Chuỗi lũy thừa hình thức

Trương Phước Nhân, 09/06/2018

Trong bài viết này ta sẽ đề cập tới nền tảng của các phương pháp đếm dùng hàm sinh. Đây là các phương pháp đếm hữu hiệu và đang được phát triển. Khái niệm quan trọng làm cơ sở cho việc nghiên cứu và phát triển các phương pháp này là chuỗi lũy thừa hình thức. Bằng các phép toán được định nghĩa trên các đối tượng này ta có thể biến chúng thành một cấu trúc đại số. Vì thế mà ta sử dụng được công cụ cũng như các kết quả của các lĩnh vực toán học khác vào việc giải bài toán đếm trong tổ hợp.

1. Kiến thức về hàm sinh

Trong phần đầu của bài viết ta sẽ trình bày những kiến thức bổ trợ cần thiết để sử dụng cho các phương pháp đếm dùng hàm sinh. Đó là các kết quả có liên quan đến các phép toán, các toán tử và phép truy toán cho chuỗi lũy thừa hình thức. Nhờ các phép toán này mà tập tất cả các chuỗi lũy thừa hình thức trở thành một cấu trúc đại số. Do đó ta có thể sử dụng được các kết quả của cấu trúc này để giải quyết bài toán đếm. Trước hết, ta định nghĩa chuỗi lũy thừa hình thức và các phép toán trên nó.

1.1. Chuỗi lũy thừa hình thức

Giả sử $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$ là tập hợp các số tự nhiên và $\mathbb{C}$ là tập hợp các số phức. Ký hiệu $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ là tập tất cả các ánh xạ a từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{C}$.

Để thuận tiện và trực quan ta sẽ biểu diễn mỗi phần tử $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dưới dạng $a=a(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ trong đó $a_i=a(i)$ cho mọi chỉ số i và gọi nó là chuỗi lũy thừa hình thức của $a(x)$. Vai trò của x^i ở đây có thể ví như người chủ của vị trí thứ i. Sự hiện diện của chúng tạo ra sự giống nhau của chuỗi lũy thừa và các hàm giải tích.

Giả sử $a(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ và $b(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i$ là hai chuỗi lũy thừa hình thức. Ta định nghĩa phép toán cộng, phép nhân trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ và phép nhân các phần tử của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ với vô hướng $z\in\mathbb{C}$ như sau:

$$a(x)+b(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i+\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i=\sum_{i=0}^{\infty}(a_i+b_i)x^i,$$

$$a(x)b(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}a_kb_{i-k}\right)x^i,$$

$$za(x)=z\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(za_i)x^i.$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ lập thành một không gian vector trên $\mathbb{C}$. Đối với phép nhân thì $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ có phần tử đơn vị là $1(x)=1+\sum_{i=1}^{\infty}0.x^i$ mà ta sẽ ký hiệu đơn giản là 1. Ta cũng dễ kiểm tra được rằng $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ lập thành một vành giao hoán có đơn vị là 1 đối với phép cộng và phép nhân trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Phép nhân trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ và phép nhân các phần tử của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ với vô hướng $z\in\mathbb{C}$ thỏa mãn các hệ thức sau:

$$z[a(x)b(x)]=[za(x)]b(x)=a(x)[zb(x)].$$

Điều đó chứng tỏ rằng $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ lập thành một đại số trên $\mathbb{C}$. Như vậy, ta đã chứng minh được kết quả sau đây.

Kết quả 1. Tập $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ với phép toán cộng, phép nhân và phép nhân với vô hướng được định nghĩa ở trên là một đại số giao hoán trên $\mathbb{C}$.

Nếu với $n\in\mathbb{N}$ mà chuỗi lũy thừa hình thức $a(x)$ có $a_n\neq 0$ và $a_i=0$ với mọi $i>n$ thì $a(x)$ được gọi là đa thức bậc n và được ký hiệu đơn giản là $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ hay $a_0+a_1x+...+a_nx^n$. Hơn nữa, nếu $a_i=0$ với một chỉ số i nào đó thuộc $\{1,2,...,n-1\}$ thì số hạng a_ix^i cũng không cần viết; nếu $a_i=1$ với một chỉ số i nào đó thuộc $\{1,2,...,n-1\}$ thì số hạng a_ix^i được viết đơn giản lại là x^i. Phần tử $0(x)=\sum_{i=1}^{\infty}0.x^i$ mà ta sẽ đơn giản lại ký hiệu thành 0, đây cũng chính là phần tử đơn vị của phép cộng trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, và được định nghĩa là có bậc bằng -1.

Ký hiệu $\mathbb{C}_n[x]$ là tập tất cả các đa thức bậc nhỏ hơn n.

Khi đó, $\mathbb{C}_n[x]$ là không gian con n - chiều và $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{C}_n[x]$ là một đại số con vô hạn chiều của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Dễ thấy rằng $\varphi:\mathbb{C}_1[x]\to\mathbb{C}$ biến $a(x)$ thành a_0 là đẳng cấu đại số. Vì thế ta có thể đồng nhất a_0 với $a(x)\in\mathbb{C}_1[x]$ và coi $\mathbb{C}$ như là một đại số con của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Khi đó phép nhân một phần tử của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ với vô hướng $z\in\mathbb{C}$ có thể xem như là một trường hợp riêng của phép toán nhân trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Kết quả 2. Chuỗi $a(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ là khả nghịch khi và chỉ khi $a_0\neq 0$.

Chứng minh.

Chuỗi $a(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ là khả nghịch khi và chỉ khi tồn tại chuỗi $b(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_i x^i$ sao cho $a(x)b(x)=1$.

Đồng thời $a(x)b(x)=1$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{gathered}
a_0b_0=1,\\
a_0b_1+a_1b_0=0,\\
a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=0,\\
\ldots\\
a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0=0,\\
\ldots
\end{gathered}$$

trong đó $b_0,b_1,\ldots,b_n,\ldots$ là các ẩn số. Dễ thấy rằng hệ này có nghiệm khi và chỉ khi $a_0\neq 0$.

Nếu $a(x)$ là phần tử khả nghịch của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thì phần tử nghịch đảo của nó ta sẽ ký hiệu là $(a(x))^{-1}$ hoặc $\frac{1}{a(x)}$ hoặc $a^{-1}(x)$. Nếu $a(x)$ và $b(x)$ là các đa thức với $b_0\neq 0$ thì phần tử $a(x)b^{-1}(x)$ thường được ký hiệu là $\frac{a(x)}{b(x)}$ và được gọi là hàm hữu tỷ.

Với mọi $a(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ta định nghĩa

$a^0(x)=1,$

$a^n(x)=\underbrace{a(x)a(x)\ldots a(x)}_{n\text{ lần}}$ cho mọi số nguyên dương n.

Nếu $a(x)$ là phần tử khả nghịch và $a^{-1}(x)$ là phần tử nghịch đảo của $a(x)$, thì ta định nghĩa

$a^n(x)=\underbrace{a(x)a(x)\ldots a(x)}_{n\text{ lần}}$ cho mọi số nguyên dương n.

Với $z\in\mathbb{C}$ và $0\neq n,k\in\mathbb{N}$, đa thức $(1-zx^n)^k$ là khả nghịch theo Kết quả 2. Kết quả sau đây chỉ ra cách tính nghịch đảo của đa thức này.

Kết quả 3. Với mọi $z\in\mathbb{C}$ và $0\neq n,k\in\mathbb{N}$, ta có

$$\frac{1}{1-zx^n}=\sum_{i=0}^{\infty}z^ix^{ni} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{(1-zx^n)^k}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k+i-1}{i}z^ix^{ni} \qquad (2)$$

Chứng minh. Ta có $(1-zx^n)\sum_{i=0}^{\infty}z^ix^{ni}=\sum_{i=0}^{\infty}z^ix^{ni}-\sum_{i=0}^{\infty}z^{i+1}x^{n(i+1)}=1$. Vậy ta có đẳng thức (1).

Ta chứng minh đẳng thức (2) bằng quy nạp theo k.

Với $k=1$, đẳng thức (2) chính là đẳng thức (1) và vì thế nó đã được chứng minh là đúng.

Giả sử đẳng thức (2) đã được chứng minh là đúng cho $k=t\geq 1$.

Khi đó,

$$\frac{1}{\left(1-zx^n\right)^{t+1}}=\frac{1}{\left(1-zx^n\right)^{t}}\frac{1}{\left(1-zx^n\right)}=\left[\sum_{i=0}^{\infty}\binom{t+i-1}{i}z^ix^{ni}\right]\left[\sum_{i=0}^{\infty}z^ix^{ni}\right] \text{ (theo giả thiết quy nạp)}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{t+j-1}{j}z^jz^{i-j}\right)x^{ni}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{t+j-1}{j}\right)z^ix^{ni}.$$

Áp dụng công thức tổng cho hệ số nhị thức, ta có

$$\sum_{j=0}^{i}\binom{t+j-1}{j}=\binom{(t-1)+i+1}{i}=\binom{(t+1)+i-1}{i}$$

và do đó đẳng thức (2) cũng được chứng minh cho $k=t+1$.

Kết quả 4. Giả sử $a(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ có $a_0=1$. Khi đó với mọi số nguyên dương n, chuỗi lũy thừa hình thức $a^n(x)=c(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^i$ có $c_0=1, c_1=na_1, c_i=na_i+f_{n,i}(a_1,...,a_{i-1})$ cho mọi $i\geq 2$, ở đây $f_{n,i}$ là đa thức theo $(i-1)$ biến.

Chứng minh. Ta chứng minh Kết quả 4 bằng quy nạp theo n.

Với $n=1$, mệnh đề là hiển nhiên đúng.

Giả sử mệnh đề đã được chứng minh là đúng cho $n=k$.

Khi đó theo giả thiết quy nạp ta có

$$a^{k+1}(x)=a^k(x)a(x)=\left(1+ka_1x+\sum_{i=2}^{\infty}c_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\right)$$

Do đó, hệ số của x^0 trong $a^{k+1}(x)$ bằng $a_0=1$; hệ số của x^1 trong $a^{k+1}(x)$ bằng $1.a_1+ka_1.a_0=(k+1)a_1$ và hệ số của x^i ($i\geq 2$) trong $a^{k+1}(x)$ bằng

$$\sum_{j=0}^{i}c_ja_{i-j}=1.a_i+ka_1.a_{i-1}+\left(ka_2+f_{k,2}(a_1)\right)a_{i-2}+...+\left(ka_i+f_{k,i}(a_1,...,a_{i-1})\right)a_0$$

$$=(a_i+ka_i)+ka_1.a_{i-1}+\left(ka_2+f_{k,2}(a_1)\right)a_{i-2}+...+\left(ka_{i-1}+f_{k,i-1}(a_1,...,a_{i-2})\right)a_1+f_{k,i}(a_1,...,a_{i-1})$$

$$=(k+1)a_i+f_{k+1,i-1}(a_1,...,a_{i-1}),$$

trong đó ta đặt $f_{k+1,i-1}(a_1,...,a_{i-1})=ka_1a_{i-1}+...+f_{k,i}(a_1,...,a_{i-1})$.

Kết quả 5. Giả sử $a(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ với $a_0=1$ và n là một số nguyên dương bất kỳ. Khi đó tồn tại duy nhất một $b(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i$ với $b_0=1$ sao cho $b^n(x)=a(x)$.

Chuỗi $b(x)$ tồn tại duy nhất như trên được ký hiệu là $a^{\frac{1}{n}}(x)$.

Chứng minh. Theo Kết quả 4, $b_0,b_1,b_2,...,b_k,....$ lần lượt được xác định duy nhất từ các phương trình:

$$b_0=1,$$
$$nb_1=a_1,$$
$$nb_2+f_{n,2}(b_1)=a_2,$$
$$...$$
$$nb_k+f_{n,k}(b_1,...,b_{k-1})=a_2,$$
$$...$$

Giả sử $a(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ với $a_0=1$. Theo Kết quả 2, $a(x)$ có phần tử nghịch đảo là $a^{-1}(x)$.

Kết quả 6. Giả sử $a(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^i$ với $a_0=1$ và n là một số nguyên dương bất kỳ.

Khi đó $\left(a^{-1}(x)\right)^n=\left(a^n(x)\right)^{-1}$ và do đó $a^{-n}(x)=\left(a^n(x)\right)^{-1}$.

Chứng minh. Do $\mathbb{C}^N$ là một đại số giao hoán nên ta luôn có

$$a^n(x)\left(a^{-1}(x)\right)^n=\left(a^{-1}(x)\right)^n a^n(x)=\left(a(x)a^{-1}(x)\right)^n=1^n=1.$$

Kết quả 7. Giả sử $a(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^i$ với $a_0=1$, m là một số nguyên bất kỳ còn n là một số nguyên dương.

Khi đó tồn tại duy nhất một $b(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_i x^i$ với $b_0=1$ sao cho $b^n(x)=a^m(x)$.

Chuỗi $b(x)$ tồn tại duy nhất như trên được ký hiệu là $a^{\frac{m}{n}}(x)$.

Chứng minh. Nếu $m=0$ thì theo định nghĩa $a^0(x)=1$ và do đó $a^0(x)$ có hệ số của x^0 bằng 1. Nếu m là số nguyên dương thì $a^m(x)$ có hệ số của x^0 cũng bằng 1 theo Kết quả 4. Từ chứng minh của Kết quả 2 ta cũng thấy ngay rằng $a^{-1}(x)$ có hệ số của x^0 bằng 1. Nếu m là số nguyên âm thì $-m$ là số nguyên dương. Do đó từ Kết quả 4, $a^m(x)=\left(a^{-1}(x)\right)^{-m}$ cũng có hệ số của x^0 bằng 1.

Như vậy, với m là số nguyên bất kì, $a^m(x)$ có hệ số của x^0 bằng 1. Áp dụng Kết quả 5 với lưu ý rằng n là một số nguyên dương nên tồn tại duy nhất một $b(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_i x^i$ với $b_0=1$ sao cho $b^n(x)=a^m(x)$.

Giả sử $c_1(x),c_2(x),...,c_k(x),...$ là một dãy các phần tử của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ với $c_k(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_{ik}x^i$ và $c_{0k}=0, k=1,2,...$ Khi đó dãy $1+c_1(x),1+c_2(x),...,1+c_k(x),...$ được gọi là khả tích nếu với mọi $i\geq 0$ tồn tại số nguyên dương $N=N(i)$ sao cho với mọi $n>N$ hệ số của x^i trong $\prod_{k=1}^{n}\left(1+c_k(x)\right)$ đều bằng nhau

Nếu $c_1(x),c_2(x),...,c_k(x),...$ là một dãy khả tích thì ta có thể định nghĩa tích $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+c_k(x)\right)=\sum_{i=0}^{\infty}s_i x^i\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, trong đó hệ số s_i trong tích này chính là hệ số của x^i trong tích $\prod_{k=1}^{n}\left(1+c_k(x)\right)$ với $n>N$.

Dãy $a_1(x),a_2(x),...,a_k(x),...$ các phần tử $a_k(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_{ik}x^i, k=1,2,...$ trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ được gọi là khả tổng nếu với mọi số nguyên $r\geq 0$ tồn tại số nguyên dương $N=N(r)$ sao cho với mọi $n>N$ ta có $a_{0n}=a_{1n}=...=a_{rn}=0$.

Nếu dãy $a_1(x),a_2(x),...,a_k(x),...$ là khả tổng thì đối với dãy này ta có thể định nghĩa tổng $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)=\sum_{i=0}^{\infty}s_i x^i$, trong đó $s_i=a_{i1}+a_{i2}+...+a_{iN}$.

Từ định nghĩa về tính khả tổng và khả tích ta có thể chứng minh dễ dàng các khẳng định sau.

Kết quả 8.

(1) Giả sử $a_1(x),a_2(x),...,a_k(x),...$ là dãy khả tổng và $b_1(x),b_2(x),...,b_k(x),...$ là dãy sao cho tồn tại song ánh $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn $b_{\sigma(k)}(x)=a_k(x)$ với mọi $k\geq 1$.

Khi đó $b_1(x),b_2(x),...,b_k(x),...$ cũng là dãy khả tổng và $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(x)$.

(2) Nếu $c_1(x),c_2(x),...,c_k(x),...$ là dãy khả tổng với $c_{0k}=0$ cho mọi $k\geq 1$ thì dãy $1+c_1(x),1+c_2(x),...,1+c_k(x),...$là khả tích

(3) Nếu $b(x)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ với $b_0=0$ còn $a(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ là một phần tử bất kỳ thì $a_0 b^0(x), a_1 b^1(x), a_2 b^2(x), \dots, a_k b^k(x), \dots$ là dãy khả tổng.

Giả sử $b(x)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ với $b_0=0$ còn $a(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ là một phần tử bất kỳ. Khi đó, theo khẳng định 3 của Kết quả 8 ta có thể xác định chuỗi $\sum_{i=0}^{\infty} a_i\left(b^i(x)\right) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Chuỗi này được gọi là hợp thành của $a(x)$ và $b(x)$ và được ký hiệu là $a(x)\circ b(x)$.

Kết quả 9. Giả sử $a_1(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_{i1} x^i$ và $a_2(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_{i2} x^i$ là các phần tử bất kỳ của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ còn $b(x)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ là phần tử của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ với $b_0=0$. Khi đó, $\left[a_1(x)\circ b(x)\right]\left[a_2(x)\circ b(x)\right]=\left[a_1(x)a_2(x)\right]\circ b(x)$.

Trong bài viết này không đề cập chi tiết chứng minh này nhưng có thể chứng minh bằng cách tính hệ số của x^i của biểu thức ở hai vế và thấy rằng chúng bằng nhau.

1.2. Toán tử đạo hàm trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Ánh xạ $D:\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}: a(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \to D\left(a(x)\right)=b(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(i+1)a_{i+1}x^i$ được gọi là toán tử đạo hàm trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Ta cũng định nghĩa

$D^0\left(a(x)\right)=a(x)$,

$D^n\left(a(x)\right)=D\left(D^{n-1}\left(a(x)\right)\right)$ cho mọi n nguyên dương,

$S\left(a(x)\right)=a_0$.

Ta chứng minh một số tính chất sau đây của toán tử đạo hàm trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Kết quả 10.

(1) $D\left(a(x)+b(x)\right)=D\left(a(x)\right)+D\left(b(x)\right)$.

(2) $D\left(a(x)b(x)\right)=D\left(a(x)\right)b(x)+a(x)D\left(b(x)\right)$.

(3) $D\left(a^n(x)\right)=na^{n-1}D\left(a(x)\right)$ cho mọi n nguyên dương.

(4) Nếu $a(x)$ khả nghịch và $a^{-1}(x)$ là phần tử khả nghịch của $a(x)$ thì

$D\left(a^{-1}(x)\right)=-a^{-2}D\left(a(x)\right)$,

$D\left(a^{-n}(x)\right)=-na^{-n-1}D\left(a(x)\right)$ cho mọi n nguyên dương.

(5) Với mọi số hữu tỷ $s=\frac{m}{n}$ (m nguyên, n nguyên dương) và mọi $a(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $S\left(a(x)\right)=1$, ta có

$D\left(a^s(x)\right)=sa^{s-1}D\left(a(x)\right)$.

(6) Với mọi $n\in\mathbb{N}$, $D^n\left(a(x)\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+n)!}{i!}a_{i+n}x^i$.

(7) Với mọi $a(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ta có $a(x)=\sum_{i=0}^{\infty} S\left(D^i\left(a(x)\right)\right)\frac{x^i}{i!}$.

(8) Nếu $a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x), \dots$ là dãy khả tổng thì $D\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\right)=\sum_{k=1}^{\infty} D\left(a_k(x)\right)$.

Tính chất (7) có thể xem như là phân tích MacLauren cho $a(x)$.

Chứng minh.

(1) Hệ số của x^i ở vế trái phải bằng $(i+1)\left(a_{i+1}+b_{i+1}\right)$. Hệ số của x^i ở vế trái cũng như vậy. Vì vậy ta có tính chất (1).

(2) Hệ số của x^i trong vế phải bằng $\sum_{l=0}^{i}(l+1)a_{l+1}b_{i-l}+\sum_{k=0}^{i}(i-k+1)a_kb_{i-k+1}$.

Trong tổng thứ nhất ở trên ta làm phép đổi chỉ số $k=l+1$.

Khi đó biểu thức ở trên bằng

$$\sum_{k=1}^{i+1}ka_kb_{i-k+1}+\sum_{k=0}^{i}(i-k+1)a_kb_{i-k+1}=(i+1)\sum_{k=0}^{i+1}a_kb_{i-k+1}.$$

Giá trị này cũng chính là hệ số của x^i trong vế trái và (2) được chứng minh.

(3) Tính chất (3) được chứng minh bằng quy nạp theo n.

Với $n=1$, đẳng thức là hiển nhiên.

Giả sử rằng đẳng thức đã được chứng minh cho $n=k$. Theo tính chất (2), ta có

$$D\left(a^{k+1}(x)\right)=D\left(a^k(x)a(x)\right)=D\left(a^k(x)\right)a(x)+a^k(x)D\left(a(x)\right).$$

Nhưng $D\left(a^k(x)\right)=ka^{k-1}D\left(a(x)\right)$ theo giả thiết qui nạp. Do đó, từ các đẳng thức trên, ta nhận được

$$\begin{aligned}D\left(a^{k+1}(x)\right)&=ka^{k-1}D\left(a(x)\right)a(x)+a^k(x)D\left(a(x)\right)\\&=ka^kD\left(a(x)\right)a(x)+a^k(x)D\left(a(x)\right)\\&=(k+1)a^kD\left(a(x)\right)a(x).\end{aligned}$$

Tính chất (3) đã được chứng minh.

(4) Áp dụng toán tử đạo hàm vào hai vế của đẳng thức $a(x)a^{-1}(x)=1$ ta được

$$\begin{aligned}&D\left(a(x)a^{-1}(x)\right)=0,\\&\Leftrightarrow D\left(a(x)\right)a^{-1}(x)+a(x)D\left(a^{-1}(x)\right)=0,\\&\Leftrightarrow a(x)D\left(a^{-1}(x)\right)=-D\left(a(x)\right)a^{-1}(x),\\&\Leftrightarrow D\left(a^{-1}(x)\right)=-a^{-1}(x)D\left(a(x)\right)a^{-1}(x)=-a^{-2}(x)D\left(a(x)\right).\end{aligned}$$

Đẳng thức thứ nhất của tính chất (4) được chứng minh. Áp dụng đẳng thức này và tính chất (3), ta có

$$\begin{aligned}D\left(a^{-n}(x)\right)=D\left(\left(a^{-1}(x)\right)^n\right)&=n\left(a^{-1}(x)\right)^{n-1}D\left(a^{-1}(x)\right)\\&=na^{-(n-1)}(x)D\left(a^{-1}(x)\right)\\&=na^{-(n-1)}(x)\left(-a^{-2}(x)D\left(a(x)\right)\right)\\&=-na^{-n-1}D\left(a(x)\right)\end{aligned}$$

và đẳng thức thứ hai của tính chất (4) cũng được chứng minh.

(5) Theo định nghĩa của $a^s(x),\left(a^s(x)\right)^n=a^m(x)$. Do đó, theo tính chất (3) và (4),

$$D\left(\left(a^s(x)\right)^n\right)=D\left(a^m(x)\right)=ma^{m-1}(x)D\left(a(x)\right).$$

Nhưng cũng theo tính chất (3), $D\left(\left(a^s(x)\right)^n\right)=n\left(a^s(x)\right)^{n-1}D\left(a^s(x)\right)$.

Suy ra,

$$\begin{aligned}&n\left(a^s(x)\right)^{n-1}D\left(a^s(x)\right)=ma^{m-1}(x)D\left(a(x)\right),\\&\Leftrightarrow n\left(a^s(x)\right)^n\left(a^s(x)\right)^{-1}D\left(a^s(x)\right)=ma^m(x)a^{-1}(x)D\left(a(x)\right),\\&\Leftrightarrow na^m(x)\left(a^s(x)\right)^{-1}D\left(a^s(x)\right)=ma^m(x)a^{-1}(x)D\left(a(x)\right),\\&\Leftrightarrow D\left(a^s(x)\right)=\frac{m}{n}a^s(x)a^{-1}(x)D\left(a(x)\right).\end{aligned}$$

Ta có $\left(a^s(x)a^{-1}(x)\right)^n=\left(a^s(x)\right)^n\left(a^{-1}(x)\right)^n=a^m(x)a^{-n}(x)=a^{m-n}(x)$.

Suy ra $a^s(x)a^{-1}(x)=a^{\frac{m-n}{n}}(x)=a^{\frac{m}{n}-1}(x)=a^{s-1}(x)$.

Vậy $D\left(a^s(x)\right)=sa^{s-1}(x)D\left(a(x)\right)$ và tính chất (5) được chứng minh.

(6) Ta chứng minh tính chất này bằng quy nạp theo n.

Với $n=0$, tính chất này là hiển nhiên đúng vì theo định nghĩa $D^0\left(a(x)\right)=a(x)$.

Giả sử tính chất (6) đã được chứng minh cho $n=k$.

Khi đó,

$$D^{k+1}\left(a(x)\right)=D\left(D^k\left(a(x)\right)\right)=D\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+k)!}{i!}a_{i+k}x^i\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\frac{(i+1+k)!}{(i+1)!}a_{i+1+k}x^i$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(i+(k+1)\right)!}{i!}a_{i+(k+1)}x^i$$

Tính chất (6) được chứng minh.

(7) Theo tính chất (6) ta có

$$S\left(D^i\left(a(x)\right)\right)=S\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(i+(k+1)\right)!}{i!}a_{i+(k+1)}x^i\right)=\frac{i!}{0!}a_i=i!a_i.$$

Vì thế, hệ số của x^i ở vế phải trong tính chất (7) là a_i.

(8) Dễ dàng suy ra từ định nghĩa của dãy khả tổng và các tính chất trước đây của toán tử đạo hàm D.

Kết quả 11. Giả sử $a(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ và $2\le n\in\mathbb{N}$. Khi đó tồn tại $b(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $b^n(x)=a(x)$ khi và chỉ khi số k nhỏ nhất với $a_k\neq 0$ là bội số nguyên của n.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $b(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sao cho $b^n(x)=a(x)$. Ta cũng giả sử rằng t là số nguyên nhỏ nhất sao cho $b_t\neq 0$. Từ $b^n(x)=a(x)$ ta suy ra rằng số nguyên k nhỏ nhất sao cho $a_k\neq 0$ bằng nt, tức là k là bội số nguyên của n.

Ngược lại, giả sử số k nhỏ nhất sao cho $a_k\neq 0$ là bội số nguyên của n, chẳng hạn $k=nt$.

Khi đó, $a(x)=x^{nt}\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^i$, trong đó $c_i=a_{i+nt}$.

Ta có $c_0=a_{nt}=a_k\neq 0$.

Giả sử f_0 là một giá trị của căn bậc n của c_0. Vì $c_0\neq 0$ nên $f_0\neq 0$. Do đó ta có thể xác định các số $f_1, f_2,..., f_i,...$ theo công thức truy hồi sau đây:

$$f_i=\frac{1}{nf_0^{n-1}}\left(c_i-\sum_{\substack{i_1<i,i_2<i,...,i_n<i\\ i_1,+i_2+...+i_n=i}}f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_n}\right)$$
$$\Leftrightarrow c_i=nf_0^{n-1}f_i+\sum_{\substack{i_1<i,i_2<i,...,i_n<i\\ i_1,+i_2+...+i_n=i}}f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_n}$$
$$\Leftrightarrow c_i=\sum_{\substack{i_1\le i,i_2\le i,...,i_n\le i\\ i_1,+i_2+...+i_n=i}}f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_n}.$$

Vì vậy, nếu ta đặt $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}f_ix^i$ thì $f^n(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^i$.

Đặt $b(x)=x^tf(x)$.

Khi đó $b^n(x)=x^{nt}f^n(x)=x^{nt}\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^i=a(x)$.

1.3. Toán tử tích phân trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Ánh xạ $D^*:\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{C}^{\mathbb{N}}: a(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\to D^*\left(a(x)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i-1}}{i}x^i$ được gọi là toán tử tích phân trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Kết quả 12. Nếu $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ còn $a(x),b(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $S\left(a(x)\right)=S\left(b(x)\right)=0$ thì (1) $D^*\left(D\left(a(x)\right)\right)=D\left(D^*\left(a(x)\right)\right)=a(x)$; (2) $D^*\left(z_1a(x)+z_2b(x)\right)=z_1D^*\left(a(x)\right)+z_2D^*\left(b(x)\right)$; (3) $D^*\left(a(x)D\left(b(x)\right)\right)=a(x)b(x)-D^*\left(D\left(a(x)\right)b(x)\right)$.

Chứng minh. Giả sử $a(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i$ và $b(x)=\sum_{i=1}^{\infty}b_ix^i$.

Khi đó, $D\left(a(x)\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)a_{i+1}x^i$.

Suy ra, $D^*\left(D\left(a(x)\right)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{ia_i}{i}x^i=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i=a(x)$.

Lại có $D^*\left(a(x)\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_{i-1}}{i}x^i$. Vì vậy, $D\left(D^*\left(a(x)\right)\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\frac{a_i}{i+1}x^i=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i=a(x)$.

Vậy $D^*\left(D\left(a(x)\right)\right)=D\left(D^*\left(a(x)\right)\right)=a(x)$ và (1) được chứng minh.

Tiếp tục, ta có

$$\begin{aligned}D^*\left(z_1a(x)+z_2b(x)\right)&=D^*\left(\sum_{i=1}^{\infty}(z_1a_i+z_2b_i)x^i\right)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(z_1a_{i-1}+z_2b_{i-1})}{i}x^i\\&=z_1\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i-1}}{i}x^i+z_2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_{i-1}}{i}x^i\\&=z_1D^*\left(a(x)\right)+z_2D^*\left(b(x)\right)\end{aligned}$$

Vậy (2) được chứng minh. Ta chỉ còn phải chứng minh đẳng thức (3).

Ta có $D\left(b(x)\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)b_{i+1}x^i$.

Vì vậy,

$$a(x)D\left(b(x)\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{i}a_k\,(i-k+1)b_{i-k+1}\right)x^i.$$

Suy ra,

$$\begin{aligned}D^*\left(a(x)D\left(b(x)\right)\right)&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{i-1}a_k\,(i-1-k+1)b_{i-1-k+1}\right)\frac{x^i}{i}\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{i-1}a_k\,(i-k)b_{i-k}\right)\frac{x^i}{i}\end{aligned}$$

Mặt khác, vì $D\left(a(x)\right)b(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{i-1}(k+1)a_{k+1}b_{i-k}\right)x^i$ nên

$$D^*\left(D\left(a(x)\right)b(x)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{i-2}(k+1)a_{k+1}b_{i-1-k}\right)\frac{x^i}{i}.$$

Lại có,

$$a(x)b(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{i-1}a_kb_{i-k}\right)x^i=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{i-1}ia_kb_{i-k}\right)\frac{x^i}{i}.$$

Do đó vế phải của (3), tức là $a(x)b(x)-D^*\left(D\left(a(x)\right)b(x)\right)$ bằng

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{i-1} i a_k b_{i-k} - \sum_{k=0}^{i-2}(k+1)a_{k+1}b_{i-1-k}\right)\frac{x^i}{i}$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{i-1} i a_k b_{i-k} - \sum_{k=1}^{i-1} k a_{k+1}b_{i-k}\right)\frac{x^i}{i}$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{i-1} a_k (i-k) b_{i-k}\right)\frac{x^i}{i}$$
$$=D^*\left(a(x)D\left(b(x)\right)\right).$$

1.4. Các toán tử thường gặp khác trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

1.4.1. Toán tử logarit L.

Giả sử $b(x)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i$ và $a(x)=1+b(x)$. Khi đó logarit $L(a(x))$ của $a(x)$ được xác định bằng công thức $L(a(x))=L(1+b(x))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}b^k(x)$.

Từ khẳng định của Kết quả 8 ta thấy ngay rằng $L(a(x))$ luôn được xác định.

Kết quả 13. Giả sử $a(x), c(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $S(a(x))=S(c(x))=1$. Khi đó,

(1) $D(L(a(x)))=\dfrac{D(a(x))}{a(x)}$;

(2) $L(a(x)c(x))=L(a(x))+L(c(x))$;

(3) Với mọi số hữu tỷ r, ta có $L(a^r(x))=rL(a(x))$;

(4) Nếu $L(a(x))=L(b(x))$, thì $a(x)=b(x)$;

(5) Nếu $b(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $S(b(x))=0$, thì với mọi số hữu tỷ r ta có $(1+b(x))^r=1+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{r}{i}b^i(x)$ trong đó $\binom{r}{i}=\dfrac{(r)_i}{i!}=\dfrac{r(r-1)...(r-i+1)}{i!}$.

Chứng minh.

(1) Từ Kết quả 10 ta có

$$D(L(x))=D\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}b^k(x)\right)$$
$$=D(b(x))\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b^k(x)$$
$$=D(1+b(x))\frac{1}{1+b(x)}$$
$$=a^{-1}(x)D(a(x))$$

và (1) được chứng minh.

(2) Ta có

$$D(L(a(x)c(x)))=(a(x)c(x))^{-1}D(a(x)c(x))$$
$$=(a(x)c(x))^{-1}\left(D(a(x))c(x)+a(x)D(c(x))\right)$$
$$=a^{-1}(x)D(a(x))+c^{-1}(x)D(c(x))$$
$$=D(L(a(x)))+D(L(c(x))).$$

Vì $S(L(a(x)c(x)))=0$, $S(L(a(x))+L(c(x)))=0$, nên từ đẳng thức nhận được suy ra $L(a(x)c(x))=L(a(x))+L(c(x))$ và (2) được chứng minh.

(3) Theo định nghĩa $L(1)=0$. Vì vậy, từ đẳng thức $a(x)a^{-1}(x)=1$ suy ra

$$L\left(a(x)a^{-1}(x)\right)=L\left(a(x)\right)+L\left(a^{-1}(x)\right)=0 \Leftrightarrow L\left(a^{-1}(x)\right)=-L\left(a(x)\right).$$

Kết hợp với khẳng định (2) đã chứng minh ở trên, nếu n là số nguyên thì ta có ngay $L\left(a^{n}(x)\right)=nL\left(a(x)\right)$. Bây giờ nếu $r=\dfrac{m}{n}$ (m,n là các số nguyên), thì $mL\left(a(x)\right)=L\left(a^{m}(x)\right)=L\left(\left(a^{r}(x)\right)^{n}\right)=nL\left(a^{r}(x)\right)$. Suy ra $L\left(a^{r}(x)\right)=rL\left(a(x)\right)$ và (3) được chứng minh.

(4) Giả sử $L\left(a(x)\right)=0$. Khi đó $0=D\left(L\left(a(x)\right)\right)=a^{-1}(x)D\left(a(x)\right)$. Vì $a^{-1}(x)\neq 0$ nên suy ra $D\left(a(x)\right)=0$, tức là $a(x)=1$. Bây giờ nếu $L\left(a(x)\right)=L\left(b(x)\right)$, thì $L\left(a^{-1}(x)b(x)\right)=0$. Theo điều vừa chứng minh, ta có $a^{-1}(x)b(x)=1$, tức là $a(x)=b(x)$ và (4) được chứng minh.

(5) Ký hiệu $c(x)=1+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{r}{i}b^{i}(x)$.

Theo Kết quả 10, ta có

$$\begin{aligned}
(1+b(x))D\left(c(x)\right) &= (1+b(x))\left[\sum_{i=1}^{\infty}\binom{r}{i}ib^{i-1}(x)D\left(b(x)\right)\right]\\
&= (1+b(x))\left[\sum_{i=1}^{\infty}\binom{r}{i}ib^{i-1}(x)D\left(b(x)\right)\right]\\
&= (1+b(x))\left[\sum_{i=1}^{\infty}\binom{r}{i}ib^{i-1}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{r}{i}ib^{i}(x)\right]\\
&= (1+b(x))\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left[\binom{r}{i}i+\binom{r}{i+1}(i+1)\right]b^{i}(x)\right]\\
&= (1+b(x))\left[r+\sum_{i=1}^{\infty}r\binom{r}{i}b^{i}(x)\right]\\
&= rc(x)D\left(b(x)\right).
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$c^{-1}(x)D\left(c(x)\right)=r\left(1+b(x)\right)^{-1}D\left(b(x)\right)=r\left(1+b(x)\right)^{-1}D\left(1+b(x)\right).$$

Nhưng $D\left(L\left(c(x)\right)\right)=c^{-1}(x)D\left(c(x)\right)$ theo khẳng định (1).

Do đó $D\left(L\left(c(x)\right)\right)=r\left(1+b(x)\right)^{-1}D\left(1+b(x)\right)$.

Mặt khác, theo khẳng định (1) và (3) của Kết quả 13 vừa chứng minh ở trên ta có

$$\begin{aligned}
D\left(L\left(\left(1+b(x)\right)^{r}\right)\right) &= D\left(rL\left(\left(1+b(x)\right)\right)\right)=rD\left(L\left(\left(1+b(x)\right)\right)\right)\\
&= r\left(1+b(x)\right)^{-1}D\left(1+b(x)\right).
\end{aligned}$$

Vậy $D\left(L\left(c(x)\right)\right)=D\left(L\left(\left(1+b(x)\right)^{r}\right)\right)$. Từ đẳng thức này ta suy ra $L\left(c(x)\right)=L\left(\left(1+b(x)\right)^{r}\right)$ vì $S\left(L\left(c(x)\right)\right)=S\left(L\left(\left(1+b(x)\right)^{r}\right)\right)=0$. Theo khẳng định (4), từ đẳng thức nhận được ta suy ra $c(x)=\left(1+b(x)\right)^{r}$ và khẳng định (5) được chứng minh.

1.4.2. Toán tử mũ E

Giả sử $b(x)=\sum_{i=1}^{\infty}b_{i}x^{i}$. Khi đó mũ $E\left(b(x)\right)$ của $b(x)$ được xác định bằng công thức $E\left(b(x)\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{1}{i!}b^{i}(x)$, trong đó $b^{0}(x)=1$.

Từ khẳng định (3) của Kết quả 8 ta thấy ngay rằng $E\left(b(x)\right)$ luôn xác định.

Kết quả 14. Giả sử $b(x), c(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $S(b(x)) = S(c(x)) = 0$. Khi đó

(1) $D\big(E(b(x))\big) = E(b(x))D(x)$;

(2) Nếu $E(b(x)) = E(c(x))$ thì $b(x) = c(x)$;

(3) $L\big(E(b(x))\big) = b(x), E\big(L(1+b(x))\big) = 1 + b(x)$;

(4) $E(b(x)+c(x)) = E(b(x))E(c(x))$.

Chứng minh.

(1) Theo Kết quả 10 ta có

$$D\big(E(b(x))\big) = D(b(x))\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j-1)!}b^{j-1}(x)$$

$$= D(b(x))\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}b^{j}(x) = D(b(x))E(b(x))$$

và (1) được chứng minh.

(2) Ta có

$$D(b(x))E(b(x)) = D\big(E(b(x))\big) = D\big(E(c(x))\big) = D(c(x))E(c(x)).$$

Vì $E(b(x)) = E(c(x)) \neq 0$ nên từ đẳng thức trên ta suy ra $D(b(x)) = D(c(x))$. Nhưng $S(b(x)) = S(c(x))$ nên từ đẳng thức cuối cùng ta suy ra $b(x) = c(x)$.

(3) Từ Kết quả 13 và khẳng định (1) của Kết quả 14 ta có

$$D\Big(L\big(E(b(x))\big)\Big) = \big(E(b(x))\big)^{-1} D\big(E(b(x))\big)$$

$$= \big(E(b(x))\big)^{-1} E(b(x))D(b(x)) = D(b(x)).$$

Vì $S\Big(L\big(E(b(x))\big)\Big) = S(b(x)) = 0$ nên từ đẳng thức nhận được suy ra $L\big(E(b(x))\big) = b(x)$ và khẳng định thứ nhất của (3) được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh khẳng định thứ hai của (3).

Đặt $a_1(x) = E\big(L(a(x))\big)$, trong đó $S(a(x)) = 1$.

Khi đó $L(a_1(x)) = L\Big(E\big(L(a(x))\big)\Big)$.

Từ đẳng thức này và khẳng định thứ nhất vừa chứng minh ta có

$$L(a_1(x)) = L(a(x))$$

Theo Kết quả 13, $a_1(x) = a(x)$, tức là $E\big(L(a(x))\big) = a(x)$ và (3) được chứng minh.

(4) Theo khẳng định (4) của Kết quả 13 và khẳng định (3) vừa chứng minh ta có

$$L\big(E(b(x))E(c(x))\big) = L\big(E(b(x))\big) + L\big(E(c(x))\big) = b(x) + c(x).$$

Vì vậy $E\Big(L\big(E(b(x))E(c(x))\big)\Big) = L\big(E(b(x))\big) + L\big(E(c(x))\big) = E(b(x)+c(x))$.

Mặt khác, lại theo khẳng định (3) vừa chứng minh $E\Big(L\big(E(b(x))E(c(x))\big)\Big) = E(b(x))E(c(x))$.

Vì vậy $E(b(x)+c(x)) = E(b(x))E(c(x))$.

1.4.3. Toán tử lũy thừa

Giả sử $a(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ với $a_0 = 1$ và $r \in \mathbb{C}$ là một số phức bất kỳ. Khi đó ta định nghĩa $a^r(x)$ là chuỗi lũy thừa hình thức $E\big(rL(a(x))\big)$.

Khi r là số hữu tỷ, dựa vào khẳng định (3) của Kết quả 13 và khẳng định (3) của Kết quả 14 ta có thể thấy rằng định nghĩa $a^r(x)$ ở đây trùng với định nghĩa $a^r(x)$ ở Kết quả 7.

Kết quả 15. Giả sử $a(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $S(a(x))=1$ và $r,s\in\mathbb{C}$.
Khi đó
(1) $a^r(x)a^r(x)=a^{r+s}(x)$;
(2) $D(a^r(x))=ra^{r-1}(x)D(a(x))$;
(3) $L(a^r(x))=rL(a(x))$;
(4) Nếu $b(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thỏa mãn $S(b(x))=0$, thì $(1+b(x))^r=1+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{r}{i}b^i(x)$ trong đó
$\binom{r}{i}=\frac{(r)_i}{i!}=\frac{r(r-1)...(r-i+1)}{i!}$.

Chứng minh.

(1) Theo khẳng định (4) của Kết quả 14 ta có

$$\begin{aligned}a^r(x)a^r(x)&=E(rL(a(x)))E(sL(a(x)))=E(rL(a(x))+sL(a(x)))\\&=E((r+s)L(a(x)))=a^{r+s}(x)\end{aligned}$$

và (1) được chứng minh.

(2) Ta có

$$\begin{aligned}D(a^r(x))&=D(E(rL(a(x))))=E(rL(a(x)))D(rL(a(x)))\\&=ra^r(x)D(L(a(x)))=ra^r(x)a^{-1}(x)D(a(x))\\&=ra^{r-1}(x)D(a(x))\end{aligned}$$

và (2) được chứng minh.

(3) Ta có

$L(a^r(x))=L(E(rL(a(x))))=rL(a(x))$ theo khẳng định (3) của Kết quả 14.

(4) Chứng minh này hoàn toàn tương tự như chứng minh khẳng định (5) của Kết quả 13.

1.4.4. Các toán tử lượng giác

Giả sử $a(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ với $S(a(x))=0$, tức là $a(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i$. Khi đó ta định nghĩa

$$\sin(a(x))=\frac{1}{2i}\left[E(ia(x))-E(-ia(x))\right]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a^{2k+1}(x)}{(2k+1)!},$$

$$\cos(a(x))=\frac{1}{2}\left[E(ia(x))+E(-ia(x))\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}(x)}{(2k)!}$$

$\tan(a(x))=\sin(a(x))(\cos(a(x)))^{-1}$, $\sec(a(x))=(\cos(a(x)))^{-1}$, trong đó i là phần tử đơn vị ảo, tức là $i^2=-1$ và $a^0(x)=1$.

Kết quả 16.
(1) $\sin^2(a(x))+\cos^2(a(x))=1$;
(2) $\sec^2(a(x))=1+\tan^2(a(x))$;
(3) $D(\sin(a(x)))=\cos(a(x))D(a(x))$;
(4) $D(\cos(a(x)))=(-\sin(a(x)))D(a(x))$;
(5) $D(\tan(a(x)))=(\sec^2(a(x)))D(a(x))$;
(6) $D(\sec(a(x)))=(\sec(a(x)))(\tan(a(x)))D(a(x))$.

Chứng minh.

(1) Ta có

$$\sin^2\left(a(x)\right)+\cos^2\left(a(x)\right)=\frac{1}{4i^2}\left[E\left(ia(x)\right)E\left(ia(x)\right)-2E\left(ia(x)\right)E\left(-ia(x)\right)+E\left(-ia(x)\right)E\left(-ia(x)\right)\right]$$
$$+\frac{1}{4}\left[E\left(ia(x)\right)E\left(ia(x)\right)+2E\left(ia(x)\right)E\left(-ia(x)\right)+E\left(-ia(x)\right)E\left(-ia(x)\right)\right]$$
$$=E\left(ia(x)-ia(x)\right)=E(0)=1$$

và (1) được chứng minh.

(2) Ta có

$$\sec^2\left(a(x)\right)=\frac{1}{\cos^2\left(a(x)\right)}=\frac{\sin^2\left(a(x)\right)+\cos^2\left(a(x)\right)}{\cos^2\left(a(x)\right)}=\frac{\cos^2\left(a(x)\right)}{\cos^2\left(a(x)\right)}+\frac{\sin^2\left(a(x)\right)}{\cos^2\left(a(x)\right)}=1+\tan^2\left(a(x)\right)$$

và (2) được chứng minh.

(3) Ta có

$$D\left(\sin\left(a(x)\right)\right)=\frac{1}{2i}\left[D\left(E\left(ia(x)\right)\right)-D\left(E\left(-ia(x)\right)\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2i}\left[E\left(ia(x)\right)D\left(ia(x)\right)-E\left(-ia(x)\right)D\left(-ia(x)\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2i}\left[iE\left(ia(x)\right)D\left(a(x)\right)+iE\left(-ia(x)\right)D\left(a(x)\right)\right]$$
$$=\cos\left(a(x)\right)D\left(a(x)\right).$$

Tương tự, ta có thể chứng minh các khẳng định (4), (5) và (6).

2. Phép truy toán trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Một phép truy toán trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ được định nghĩa như là một ánh xạ $f:\mathbb{N}\times\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{C}$.

Để trực quan ta cũng coi f như là một hàm của vô hạn các biến là $n,a_0,a_1,a_2,\ldots$ với n nhận giá trị trong $\mathbb{N}$, còn $a_0,a_1,a_2,\ldots$ nhận giá trị trong $\mathbb{C}$ và $\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i=a(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Giả sử $k\in\mathbb{N}$ và $a(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Ta nói rằng $a(x)$ hay dãy số $a_0,a_1,a_2,\ldots$ thỏa mãn phép truy toán f với bậc truy toán k nếu $f(n,a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,0,0,\ldots)=0$ với mọi $n\geq k$.

Khi đó, $a(x)$ được gọi là một lời giải của phép truy toán này. Nói chung, nếu phép truy toán có lời giải với bậc truy toán k, thì lời giải đó không nhất thiết phải là duy nhất.

Người ta phân các phép truy toán cho $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ra thành hai loại chính là: truy hồi tuyến tính và truy hồi không tuyến tính. Tập các phép truy hồi tuyến tính lại được phân thành lớp con là thuần nhất và không thuần nhất.

Ta nói rằng $a(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ hay dãy $a_0,a_1,a_2,\ldots$ thỏa mãn một phép truy hồi toán tuyến tính thuần nhất bậc k nếu tồn tại các hằng số $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_k\in\mathbb{C}$ sao cho với mọi $n\geq k$ ta có

$$\sum_{i=0}^{k}c_ia_{n-i}=0.$$

Đẳng thức trong định nghĩa trên được gọi là hệ thức truy hồi. Vì biểu thức $\sum_{i=0}^{k}c_ia_{n-i}$ là tuyến tính đối với a_i nên phép truy toán này được gọi là tuyến tính. Vì các số hạng trong biểu thức trên đều có dạng giống nhau nên phép truy toán này được gọi là thuần nhất. Cuối cùng, từ hệ thức truy hồi trên ta thấy mỗi a_n với $n\geq k$ biểu diễn được qua k số a_i trước nó. Vì thế, phép truy toán được gọi là có bậc bằng k.

Ví dụ 1. Xét $F(x)=F_0+F_1x+F_2x^2+F_3x^3+\ldots$ với $F_0=0,F_1=1$ và $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ với mọi $n\geq 2$. Khi đó $F(x)$ thỏa mãn phép truy toán tuyến tính thuần nhất bậc 2 với hệ thức truy hồi $F_n-F_{n-1}-F_{n-2}=0$ cho mọi $n\geq 2$.

Số F_i nói trên được gọi là số Fibonacci thứ i.

Ta nói rằng $a(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ hay dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ thỏa mãn một phép truy toán tuyến tính không thuần nhất bậc k nếu tồn tại các hằng số $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ và hàm $g: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sao cho với mọi $n \geq k$ ta có

$$\sum_{i=0}^{k} c_i a_{n-i} + g(n) = 0.$$

Đẳng thức trong định nghĩa cũng được gọi là hệ thức truy hồi cho phép truy toán tuyến tính không thuần nhất.

Ví dụ 2. Xét $a(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$, trong đó $a_i=\sum_{k=0}^{i} k^2$ cho mọi $i \in \mathbb{N}$. Khi đó $a(x)$ thỏa mãn phép truy toán tuyến tính không thuần nhất bậc 1 với hệ thức truy hồi $a_n - a_{n-1} - n^2 = 0$ cho mọi $n \geq 1$.

Phép truy toán mà không là tuyến tính thuần nhất và cũng không là tuyến tính không thuần nhất được gọi là phép truy toán không tuyến tính. Nếu $a(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ hay dãy số $a_0, a_1, a_2, \ldots$ thỏa mãn phép truy toán không tuyến tính f bậc k, tức là $f(n, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)=0$ với mọi $n \geq k$, thì đẳng thức này cũng được gọi là hệ thức truy hồi cho f.

Ví dụ 3. Ta định nghĩa số Catalan thứ n, ký hiệu là C_n, là số cách chèn n cặp ngoặc tròn vào tích $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$ của $n+1$ số sao cho mỗi lần nhân chỉ có đúng hai thừa số.

Chẳng hạn, ta có các cách chèn các cặp ngoặc tròn sau đây vào tích $x_1 x_2 x_3 x_4$:

$$\left(x_1\left(x_2\left(x_3 x_4\right)\right)\right), \left(\left(x_1 x_2\right)\left(x_3 x_4\right)\right), \left(\left(\left(x_1 x_2\right) x_3\right) x_4\right),$$
$$\left(\left(x_1\left(x_2 x_3\right)\right) x_4\right), \left(x_1\left(\left(x_2 x_3\right) x_4\right)\right).$$

Như vậy, $C_3 = 5$. Dễ thấy rằng, $C_1 = 1, C_2 = 2$. Để cho tiện sử dụng ta định nghĩa $C_0 = 1$.

Ta nhận xét rằng mỗi cách chèn n cặp ngoặc tròn vào tích $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$ của $n+1$ số chứa một cặp ngoặc ngoài cùng mà thực hiện phép nhân tích của $k+1$ số đầu $x_1 x_2 \ldots x_{k+1}$ với tích của $n-k$ số sau $x_{k+2} x_{k+3} \ldots x_{n+1}$, ở đây k có thể là $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Số cách chèn các cặp ngoặc tròn vào tích $x_1 x_2 \ldots x_{k+1}$ là C_k, còn số cách chèn các cặp ngoặc tròn vào tích $x_{k+2} x_{k+3} \ldots x_{n+1}$ là C_{n-k-1}.

Vì vậy ta nhận được $C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + C_2 C_{n-3} + \ldots + C_{n-1} C_0$.

Đây là hệ thức truy hồi không tuyến tính.

Các kết quả sau cho phép ta tìm lời giải của một số phép truy toán tuyến tính thuần nhất.

Kết quả 17. Giả sử $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ là các số sao cho phương trình $x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$ có k nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Khi đó $a(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ là một lời giải của phép truy toán tuyến tính thuần nhất bậc k với hệ thức truy hồi $a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \ldots - c_k a_{n-k} = 0$ cho mọi $n \geq k$ khi và chỉ khi

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n \text{ cho mọi } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_k = a_0 \\ r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_k x_k = a_1 \\ \ldots \\ r_1^{k-1} x_1 + r_2^{k-1} x_2 + \ldots + r_k^{k-1} x_k = a_{k-1} \end{cases}$$

Nhận xét. Hệ phương trình tuyến tính trên có định thức $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \dots & r_k^{k-1} \end{vmatrix}$.

Định thức này là định thức Vandermonde và được tính theo công thức $D=\prod_{i>j}\left(r_i-r_j\right)$. Vì $r_1,r_2,\dots,r_k$ là các số đôi một khác nhau, nên $D\neq 0$. Do đó hệ phương trình tuyến tính trên luôn có duy nhất một nghiệm $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$.

Chứng minh. Giả sử $a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n+\dots+\alpha_kr_k^n$ cho mọi $n=0,1,2,\dots$, trong đó $r_1,r_2,\dots,r_k$ là nghiệm của phương trình tuyến tính nói trên. Khi đó, với $n\geq k$, ta có

$$\begin{aligned}
a_n-c_1a_{n-1}-c_2a_{n-2}-\dots-c_ka_{n-k}&=\left(\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n+\dots+\alpha_kr_k^n\right)-c_1\left(\alpha_1r_1^{n-1}+\alpha_2r_2^{n-1}+\dots+\alpha_kr_k^{n-1}\right)-\dots\\
&\qquad -c_k\left(\alpha_1r_1^{n-k}+\alpha_2r_2^{n-k}+\dots+\alpha_kr_k^{n-k}\right)\\
&=\left(\alpha_1r_1^n-c_1\alpha_1r_1^{n-1}-c_2\alpha_1r_1^{n-2}-\dots-c_k\alpha_1r_1^{n-k}\right)+\dots\\
&\qquad +\left(\alpha_1r_1^n-c_1\alpha_1r_1^{n-1}-c_2\alpha_1r_1^{n-2}-\dots-c_k\alpha_1r_1^{n-k}\right)\\
&=\alpha_1r_1^{n-k}\left(r_1^k-c_1\alpha_1r_1^{k-1}-c_2r_1^{k-2}-\dots-c_k\right)+\dots\\
&\qquad +\alpha_kr_k^{n-k}\left(r_k^k-c_1r_k^{k-1}-c_2r_k^{k-2}-\dots-c_k\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

vì $r_1,r_2,\dots,r_k$ là nghiệm của phương trình $x^k-c_1x^{k-1}-c_2x^{k-2}-\dots-c_k=0$.

Vậy $a(x)$ là lời giải của phép truy toán nói trên.

Ngược lại, giả sử $a(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i$ là lời giải của phép truy toán tuyến tính thuần nhất bậc k với hệ thức truy hồi $a_n-c_1a_{n-1}-c_2a_{n-2}-\dots-c_ka_{n-k}=0$ cho mọi $n\geq k$.

Ta chứng minh rằng $a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n+\dots+\alpha_kr_k^n$ cho mọi $n=0,1,2,\dots$ bằng phương pháp quy nạp theo n. Nếu $n=0,1,2,\dots,k-1$ thì đẳng thức đẳng thức trên là hiển nhiên đúng do $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính nói tới trong Kết quả 17. Giả sử đẳng thức trên đã được chứng minh cho mọi $0\leq n\leq t$ với $t\geq k-1$. Khi đó, do $a(x)$ là lời giải của phép truy toán nói trên, nên

$$a_{t+1}-c_1a_t-c_2a_{t-1}-\dots-c_ka_{t+1-k}=0$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
a_{t+1}&=c_1a_t+c_2a_{t-1}+\dots+c_ka_{t+1-k}\\
&=c_1\left(\alpha_1r_1^t+\alpha_2r_2^t+\dots+\alpha_kr_k^t\right)+\dots+c_1\left(\alpha_1r_1^{t+1-k}+\alpha_2r_2^{t+1-k}+\dots+\alpha_kr_k^{t+1-k}\right) \text{ (theo giả thiết quy nạp)}\\
&=\alpha_1\left(c_1r_1^t+c_2r_1^{t-1}+\dots+c_kr_1^{t+1-k}\right)+\alpha_2\left(c_1r_2^t+c_2r_2^{t-1}+\dots+c_kr_2^{t+1-k}\right)+\dots\\
&\qquad +\alpha_k\left(c_1r_k^t+c_2r_k^{t-1}+\dots+c_kr_k^{t+1-k}\right)\\
&=\alpha_1r_1^{t+1-k}\left(c_1r_1^{k-1}+c_2r_1^{k-2}+\dots+c_k\right)+\alpha_2r_2^{t+1-k}\left(c_1r_2^{k-1}+c_2r_2^{k-2}+\dots+c_k\right)+\dots\\
&\qquad +\alpha_kr_k^{t+1-k}\left(c_1r_k^{k-1}+c_2r_k^{k-2}+\dots+c_k\right)\\
&=\alpha_1r_1^{t+1-k}r_1^k+\alpha_2r_2^{t+1-k}r_2^k+\dots+\alpha_kr_k^{t+1-k}r_k^k
\end{aligned}$$

(vì $r_1,r_2,\dots,r_k$ là nghiệm của phương trình $x^k-c_1x^{k-1}-c_2x^{k-2}-\dots-c_k=0$)

$$=\alpha_1r_1^{t+1}+\alpha_2r_2^{t+1}+\dots+\alpha_kr_k^{t+1}.$$

Tiếp theo ta sẽ đi sâu vào trình bày lời giải cho trường hợp phép truy toán bậc 2.

Kết quả 18.
Giả sử $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ là các số sao cho phương trình $x^2 - c_1x - c_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt r_1 và r_2.
Khi đó $a(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ là lời giải của phép truy toán tuyến tính thuần nhất bậc 2 với hệ thức truy hồi $a_n - c_1a_{n-1} - c_2a_{n-2} = 0$ cho mọi $n \geq 2$ khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ cho mọi $n = 0,1,2,...$,
trong đó $\alpha_1 = \dfrac{a_1 - a_0 r_2}{r_1 - r_2}$ và $\alpha_1 = \dfrac{-(a_1 - a_0 r_1)}{r_1 - r_2}$.

Chứng minh. Suy ra trực tiếp từ Kết quả 17.

Kết quả 19.
Giả sử $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ là các số sao cho phương trình $x^2 - c_1x - c_2 = 0$ có nghiệm kép $r_0 \neq 0$.
Khi đó $a(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ là lời giải của phép truy toán tuyến tính thuần nhất bậc 2 với hệ thức truy hồi $a_n - c_1a_{n-1} - c_2a_{n-2} = 0$ cho mọi $n \geq 2$ khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 (n-1) r_0^n$ cho mọi $n = 0,1,2,...$,
trong đó $\alpha_1 = \dfrac{a_1}{r_0}$ và $\alpha_2 = \dfrac{a_1 - a_0 r_0}{r_0}$.

Chứng minh. Giả sử $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 (n-1) r_0^n$ cho mọi $n = 0,1,2,...$ trong đó $\alpha_1 = \dfrac{a_1}{r_0}$ và $\alpha_1 = \dfrac{a_1 - a_0 r_0}{r_0}$.

Khi đó với $n \geq 2$ ta có

$$\begin{aligned}
a_n - c_1a_{n-1} - c_2a_{n-2} &= \left(\alpha_1 r_0^n + \alpha_2(n-1)r_0^n\right) - c_1\left(\alpha_1 r_0^{n-1} + \alpha_2(n-2)r_0^{n-1}\right) - c_2\left(\alpha_1 r_0^{n-2} + \alpha_2(n-3)r_0^{n-2}\right) \\
&= \left(\alpha_1 r_0^n - c_1\alpha_1 r_0^{n-1} - c_2\alpha_1 r_0^{n-2}\right) + \left(\alpha_2(n-1)r_0^n - c_1\alpha_2(n-2)r_0^{n-1} - c_2\alpha_2(n-3)r_0^{n-2}\right) \\
&= \alpha_1 r_0^{n-2}\left(r_0^2 - c_1r_0 - c_2\right) + \left(\alpha_2 n r_0^n - c_1\alpha_2 n r_0^{n-1} - c_2\alpha_2 n r_0^{n-2}\right) \\
&\qquad - \left(\alpha_2 r_0^n - 2c_1\alpha_2 r_0^{n-1} - 3c_2\alpha_2 r_0^{n-2}\right) \\
&= \alpha_1 r_0^{n-2}\left(r_0^2 - c_1r_0 - c_2\right) + \alpha_2 n r_0^{n-2}\left(r_0^2 - c_1r_0 - c_2\right) - \alpha_2 r_0^{n-2}\left(r_0^2 - 2c_1r_0 - 3c_2\right) \\
&= -\alpha_2 r_0^{n-2}\left(r_0^2 - 2c_1r_0 - 3c_2\right) \text{ (do } r_0 \text{ là nghiệm của phương trình } x^2 - c_1x - c_2 = 0\text{)}
\end{aligned}$$

Vì r_0 là nghiệm kép của phương trình $x^2 - c_1x - c_2 = 0$ nên theo định lý Viete, $r_0 + r_0 = 2r_0 = c_1$ và $r_0 r_0 = r_0^2 = -c_2$.

Do đó $c_1 = 2r_0$ và $c_2 = -r_0^2$.

Suy ra $r_0^2 - 2c_1r_0 - 3c_2 = r_0^2 - 2(2r_0)r_0 - 3(-r_0^2) = r_0^2 - 4r_0^2 + 3r_0^2 = 0$.

Vì vậy, $a_n - c_1a_{n-1} - c_2a_{n-2} = -\alpha_2 r_0^{n-2}\left(r_0^2 - 2c_1r_0 - 3c_2\right) = 0$.

Vậy $a(x)$ là lời giải của phép truy toán nói tới ở trên.

Ngược lại, giả sử $a(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ là lời giải của phép truy toán tuyến tính thuần nhất bậc 2 với hệ thức truy hồi $a_n - c_1a_{n-1} - c_2a_{n-2} = 0$ cho mọi $n \geq 2$.

Ta chứng minh rằng $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 (n-1) r_0^n$ cho mọi $n = 0,1,2,...$ bằng quy nạp theo n, trong đó $\alpha_1 = \dfrac{a_1}{r_0}$ và $\alpha_2 = \dfrac{a_1 - a_0 r_0}{r_0}$.

Với $n = 0$, ta có $\alpha_1 r_0^0 + \alpha_2 (0-1) r_0^0 = \alpha_1 - \alpha_2 = \dfrac{a_1}{r_0} - \dfrac{a_1 - a_0 r_0}{r_0} = \dfrac{a_1}{r_0} - \dfrac{a_1}{r_0} + \dfrac{a_0 r_0}{r_0} = a_0$ và khẳng định đúng cho $n = 0$.

Với $n=1$, ta có $\alpha_1 r_0^1+\alpha_2(1-1)r_0^1=\alpha_1 r_0=\frac{a_1}{r_0}r_0=a_1$. Vậy khẳng định cũng đúng cho $n=1$.

Giả sử đẳng thức đã được chứng minh là đúng cho mọi $n\le t$ với $t\ge 1$. Khi đó, do $a(x)$ là lời giải cho phép truy toán nói trên, nên $a_n-c_1a_{n-1}-c_2a_{n-2}=0$.

Suy ra

$$\begin{aligned}a_{t+1}&=c_1a_t+c_2a_{t-1}=c_1\left(\alpha_1r_0^t+\alpha_2(t-1)r_0^t\right)+c_2\left(\alpha_1r_0^{t-1}+\alpha_2(t-2)r_0^{t-1}\right) \text{ (theo giả thiết quy nạp)}\\&=\left(c_1\alpha_1r_0^t+c_2\alpha_1r_0^{t-1}\right)+\left(c_1\alpha_2(t-1)r_0^t+c_2\alpha_2(t-2)r_0^{t-1}\right)\\&=\alpha_1r_0^{t-1}(c_1r_0+c_2)+\left(c_1\alpha_2tr_0^t+c_2\alpha_2tr_0^{t-1}\right)-\left(c_1\alpha_2r_0^t+2c_2\alpha_2r_0^{t-1}\right)\\&=\alpha_1r_0^{t-1}(c_1r_0+c_2)+\alpha_2tr_0^{t-1}(c_1r_0+c_2)-\alpha_2r_0^{t-1}(c_1r_0+2c_2).\end{aligned}$$

Do r_0 là nghiệm của phương trình $x^2-c_1x-c_2=0$, nên $c_1r_0+c_2=r_0^2$.

Do đó, $a_{t+1}=\alpha_1r_0^{t+1}+\alpha_2tr_0^{t+1}-\alpha_2r_0^{t-1}(c_1r_0+2c_2)$.

Vì r_0 là nghiệm kép của phương trình $x^2-c_1x-c_2=0$, nên theo định lý Viete, $r_0+r_0=2r_0=c_1$ và $r_0r_0=r_0^2=-c_2$. Suy ra, $c_1=2r_0$ và $c_2=-r_0^2$.

Do đó, $c_1r_0+2c_2=(2r_0)r_0+2(-r_0^2)=2r_0^2-2r_0^2=0$.

Vì vậy, $a_{t+1}=\alpha_1r_0^{t+1}+\alpha_2tr_0^{t+1}-\alpha_2r_0^{t-1}(c_1r_0+2c_2)=\alpha_1r_0^{t+1}+\alpha_2tr_0^{t+1}$.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Trương Phước Nhân, Dãy truy hồi tuyến tính – Công cụ ma trận, 22/08/2017.
[2]. Trương Phước Nhân, Dãy truy hồi tuyến tính – Phương pháp toán tử, 21/08/2017.
[3]. Trương Phước Nhân, Phương pháp sử dụng hàm sinh, 09/06/2018.
[4]. Ngô Đắc Tân, Lý thuyết tổ hợp và đồ thị, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.