{K}[x]$ sao cho

$$\frac{A_i}{S_i}=E_i+\frac{R_i}{S_i} \text{ và } \deg\left(R_i\right)<\deg\left(S_i\right).$$

Đặt $E=E_1+...+E_n$, ta thu được $F=E+\dfrac{R_1}{S_1}+...+\dfrac{R_n}{S_n}$.

2) Duy nhất

Ta chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp quy nạp toán học theo n.

● $n=1$: Khẳng định của bài toán được suy từ khẳng định của bài toán 1.

● $n=2$: Giả sử tồn tại $\left(E,R_1,R_2\right)$ và $\left(D,P_1,P_2\right)$ sao cho

$$\frac{A}{S_1S_2}=E+\frac{R_1}{S_1}+\frac{R_2}{S_2}=D+\frac{P_1}{S_1}+\frac{P_2}{S_2} \text{ và } \deg\left(R_i\right)<\deg\left(S_i\right) \text{ với mọi } i\in\{1,...,n\}$$

$$\Rightarrow S_1\left(R_2-P_2\right)=S_1S_2\left(D-E\right)+S_2\left(P_1-R_1\right)$$

$$\Rightarrow \qquad S_1 | S_2(P_1 - R_1)$$

Do $(S_1, S_2) = 1$ nên bằng cách áp dụng định lí Gauss ta suy ra $S_1 | P_1 - R_1$.

Mặt khác, $\deg(P_1 - R_1) < \deg(S_1)$ nên $P_1 = R_1$.

Lập luận tương tự ta cũng suy ra được $P_2 = R_2$ và cuối cùng ta suy ra $D = E$.

● Giả sử khẳng định của bài toán đúng với $n = k$ và $E, R_1, ..., R_{k+1}, D, P_1, ..., P_{k+1} \in \mathbb{K}[x]$ là các đa thức sao cho $\dfrac{A}{S_1...S_{k+1}} = E + \sum_{i=1}^{k+1} \dfrac{R_i}{S_i} = D + \sum_{i=1}^{k+1} \dfrac{P_i}{S_i}$ và $\deg(R_i) < \deg(S_i), \deg(P_i) < \deg(S_i)$ với mọi $i \in \{1, ..., k+1\}$.

Đặt $T = S_1...S_k, B = \sum_{i=1}^{k} \left(R_i \left(\prod_{\substack{1 \le j \le k \\ j \ne i}} S_j \right) \right), C = \sum_{i=1}^{k} \left(P_i \left(\prod_{\substack{1 \le j \le k \\ j \ne i}} S_j \right) \right)$.

Khi đó: $\dfrac{A}{TS_{k+1}} = E + \dfrac{B}{T} + \dfrac{R_{k+1}}{S_{k+1}} = D + \dfrac{C}{T} + \dfrac{P_{k+1}}{S_{k+1}}$ và $(T, S_{k+1}) = 1$.

Áp dụng các kết quả khảo sát trong trường hợp $n = 2$, ta suy ra: $E = D, B = C, R_{k+1} = P_{k+1}$.

Do đó: $\sum_{i=1}^{k} \dfrac{R_i}{S_i} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{P_i}{S_i}$ và với mọi $i \in \{1, ..., k+1\}$.

Áp dụng giả thiết quy nạp ta suy ra được rằng: $R_1 = P_1, ..., R_k = P_k$.

Bài toán 4.

Giả sử $F = \dfrac{A}{S^\alpha}$ trong đó $A \in \mathbb{K}[x]$, $S \in \mathbb{K}[x]$ sao cho $\deg(S) \ge 1$ và α là một số tự nhiên nào đó.

Khi đó, tồn tại duy nhất họ các đa thức $(E, C_1, ..., C_\alpha)$ sao cho

$$F = E + \frac{C_1}{S} + ... + \frac{C_{\alpha-1}}{S^{\alpha-1}} + \frac{C_\alpha}{S^\alpha} \text{ và } \deg(C_j) < \deg(S) \text{ với mọi } j \in \{1, ..., \alpha\}.$$

Chứng minh bài toán 4.

1) Tồn tại

Ta chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp quy nạp toán học theo α.

● $\alpha = 1$: Khẳng định của bài toán được suy từ khẳng định của bài toán 1.

● Giả sử khẳng định của bài toán đúng với $\alpha = k$, tức là tồn tại họ $(E, C_2, ..., C_{k+1})$ sao cho

$$\frac{A}{S^k} = E_1 + \frac{C_2}{S} + ... + \frac{C_k}{S^{k-1}} + \frac{C_{k+1}}{S^k} \text{ và } \deg(C_{j+1}) < \deg(S) \text{ với mọi } j \in \{1, ..., k\}.$$

Áp dụng kết quả của bài toán 1, ta tìm được các đa thức $E, C_1 \in \mathbb{K}[x]$ sao cho

$$\frac{E_1}{S} = E + \frac{C_1}{S} \text{ và } \deg(C_1) < \deg(S).$$

Do đó: $\dfrac{A}{S^{k+1}} = \dfrac{A}{S^k.S} = E + \dfrac{C_1}{S} + ... + \dfrac{C_k}{S^k} + \dfrac{C_{k+1}}{S^{k+1}}$ và $\deg(C_j) < \deg(S)$ với mọi $j \in \{1, ..., k+1\}$.

2) Duy nhất

Ta chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp quy nạp toán học theo α.

- $\alpha = 1$: Khẳng định của bài toán được suy ra từ khẳng định của bài toán 1.
- Giả sử khẳng định của đúng với $\alpha = k$ và tồn tại họ $\left(E_1, C_1, ..., C_{k+1}, E_2, D_1, ..., D_{k+1}\right)$ sao cho

$$\frac{A}{S^{k+1}} = E_1 + \frac{C_1}{S} + ... + \frac{C_k}{S^k} + \frac{C_{k+1}}{S^{k+1}} = E_2 + \frac{D_1}{S} + ... + \frac{D_k}{S^k} + \frac{D_{k+1}}{S^{k+1}}$$

và $\deg\left(C_j\right) < \deg\left(S\right), \deg\left(D_j\right) < \deg\left(S\right)$ với mọi $j \in \{1, ..., k+1\}$.

Nhân cả hai vế cho S^k, ta được: $\frac{A}{S} = \left(E_1 S^k + C_1 S^{k-1} + ... + C_k\right) + \frac{C_{k+1}}{S} = \left(E_2 S^k + D_1 S^{k-1} + ... + D_k\right) + \frac{D_{k+1}}{S}$

Áp dụng kết quả của bài toán 1, ta suy ra $C_{\alpha+1} = D_{\alpha+1}$.

Bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp ta suy ra $C_\alpha = D_\alpha, \ldots, C_1 = D_1, E_1 = E_2$.

Sau cùng bằng cách tổng hợp các kết quả đạt được ở các bài toán 1), 2), 3), 4) ta suy ra điều phải chứng minh.

<u>Tài liệu tham khảo:</u>

Jean – Marie Monnier (1996), Giáo trình Toán – Tập 5 Đại số 1, NXB Giáo dục.