Ứng dụng chuỗi lũy thừa hình thức trong bài toán đếm

Trương Phước Nhân, 22/06/2018

Trong bài viết này ta sẽ tiếp tục với chủ đề vận dụng chuỗi lũy thừa hình thức trong lý thuyết tổ hợp đã được đề cập cơ bản đến trong bài viết "**Chuỗi lũy thừa hình thức**". Nhiều loại hàm sinh đã được định nghĩa và được sử dụng trong các loại bài toán đếm khác nhau. Tuy nhiên hàm sinh thông thường và hàm sinh mũ là hai loại hàm sinh được sử dụng rộng rãi và hữu hiệu hơn cả. Vì vậy ta chỉ đề cập tới hai loại hàm sinh đó trong bài viết này.

1. Phương pháp đếm bằng hàm sinh thông thường

Giả sử a_i, $i = 0,1,2,...$, là các số phức. Ta nói rằng phần tử $b(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ là hàm sinh cho dãy số $a_0, a_1, a_2, ..., a_i, ...$, mà ta thường ký hiệu đơn giản là $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, nếu tồn tại một tự đẳng cấu φ của không gian vector $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sao cho $\varphi(a(x)) = b(x)$, trong đó $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

Hiển nhiên là với mỗi dãy $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, có nhiều hàm sinh khác nhau cho nó. Tuy nhiên, ta chú ý tới hai hàm sinh thường dùng hiện nay là hàm sinh thông thường và hàm sinh mũ.

Nếu φ là tự đẳng cấu đồng nhất của không gian vector $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, tức là $\varphi(c(x)) = c(x)$ cho mọi $c(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, thì $\varphi(a(x))$ được gọi là hàm sinh thông thường cho dãy $(a_i)_{i=0}^{\infty}$. Như vậy, hàm sinh thông thường cho dãy $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ là chuỗi lũy thừa hình thức $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

Nếu $\varphi: \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}: \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i!} x^i$ cho mọi $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ thì dễ thấy rằng φ là một tự đẳng cấu của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Khi đó $\varphi(a(x))$ được gọi là hàm sinh mũ cho dãy $(a_i)_{i=0}^{\infty}$. Như vậy, hàm sinh mũ cho dãy $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ là chuỗi lũy thừa hình thức $b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, trong đó $b_i = \frac{a_i}{i!}$ cho mọi $i = 0,1,2,...$

Ví dụ 1. Theo công thức nhị thức ta có $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$. Vì $\binom{n}{i} = 0$ nếu $i > n$, nên ta có $(1+x)^n$ chính là chuỗi lũy thừa hình thức $\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i$.

Vậy hàm sinh thông thường cho dãy các hệ số nhị thức $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{i}, ...,$ chính là phần tử $(1+x)^n$ của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Ví dụ 2. Nếu $z \in \mathbb{C}$ ta có $(1 - zx)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i x^i$.

Vì vậy hàm sinh thông thường cho dãy $z^0, z^1, z^2, ..., z^i, ...$ là phần tử $(1 - zx)^{-1}$ của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Ý tưởng sử dụng hàm sinh để giải quyết bài toán đếm có thể tóm tắt như sau:

Giả sử các cấu hình tổ hợp đang cần đếm phụ thuộc vào số tự nhiên i. Ta ký hiệu số các cấu hình tổ hợp này bằng a_i và muốn tính được a_i bằng một biểu thức dễ thực hiện chỉ phụ thuộc vào i ở dạng hiển. Để làm điều đó, ta xét hàm sinh $b(x)$ cho dãy $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, trong đó $b(x) = \varphi(a(x))$ với φ là một tự đẳng cấu của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Khi đó, do tính chất của dãy $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $b(x)$ cần thỏa mãn các hệ thức nhất định. Giải các hệ thức này ta tìm được biểu thức $f_b(x)$ của hàm sinh $b(x)$ cho dãy $(a_i)_{i=0}^{\infty}$. Biểu thức tìm được này thường là một biểu thức với các phép toán trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ như phép cộng, phép nhân, phép lấy phần tử đối, phép lấy phần tử nghịch đảo, phép lũy thừa,... của các hàm đã biết trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Nói chung, biểu thức này chưa ở dạng chuỗi lũy thừa. Vì vậy sau khi tìm được biểu thức $f_b(x)$ ta tìm cách khai triển nó thành chuỗi lũy thừa, tức là biểu diễn $f_b(x)$ thành dạng $f_b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ bằng một cách nào đó, ở đây b_i là một biểu thức phụ thuộc vào i ở dạng hiển.

Do $b(x)=f_b(x)$ là hàm sinh cho dãy $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, ta có $\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = f_b(x)=\varphi(a(x))=\varphi\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)$.

Suy ra $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right)$. Từ đó ta tìm được công thức cho a_i qua i ở dạng hiển và giải quyết được bài toán đếm đặt ra.

Ví dụ 3. Ta định nghĩa $F_0=0, F_1=1$, còn với $i\ge 2$ ta định nghĩa F_i là số các tập con của tập $X=\{1,2,...,i-2\}$ thỏa mãn điều kiện là mỗi tập con đó đều không chứa hai số liên tiếp nào của tập X.

Khi đó các số F_i, $i=0,1,2,...$, được gọi là các số Fibonacci. Cụ thể hơn, số F_i được gọi là số Fibonacci thứ i.

Bài toán đặt ra là tìm công thức tính F_i qua i.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh rằng với mọi $i\ge 2$, $F_i=F_{i-1}+F_{i-2}$.

Ta có $F_2=1, F_3=2$. Do đó, đẳng thức trên đúng với $i=2,3$. Giả sử $i\ge 4$, $X=\{1,...,i-2\}$ và P là tập tất cả các tập con của X thỏa mãn điều kiện là mỗi tập con đó đều không chứa hai số liên tiếp nào của X. Ký hiệu $P_1=\{A\in P \mid A \text{ chứa } i-2\}$ và $P_1=\{A\in P \mid A \text{ chứa } i-2\}$. Khi đó $P_1\cap P_2=\varnothing$ và $P=P_1\cup P_2$. Theo qui tắc cộng, $F_i=|P|=|P_1|+|P_2|$. Mỗi $A\in P_1$ đều không thể chứa $j-3$. Do đó mỗi $A\in P_1$ tương ứng với đúng một tập con của $X\setminus\{i-3,i-2\}=\{1,2,...,i-4\}$ thỏa mãn điều kiện là nó không chứa hai số liên tiếp nào của tập $X\setminus\{i-3,i-2\}$. Suy ra $|P_1|=F_{i-2}$. Mỗi tập con $A\in P_2$ cũng là một là một tập con của $X\setminus\{i-2\}=\{1,2,...,i-3\}$. Vì vậy, $|P_2|=F_{i-1}$. Suy ra $F_i=F_{i-1}+F_{i-2}$.

Ta muốn tìm biểu thức tính F_i qua i bằng cách sử dụng hàm sinh thông thường. Giả sử $f(x)$ là hàm sinh thông thường cho dãy $(F_i)_{i=0}^{\infty}$. Khi đó,

$$f(x)=F_0+F_1x+F_2x^2+F_3x^3+...,$$
$$xf(x)=F_0x+F_1x^2+F_2x^3+F_3x^4+...,$$
$$x^2f(x)=F_0x^2+F_1x^3+F_2x^4+F_3x^5+...$$

Do đó, $f(x)-xf(x)-x^2f(x)=F_0+(F_1-F_0)x+(F_2-F_1-F_0)x^2+...+(F_i-F_{i-1}-F_{i-2})x^i+...=x$ vì $F_0=1, F_1=1$ và $F_i=F_{i-1}+F_{i-2}$ cho mọi $i\ge 2$.

Suy ra, $(1-x-x^2)f(x)=x \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$.

Như vậy là ta đã tìm được hàm sinh cho dãy $(F_i)_{i=0}^{\infty}$ dưới dạng biểu thức số học của các hàm hữu tỷ, cụ thể là $f(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$. Tiếp theo, ta muốn biểu diễn $f(x)$ dưới dạng chuỗi lũy thừa hình thức. Để làm điều đó, trước tiên ta phân tích $\dfrac{x}{1-x-x^2}$ thành tổng của các phân thức đơn giản bằng phương pháp hệ số bất định.

Xét tam thức bậc hai $1-x-x^2$. Tam thức này có hai nghiệm phân biệt là $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{-2}$ và $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{-2}$.

Suy ra,

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{-x}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}=\frac{Ax-Ab+Bx-Ba}{(x-a)(x-b)}=\frac{(A+B)x-(Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)}.$$

Vì vậy ta nhận được hệ phương trình sau đây để xác định A và B:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ Ab+Ba=0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được $A=\dfrac{a}{b-a}$ và $B=\dfrac{-b}{b-a}$, tức là

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{a}{(b-a)(x-a)}-\frac{b}{(b-a)(x-b)}$$

Ta có

$$\frac{a}{(b-a)(x-a)}=\frac{1}{a-b}.\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=\frac{1}{a-b}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{a^i},$$

$$\frac{b}{(b-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}.\frac{1}{1-\frac{x}{b}}=\frac{1}{a-b}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{b^i}.$$

Vì $a-b=-\sqrt{5}$ nên từ hai đẳng thức trên ta nhận được

$$\frac{x}{1-x-x^2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{a^i}+\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{b^i}$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{b^i}-\frac{1}{a^i}\right)\right]x^i.$$

Lại có $\frac{1}{b^i}-\frac{1}{a^i}=\frac{a^i-b^i}{(ab)^i}=\frac{a^i-b^i}{(-1)^i}=(-a)^i-(-b)^i$.

Suy ra, $F_i=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right]$ cho mọi $i=0,1,2,...$.

Một điều lý thú trong công thức trên là ta đã dùng số vô tỷ để biểu diễn các số nguyên.

Nhận xét. Ta thấy rằng $F(x)$ thỏa mãn phép truy toán tuyến tính thuần nhất bậc 2 với hệ thức truy hồi $F_i-F_{i-1}-F_{i-2}=0$ cho mọi $i\geq 2$. Vì vậy, ta có thể tính F_i như sau

Phương trình $x^2-x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt là $r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Do đó, $\alpha_1=\frac{F_0-F_0r_2}{r_1-r_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha_1=\frac{-(F_1-F_0r_1)}{r_1-r_2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ nên $F_i=\alpha_1r_1^i+\alpha_2r_2^i=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right]$ cho mọi $i=0,1,2,...$

Ví dụ 4.

Có i hình vuông rời nhau kích thước tương ứng là 1×1, 2×2, ..., $i\times i$ cần được lát bằng các viên gạch kích thước 1×1. Tính số viên gạch cần thiết để lát đủ i hình vuông đó (bằng công thức phụ thuộc vào i)

Lời giải.

Gọi a_i là số viên gạch cần thiết để lát đủ i hình vuông đã cho. Khi đó dễ thấy rằng $a_i=\sum_{k=0}^{i}k^2$.

Do đó, $a_0=0$ và $a_i-a_{i-1}=\sum_{k=0}^{i}k^2-\sum_{k=0}^{i-1}k^2=i^2$ cho mọi $i\geq1$, tức là các số $a_0,a_1,a_2,...,a_i,...$ thỏa mãn hệ thức truy hồi tuyến tính bậc 1 không thuần nhất $a_i-a_{i-1}-i^2=0$.

Ta sử dụng hàm sinh thông thường để tính a_i. Giả sử $a(x)$ là hàm sinh thông thường cho dãy $(a_i)_{i=0}^{\infty}$.

Khi đó,

$$a(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...,$$
$$xa(x)=a_0x+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4+...$$

Do đó,

$$a(x)-xa(x)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+(a_3-a_2)x^3+...$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}i^2x^i.$$

Suy ra, $(1-x)a(x)=\sum_{i=0}^{\infty} i^2x^i$.

Ta muốn nhận được biểu thức số học của các hàm hữu tỷ cho chuỗi ở bên phải trong đẳng thức trên. Để làm điều đó, ta xuất phát từ đẳng thức sau đây:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{2+i-1}{i}x^i \Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i .$$

Suy ra $\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^{i+1}$.

Áp dụng toán tử đạo hàm D vào cả hai vế của đẳng thức này, ta được

$$D\left(x(1-x)^{-2}\right)=D\left(\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^{i+1}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^2x^i .$$

Đẳng thức cuối cùng ta có được từ định nghĩa của toán tử D.

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} D\left(x(1-x)^{-2}\right)&=D(x)(1-x)^{-2}+xD\left((1-x)^{-2}\right)\\ &=(1-x)^{-2}+x\left(-2(1-x)^{-3}D(1-x)\right)\\ &=(1-x)^{-2}+2x(1-x)^{-3}\\ &=(1+x)(1-x)^{-3}. \end{aligned}$$

Do đó $\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^2x^i$.

Suy ra, $\frac{x+x^2}{(1-x)^3}=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^2x^{i+1}=\sum_{i=0}^{\infty}i^2x^i$.

Nhưng như ta đã chứng minh ở trên rằng $(1-x)a(x)=\sum_{i=0}^{\infty}i^2x^i$. Vì vậy, $(1-x)a(x)=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$,

tức là $a(x)=\frac{x+x^2}{(1-x)^4}$.

Như vậy là ta đã tìm được hàm sinh $a(x)$ cho dãy số cần tìm dưới dạng hàm hữu tỷ. Tiếp tục, để nhận được biểu thức cho a_i qua i, ta phải tìm cách khai triển hàm $a(x)=\frac{x+x^2}{(1-x)^4}$ thành chuỗi lũy thừa. Để làm điều đó ta phân tích phần thức này thành tổng các phân thức đơn giản bằng phương pháp hệ số bất định.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x+x^2}{(1-x)^4}&=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{(1-x)^3}+\frac{D}{(1-x)^4}\\ &=\frac{A(1-x)^3+B(1-x)^2+C(1-x)+D}{(1-x)^4}\\ &=\frac{A\left(1-3x+3x^2-x^3\right)+B\left(1-2x+x^2\right)+C(1-x)+D}{(1-x)^4}\\ &=\frac{-Ax^3+(3A+B)x^2+(-3A-2B-C)x}{(1-x)^4}. \end{aligned}$$

Suy ra,

$$\begin{cases}-A=0,\\ 3A+B=1,\\ -3A-2B-C=1,\\ A+B+C+D=0.\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được $A=0, B=1, C=-3, D=2$, tức là

$$a(x)=\frac{x+x^2}{(1-x)^4}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{3}{(1-x)^3}+\frac{2}{(1-x)^4}.$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}a(x)&=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{3}{(1-x)^3}+\frac{2}{(1-x)^4}\\ &=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+1}{i}x^i-3\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+2}{i}x^i+2\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+3}{i}x^i\\ &=\sum_{i=0}^{\infty}\left[\binom{i+1}{i}-3\binom{i+2}{i}+2\binom{i+3}{i}\right]x^i\\ &=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}x^i.\end{aligned}$$

Suy ra $a_i=\sum_{k=0}^{i}k^2=\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}$.

Ví dụ 5. Số Catalan thứ i, ký hiệu là C_i, là số cách chèn i cặp ngoặc tròn vào tích $x_1x_2...x_{i+1}$ của $i+1$ số sao cho mỗi lần nhân chỉ có đúng hai thừa số. Khi đó $C_1=1, C_2=2$. Ta cũng định nghĩa $C_0=1$ và dễ dàng chứng minh được rằng $C_i=C_0C_{i-1}+C_1C_{i-2}+C_2C_{i-3}+...+C_{i-1}C_0$ cho mọi $i\geq 1$.

Bây giờ ta đi tìm công thức tính C_i qua i.

Giả sử $C(x)$ là hàm sinh thông thường cho dãy $(C_i)_{i=0}^{\infty}$.

Khi đó,

$$\begin{aligned}C(x)&=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+...\\ (C(x))^2&=C_0^2+(C_0C_1+C_1C_0)x+(C_0C_2+C_1C_1+C_2C_0)x^2+...\\ &\quad+(C_0C_{i-1}+C_1C_{i-2}+...+C_{i-1}C_0)x^{i-1}+...\\ &=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+...\end{aligned}$$

Vì thế $x^2(C(x))^2=x\left[C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+...\right]=x\left[C(x)-1\right]=xC(x)-x$, tức là $(xC(x))^2-xC(x)+x=0$. Giải phương trình bậc hai trên đối với $xC(x)$ ta tìm được $xC(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2}$.

Vì $S(-4x)=0$, nên ta có hệ số của $(-4x)^i$ trong $\sqrt{1-4x}$ bằng $\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)...\left(\frac{1}{2}-i+1\right)}{i!}$, tức là hệ số của x^i trong khai triển thành chuỗi lũy thừa của $\sqrt{1-4x}$ bằng

$$\begin{aligned}&\frac{(-4)^i\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)...\left(\frac{1}{2}-i+1\right)}{i!}\\ &=\frac{(-2)^{2i}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)...\left(-\frac{2i-3}{2}\right)}{i!}\\ &=(-1)^i2^{2i}\frac{1.3.5...(2i-3)}{i!(-1)^{i-1}2^i}\end{aligned}$$

$$= -2^i \frac{1.3.5...(2i-3)}{i!}.$$

Vì vậy, chung là các số nguyên âm cho mọi $i \geq 1$. Điều đó chứng tỏ rằng $\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}$ không thể bằng $xC(x)$ vì các hệ số của x^i trong $xC(x)$ là các số nguyên dương.

Vậy

$$xC(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{1!}x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^3.1.3}{3!}x^3 + ... + \frac{2^i.1.3.5...(2i-3)}{i!}x^i + ...\right]$$
$$= x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^2.1.3}{3!}x^3 + ... + \frac{2^{i-1}.1.3.5...(2i-3)}{i!}x^i + ...$$

Suy ra

$$C(x) = 1 + \frac{2}{2!}x + \frac{2^2.1.3}{3!}x^2 + ... + \frac{2^{i-1}.1.3.5...(2i-3)}{i!}x^{i-1} + ...$$

Do đó,

$$C_i = \frac{2^i.1.3.5...(2i-1)}{(i+1)!} = \frac{2^i.1.2.3.4....(2i-1)(2i)}{(i+1)!2.4....(2i)} = \frac{2^i.(2i)!}{(i+1)!i!2^i}.$$

Vì vậy, ta nhận được $C_i = \frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}$.

Ví dụ 6. Một biểu diễn của số nguyên dương n dưới dạng tổng có thứ tự của k số nguyên dương được gọi là một hợp thành của n thành k phần. Một hợp thành của n chính là một hợp thành của n thành k phần với k là số nguyên dương nào đó.

Người ta cũng thường đồng nhất hợp thành của n thành k phần với lời giải nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$.

Ký hiệu số hợp thành của n thành k phần là $C(n,k)$, còn số tất cả các hợp thành của n là $C(n)$. Mỗi một hợp thành $(a_1, a_2, ..., a_k)$ ta cho tương ứng với một tập con $k-1$ phần tử của tập $[n-1] = \{1, 2, ..., n-1\}$ như sau: $(a_1, a_2, ..., a_k) \mapsto (a_1, a_1 + a_2, ..., a_1 + a_2 + ... + a_{k-1})$.

Ngược lại, tập con $\{s_1, s_2, ..., s_{k-1}\}$ với $k-1$ phần tử với $s_1 < s_2 < ... < s_{k-1}$ của $[n-1]$ xác định một hợp thành $(a_1, a_2, ..., a_k)$ của n thành k phần tương ứng với nó như sau: $a_1 = s_1, a_2 = s_2 - s_1, ..., a_i = s_i - s_{i-1}$ ($2 \leq i \leq k-1$),..., $a_k = n - s_{k-1}$. Dễ dàng chứng minh rằng tương ứng trên là tương ứng một – một.

Do đó,

$$C(n,k) = \binom{n-1}{k-1},$$
$$C(n) = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + ... + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}.$$

Phân hoạch của một số nguyên $n \geq 0$ là một dãy có thứ tự $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ các số nguyên dương $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ sao cho $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k$ và $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = n$. Nếu $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ là phân hoạch của n thì ta ký hiệu $\lambda \vdash n$ và gọi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ là các phần của nó.

Như vậy, một phân hoạch của một số nguyên dương chính là một hợp thành của số đó, trong đó ta không quan tâm tới thứ tự của các số hạng. Một phân hoạch λ của n được xác định một cách duy nhất bởi số bội của các phần có thể là $1, 2, ..., n$. Nếu i xuất hiện với bội $a_i \geq 0$, thì ta viết $\lambda = 1^{a_1}2^{a_2}...n^{a_n}$. Nếu $a_1 + a_2 + ... + a_n = k$ và $\lambda = 1^{a_1}2^{a_2}...n^{a_n}$ là một phân hoạch của n thành k phần thì $n = 1.a_1 + 2.a_2 + 3.a_3 + ... + n.a_n$.

Sự xuất hiện của số i với các bội số có thể được biểu diễn bằng chuỗi lũy thừa hình thức

$$a_i(x)=1+(x^i)^1+(x^i)^2+(x^i)^3+...$$

Dễ thấy rằng dãy các chuỗi lũy thừa hình thức $a_1(x),a_2(x),a_3(x),...,a_i(x),...$ là khả tích, tức là ta có thể xác định phần tử $\prod_{i=1}^{\infty}a_i(x)$ trong $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Hơn thế nữa, phân hoạch $\lambda=1^{a_1}2^{a_2}...n^{a_n}$ tương ứng với duy nhất một số hạng $(x^1)^{a_1}(x^2)^{a_2}...(x^n)^{a_n}$ của tích $\prod_{i=1}^{\infty}a_i(x)$. Do đó, hệ số của x^n trong tích trên chính là tổng số các phân hoạch của n, tức là hàm sinh cho dãy các số phân hoạch của các số nguyên không âm là

$$p(x)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+(x^i)^1+(x^i)^2+(x^i)^3+...\right)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}.$$

2. Phương pháp đếm bằng hàm sinh mũ

Trong mục trước ta đã định nghĩa hàm sinh mũ cho dãy số $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ là chuỗi lũy thừa hình thức

$$b(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i\text{, trong đó } b_i=\frac{a_i}{i!}\text{ cho mọi } i=0,1,2,...$$

Hàm sinh mũ đóng một vai trò nền tảng trong nghiên cứu các loài tổ hợp. Trong mục này ta chỉ đề cập tới phương pháp sử dụng hàm sinh mũ để giải quyết một số bài toán đếm như thế nào.

Giả sử với mỗi tập hữu hạn N ta có một tập $S(N)$ các vật mà ta muốn đếm. Các vật của $S(N)$ có thể xem như là "được gán nhãn" bởi tập N. Vì vậy, tập N có thể xem như là tập giá hay ngắn gọn gọi là giá của $S(N)$. Do đó, nếu N và M là các tập hữu hạn khác nhau, tức là $N\neq M$, thì ta luôn giả thiết rằng $S(N)\cap S(M)=\varnothing$. Hơn thế nữa, nếu $|N|=|M|$, thì ta sẽ luôn giả thiết rằng $|S(N)|=|S(M)|$.

Khi đó, hàm sinh mũ cho dãy các tập $S[0],S[1],S[2],...$ hay ngắn gọn $(S[i])_{i=0}^{\infty}$, được định nghĩa là hàm sinh mũ cho dãy số $|S[0]|,|S[1]|,|S[2]|,...$

Giả sử $(T[i])_{i=0}^{\infty}$ là một dãy các tập các vật khác. Ta định nghĩa tập $ST[i]$ là tập bao gồm tất cả các cặp (σ,τ), trong đó σ là một phần tử của tập $S(K)$ với K là một tập con bất kỳ của $[i]$, còn τ là một phần tử của tập $T(\overline{K})$ với $\overline{K}=[i]\setminus K$.

Khi đó, $|ST[i]|=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}|S[k]||T[i-k]|$.

Ký hiệu hàm sinh mũ cho dãy $(S[i])_{i=0}^{\infty}$, $(T[i])_{i=0}^{\infty}$ và $(ST[i])_{i=0}^{\infty}$ tương ứng bằng $s(x),t(x)$ và $st(x)$.

Khi đó, từ định nghĩa của $ST[i]$ ở trên ta dễ thấy rằng $st(x)=s(x)t(x)$.

Bây giờ ta xét một số ví dụ cụ thể, ở đó hàm sinh đã được áp dụng một cách thành công để giải quyết bài toán đếm.

Ví dụ 7. Giả sử X là một tập hữu hạn và $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$. Ta sẽ đồng nhất hoán vị $(a_1,a_2,...,a_n)$ của các phần tử của X với song ánh $\varphi:X\to X:x_i\mapsto a_i$. Khi đó phần tử $x_i\in X$ được gọi là điểm bất động của hoán vị φ trên X nếu $\varphi(x_i)=x_i$. Hoán vị φ của X mà không có điểm bất động nào được gọi là một mất thứ tự của X. Số tất cả các mất thứ tự của tập hữu hạn X có n phần tử được ký hiệu là D_n.

Bài toán đặt ra là tính D_n theo n.

Lời giải. Giả sử $P[n]$ là tập tất cả các hoán vị của tập $[n]$ và $p(x)$ là hàm sinh mũ cho dãy $P[0],P[1],P[2],...,P[n],...$. Mỗi hoán vị của $[n]$ có thể phân tích thành tích của các chu trình độc lập, tức là nó có dạng

$$(**...*)(**...*)...(**...*)(*)(*)...(*),$$

trong đó các chu trình $(*)$ tương ứng với các điểm bất động của hoán vị đó. Vì vậy, mỗi hoán vị φ của $[n]$ có thể xem như là cặp (σ,τ) với σ là một hoán vị không có điểm bất động trên $K\subseteq[n]$ (một mất thứ tự) và τ là một hoán vị đồng nhất trên $\overline{K}=[n]\setminus K$.

Ký hiệu $I[n]$ là tập các hoán vị đồng nhất trên $[n]$, còn $D[n]$ là tập các mất trật tự trên $[n]$. Khi đó $|I[n]|=1$ và $|D[n]|=D_n$ cho mọi $n=0,1,2,...$ Do đó, hàm sinh mũ cho dãy $(I[i])_{i=0}^{\infty}$ và $(D[i])_{i=0}^{\infty}$ tương ứng là

$$i(x)=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+...=E(x),$$
$$d(x)=D_0+\frac{D_1}{1!}x+\frac{D_2}{2!}x^2+\frac{D_3}{3!}x^3+....$$

Vì $|P[n]|=n!$, nên hàm sinh mũ cho dãy $(P[i])_{i=0}^{\infty}$ là

$$p(x)=1+\frac{1!}{1!}x+\frac{2!}{2!}x^2+\frac{3!}{3!}x^3+...=1+x+x^2+x^3+...$$

Mặt khác, như đã lập luận ở trên, ta có $P[n]=DI[n]$. Vì vậy $p(x)=di(x)=d(x)i(x)$, trong đó $di(x)$ là hàm sinh mũ cho dãy $(DI[i])_{i=0}^{\infty}$.

Suy ra, $d(x)=p(x)(i(x))^{-1}=p(x)(E(x))^{-1}=p(x)E(-x)$

$$=(1+x+x^2+x^3+...)\left(1-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+...\right)$$
$$=1+...+\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)x^n+...$$

Vì vậy, $D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$.

Xét hàm sinh mũ của dãy các tập $(S[i])_{i=0}^{\infty}$: $s(x)=|S(\varnothing)|+\frac{|S([1])|}{1!}x+\frac{|S([2])|}{2!}x^2+\frac{|S([3])|}{3!}x^3+...$

Khi đó, nếu ký hiệu $D(s(x))$ bằng $s'(x)$ và tập các vật được đếm bởi $s'(x)$ với giá $[i]$ bằng $S'[i]$, thì

$$s'(x)=|S([1])|+\frac{|S([2])|}{1!}x+\frac{|S([3])|}{2!}x^2+\frac{|S([4])|}{3!}x^3+...$$

Đẳng thức trên chứng tỏ rằng $S'[i]=S[i+1]$ cho mọi $i\ge 0$. Phần tử "thừa" $i+1$ cho tập $S'[i]$ có nhiều ưu việt mà ta có thể sử dụng để thiết lập các hệ thức mà $s(x)$ cần phải thỏa mãn. Ta minh họa điều này và phương pháp sử dụng hàm sinh mũ cho bài toán đếm thông qua hai ví dụ dưới đây.

Ví dụ 8. Có i vị trí trên một vòng tròn. Mỗi cách sắp xếp i số của tập $[i]=\{1,2,...,i\}$ vào i vị trí đó được gọi là một sắp xếp thành vòng tròn của tập $[i]$. Hai sắp xếp thành vòng tròn của tập $[i]$ được coi là như nhau nếu cùng xuất phát từ vị trí chứa số 1 và đi theo chiều quay của kim đồng hồ ta lần lượt gặp các số tương ứng bằng nhau trong hai sắp xếp đó.

Bài toán đặt ra là tính số sắp xếp thành vòng tròn của tập $[i]$ theo i.

Lời giải. Ký hiệu tập các sắp xếp thành vòng tròn của tập $[i]$ bằng $C([i])$. Giả sử $c(x)$ là hàm sinh mũ cho dãy $(C([i]))_{i=0}^{\infty}$ và $c'(x)=D(c(x))$. Khi đó, như ta đã có nhận xét ở trên đối với đạo hàm của hàm sinh mũ, các sắp xếp thành vòng tròn của tập $[i+1]$ được đếm bởi $c'(x)$ với giá $[i]$. Mặt khác, mỗi sắp xếp thành vòng tròn của tập $[i+1]$ cũng có thể đồng nhất với một sắp xếp thành hàng ngang của tập $[i]$ bằng cách "cắt" vị trí chứa số $i+1$ ra khỏi vòng và "căng" các vị trí còn lại của sắp xếp ra "thành hàng ngang" với số đầu tiên là số sau $i+1$ trên vòng tròn theo chiều kim đồng hồ. Vì vậy, nếu ta ký hiệu $P([i])$ là tập các sắp xếp thành hàng ngang của tập $[i]$ và $p(x)$ là hàm sinh mũ cho dãy $\left(P([i])\right)_{i=0}^{\infty}$, thì

$$c'(x)=p(x) \text{ với } S(c(x))=1 \text{(bởi vì } |C(\varnothing)|=1).$$

Hiển nhiên là $P([i])$ chính là tập các hoán vị của $[i]$ và vì thế $|P([i])|=i!$.

Do đó, $p(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i!}{i!}x^i=\sum_{i=0}^{\infty}x^i=\frac{1}{1-x}$.

Vậy $c'(x)=\frac{1}{1-x}$ với $S(c(x))=1$.

Suy ra $c(x)=-L(1-x)+c_0$ với c_0 là một hằng số.

Từ $S(c(x))=1$ và $S(L(1-x))=0$ suy ra $c_0=1$ và ta nhận được

$$c(x)=1-L(1-x)=1-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i}(-x)^i=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}x^i=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(i-1)!}{i!}x^i.$$

Vậy $|C([i])|=(i-1)!$

Ví dụ 9. Hoán vị $(a_1,a_2,...,a_{2i-1})$ của tập $[2i-1]$ được gọi là E - hoán vị của tập $[2i-1]$ nếu $a_k>a_{k-1}$ cho k chẵn và $a_k<a_{k-1}$ cho k lẻ.

Lời giải. Giả sử $T([2i-1])$ là tập các E - hoán vị của tập $[2i-1]$, $t_{2k-1}=|T([2i-1])|$. Đặt $T([2i])=\varnothing$, khi đó $|T([2i])|=0$ và nếu $t(x)$ là hàm sinh mũ cho dãy các tập $\left(T([i])\right)_0^{\infty}$, thì

$$t(x)=\frac{t_1}{1!}x+\frac{t_3}{3!}x^3+\frac{t_5}{5!}x^5+....$$

Ký hiệu $D(t(x))$ bằng $t'(x)$. Khi đó

$$t'(x)=\frac{t_1}{1!}+\frac{t_3}{3!}x^2+\frac{t_5}{5!}x^4+...$$

Như vậy là các E - hoán vị của tập $[2i-1]$ được đếm bởi $t'(x)$ với giá $[2i-2]$. Dễ thấy rằng trong mỗi E - hoán vị $(a_1,a_2,...,a_{2i-1})$ của tập $[2i-1]$, số $2i-1$ cần phải ở vị trí chẵn (vì $2i-1$ là số lớn nhất trong tập $[2i-1]$). Do đó, với $i\ge 2$ phần bên trái của $2j-1$ trong một E - hoán vị α của tập $[2i-1]$ tạo thành một E - hoán vị σ của tập con K với số phần tử lẻ nào đó của tập $[2i-2]$; còn phần bên phải của $2j-1$ trong α tạo thành một E - hoán vị τ của tập $[2i-2]\setminus K$. Dễ thấy rằng tương ứng α với cặp (σ,τ) nói trên là tương ứng một – một. Như vậy, ta nhận được tương ứng một – một giữa các phần tử của $T([2i-1])$ và $T^2([2i-2])$ cho mọi $i\ge 2$.

Lại có $S(t'(x))=t_1=1$.

Vì vậy ta nhận được phương trình $t'(x)=1+t^2(x)$.

Suy ra $t(x)=\tan(x)$.

Việc tìm dạng biểu diễn của $\tan(x)$ dưới dạng chuỗi lũy thừa để tìm ra các số E - hoán vị t_{2i-1} là một bài toán thú vị. Nó liên quan tới số Bernoulli B_i, một trong các số có vai trò quan trọng trong nhiều bài toán tổ hợp và được định nghĩa như sau.

Giả sử $e(x)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ là phần tử sao cho $E(x)-1=xe(x)$. Khi đó hiển nhiên là $e(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)!}x^i$ và $S(e(x))=1$. Theo một kết quả quen thuộc $e(x)$ là phần tử khả nghịch của $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Giả sử $e^{-1}(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i$ là phần tử nghịch đảo của $e(x)$. Khi đó các số B_i, $i=0,1,2,...$, được gọi là các số Bernoulli.

Vì $e(x)e^{-1}(x)=1$ nên ta có $B_0=1, \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{1}{k+1}B_{i-k}=0$ cho $i=1,2,...$

Theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned}
& xe(x)=E(x)-1 \\
\Leftrightarrow & -xe(x)=1-E(x) \\
\Leftrightarrow & -xe(x)=\left[\left(E(x)-1\right)+1\right]\left[E(-x)-1\right] \\
\Leftrightarrow & -xe(x)=\left(xe(x)+1\right)\left(-xe(-x)\right) \\
\Leftrightarrow & \quad e(x)=xe(x)e(-x)+e(-x) \\
\Leftrightarrow & e^{-1}(-x)=x+e^{-1}(x).
\end{aligned}$$

Ta lại có

$$e^{-1}(-x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}(-x)^i.$$

Do đó $$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{B_i}{i!}x^i=x+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}x^i.$$

Suy ra $B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}$ và $B_{2i+1}=0$ cho mọi $i=1,2,...$.

Vì vậy, $e^{-1}(x)=1-\frac{x}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_{2i}}{(2i)!}x^{2i}$.

Từ định nghĩa của $\sin(a(x)),\cos(a(x))$ và $E(a(x))$ và $\tan(a(x))$ và tính chất của $E(a(x))$ ta có

$$\begin{aligned}
x\tan(x) &= x\sin(x)\cos^{-1}(x) \\
&= x\left[\frac{E(ix)-E(-ix)}{2i}\right]\left[\frac{2}{E(ix)+E(-ix)}\right] \\
&= \frac{x}{i}\left[\frac{E^2(ix)+E^2(-ix)-2E(ix)E(-ix)}{E^2(ix)-E^2(-ix)}\right] \\
&= \frac{x}{i}\left[\frac{\left(E(2ix)+E(-2ix)-2\right)E(2ix)}{E(4ix)-1}\right] \\
&= \frac{x}{i}\left[\frac{E(4ix)+1-2E(2ix)}{E(4ix)-1}\right] \\
&= \frac{xi\left[2\left(E(2ix)-1\right)-\left(E(4ix)-1\right)\right]}{E(4ix)-1} \\
&= \frac{2ix\left(E(2ix)-1\right)}{E(4ix)-1}-ix \\
&= \frac{2ix\left(E(2ix)+1\right)-4ix}{E(4ix)-1}-ix \\
&= \frac{2ix\left(E(2ix)+1\right)}{\left(E(2ix)-1\right)\left(E(2ix)+1\right)}-\frac{4ix}{E(4ix)-1}-ix \\
&= \frac{2ix}{2ixe(2ix)}-\frac{4ix}{4ixe(4ix)}-ix \\
&= e^{-1}(2ix)-e^{-1}(4ix)-ix.
\end{aligned}$$

Vậy $x\tan(x)=e^{-1}(2ix)-e^{-1}(4ix)-ix$.

Mặt khác, ta đã chứng minh ở trên rằng

$$e^{-1}(x)=1-\frac{x}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_{2i}}{(2i)!}x^{2i}.$$

Do đó

$$x\tan(x)=\left[1-\frac{2ix}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_{2i}}{(2i)!}(2ix)^{2i}\right]-\left[1-\frac{4ix}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_{2i}}{(2i)!}(4ix)^{2i}\right]-ix.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\tan(x)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left(2^{2i}-4^{2i}\right)i^{2i}x^{2i-1}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_{2i}}{(2i)!}2^{2i}\left(2^{2i}-1\right)(i^2)^{i-1}x^{2i-1}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_{2i}}{(2i)!}2^{2i}\left(2^{2i}-1\right)(i^2)^{i-1}x^{2i-1}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}2^{2i}\left(2^{2i}-1\right)B_{2i}}{(2i)!}x^{2i-1}.\end{aligned}$$

Vì vậy, $t_{2i-1}=\dfrac{(-1)^{i-1}4^i\left(4^i-1\right)B_{2i}}{2i}$ cho mọi $i=1,2,3,\ldots$.

Từ hệ thức truy hồi $B_0=1,\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{1}{k+1}B_{i-k}=0$ ta có thể tính được các số Bernoulli B_{2i}. Từ đó ta tính được t_{2i-1}.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Trương Phước Nhân, Chuỗi lũy thừa hình thức, 09/06/2018.
[2]. Trương Phước Nhân, Công thức tính số derangement, 21/09/2017.
[3]. Trương Phước Nhân, Phương pháp sử dụng hàm sinh, 09/06/2018.
[4]. Ngô Đắc Tân, Lý thuyết tổ hợp và đồ thị, NXB Đại học Quốc Gia.