Đồ thị strong regular

Trương Phước Nhân, 16/07/2018

Trong bài viết này ta sẽ xem xét các đồ thị vô hướng không có khuyên và không chứa các cạnh kép, có nghĩa là nếu p_i và p_j là hai đỉnh phân biệt của đồ thị G thì có tối đa một cạnh nối p_i và p_j. Nếu p là một đỉnh của đồ thị G, ta định nghĩa bậc của p là số các cạnh nhận p làm một đầu mút. Đồ thị G được gọi là regular nếu tất cả các đỉnh của G đều có cùng bậc.

Đồ thị đầy đủ K_v là một đồ thị có v đỉnh và hai đỉnh bất kỳ đều được nối với nhau bởi một cạnh, nên K_v là regular với bậc $v-1$. Đồ thị bù $\overline{G}$ của đồ thị G là đồ thị có cùng tập đỉnh với G nhưng nếu p_i và p_j là hai đỉnh được nối với nhau bởi một cạnh của G thì p_i và p_j sẽ không được nối với nhau bởi một cạnh nào của đồ thị $\overline{G}$ và tương tự trong trường hợp ngược lại nếu p_i và p_j là hai đỉnh không được nối với nhau bởi một cạnh của G thì p_i và p_j sẽ được nối với nhau bởi một cạnh nào của đồ thị $\overline{G}$.

Ma trận kề $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,v}$ của đồ thị G với v đỉnh $p_1,\dots,p_v$ là một $(0,1)-$ma trận được xác định bởi

$$a_{ij}=\begin{cases}1 \text{ nếu } p_i \text{ và } p_j \text{ được nối với nhau,}\\ 0 \text{ nếu } p_i \text{ và } p_j \text{ không được nối với nhau.}\end{cases}$$

Ma trận kề luôn đối xứng, tức là $a_{ji}=a_{ij}$, nên $A^T=A$, trong đó A^T là ma trận chuyển vị của A.

Đồ thị G được gọi là strong regular nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

1) G là một đồ thị regular bậc k trên v đỉnh $p_1,\dots,p_v$ nào đó.

2) Nếu p_i, p_j là hai đỉnh của G được nối bởi một cạnh thì có chính xác λ đỉnh khác của đồ thị được nối đồng thời với cả hai đỉnh này.

3) Nếu p_r, p_s là hai đỉnh của G không được nối bởi một cạnh thì có chính xác μ đỉnh khác của đồ thị được nối đồng thời với cả hai đỉnh này.

Lưu ý, ta loại bỏ đồ thị đầy đủ K_v và đồ thị bù của nó ra khỏi tất cả các khảo sát về các đồ thị strong regular.

Nhận thấy rằng nếu G là một đồ thị strong regular với các tham số v,k,λ,μ thì đồ thị bù $\overline{G}$ của nó cũng là strong regular với các tham số $v, k^*=v-k-1, \lambda^*=v-2k+\mu-2, \mu^*=v-2k+\lambda$.

Ký hiệu A là ma trận kề của đồ thị strong regular G với v đỉnh và có bậc k. Nếu ta đặt $l=v-k-1$ thì đồ thị bù $\overline{G}$ là regular với bậc l và ta cũng ký hiệu B là ma trận kề của đồ thị $\overline{G}$.

Do G là regular bậc k và $\overline{G}$ là regular bậc l nên ta có

$$A^T=A, AJ=JA=kJ, B^T=B, BJ=JB=lJ, \qquad (1)$$

trong đó J là ma trận vuông với tất cả các phần tử đều bằng 1.

Đồng thời do G và $\overline{G}$ là các đồ thị bù nhau nên

$$I+A+B=J. \qquad (2)$$

Từ tính chất strong regular của đồ thị G ta có biểu thức sau

$$A^2=AA^T=kI+\lambda A+\mu B. \qquad (3)$$

Thật vậy, do G là regular với bậc k nên tích vô hướng của một hàng bất kỳ của A với chính nó luôn bằng k, điều này cho ta số hạng đầu kI. Với hai đỉnh phân biệt p_i, p_j, nếu $a_{ij}=1$ thì có chính xác λ đỉnh p_s sao cho $a_{is}=1, a_{js}=1$; trong trường hợp $a_{ij}=0$ thì có chính xác μ đỉnh p_s sao cho $a_{is}=1, a_{js}=1$. Từ điều phân tích trên ta nhận được hai số hạng cuối λA và μB.

Bằng cách nhân hai vế của (3) cho ma trận J, kết hợp với (1) và tiến hành đồng nhất hệ số của J ở hai vế ta có $k^2=k+\lambda k+\mu l$, sau một số phép biến đổi đơn giản ta nhận được

$$\mu l=k\left(k-\lambda-1\right). \qquad (4)$$

Nếu $\mu=0$ thì từ (4) ta suy ra $\lambda=k-1$ và từ đây ta nhận ra rằng đồ thị G được tạo thành từ các đồ thị K_{k+1} phân biệt.

Nếu $\mu\geq 1$ thì hiển nhiên rằng G là liên thông.

Bằng cách sử dụng (2) ta có thể khử B trong (3), sau đó bằng cách nhân cả hai vế cho A và sử dụng (1) ta có khử J và tìm được

$$(A-kJ)\left(A^2-(\lambda-\mu)A-(k-\mu)I\right)=0.$$

Ta sẽ chứng minh rằng nếu G liên thông, tức là $\mu\ge 1$, thì k là một giá trị riêng của A với số bội bằng 1 và vector $e=(1,....,1)$ là vector riêng tương ứng với trị riêng này.

Thật vậy, sự kiện k là một giá trị riêng của A được suy ra từ tính regular của đồ thị G.

Giả sử $e=(e_1,...,e_v)$ là một vector riêng tương ứng với giá trị riêng k.

Khi đó $eA=ke$, tức là $e_1a_{1j}+e_2a_{2j}+...+e_va_{vj}=ke_j$ với $j=1,...,v$.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng giá trị lớn nhất e_r trong các số $e_1,...,e_v$ là dương, ta có thể thay e bởi $-e$ nếu cần thiết trong các lập luận. Bằng cách chọn $j=r$, ta được $\sum_{i=1}^{v} e_ia_{ir}=ke_r$.

Do $a_{ir}=0$ hoặc 1 và $\sum_{i=1} a_{ir}=k$ nên có chính xác k số hạng khác không trong vế trái của hệ thức trên tương đướng với $a_{ir}=1$ và mỗi e_i tương ứng với các số hạng này đều nhỏ hơn hoặc bằng e_r. Do đó ta phải có $e_i=e_r$, tức là nếu p_i được nối với p_r thì $e_i=e_r$. Do G liên thông nên ta suy ra $e_1=e_2=...=e_v=e_r$ nên $e=e_r(1,...,1)$, khẳng định được chứng minh.

Từ hệ thức $(A-kJ)\left(A^2-(\lambda-\mu)A-(k-\mu)I\right)=0$ ta cũng suy ra ngoài ngoại trừ giá trị riêng k ma trận A còn có hai giá trị riêng là $s=\frac{(\lambda-\mu)+\sqrt{d}}{2}$ và $t=\frac{(\lambda-\mu)-\sqrt{d}}{2}$, trong đó $d=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)$.

Gọi số bội của trị riêng s là f_2 và của trị riêng t là f_3.

Khi đó, $1+f_2+f_3=v=1+k+l$. (5)

Do vết của ma trận A bằng 0 nên $k+sf_2+tf_3=0$. (6)

Giải hệ phương trình (5) và (6) theo f_2 và f_3, ta được $f_2=\frac{k+t(k+l)}{t-s}$, $f_3=\frac{k+s(k+l)}{s-t}$.

Thay các biểu thức tính s và t vào kết quả trên, ta được

$$f_2=\frac{2k+(\lambda-\mu)(k+l)-\sqrt{d}\,(k+l)}{-2\sqrt{d}} \text{ và } f_3=\frac{2k+(\lambda-\mu)(k+l)+\sqrt{d}\,(k+l)}{2\sqrt{d}}.$$

Từ việc f_2 và f_3 đều là các số nguyên không âm ta có kết quả sau:

Kết quả. Cho G là một đồ thị strong regular bậc k trên v đỉnh với các tham số λ và $\mu>0$. Khi đó

1) Hoặc $k=l,\mu=\lambda+1=\frac{k}{2}$ và $f_2=f_3=k$,

2) Hoặc $d=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)$ là một số chính phương, và

i) Nếu v chẵn thì $\sqrt{d}$ chia hết $2k+(\lambda-\mu)(k+l)$ còn $2\sqrt{d}$ thì không chia hết $2k+(\lambda-\mu)(k+l)$,

ii) Nếu v lẻ thì $2\sqrt{d}$ chia hết $2k+(\lambda-\mu)(k+l)$.

Chứng minh. Đầu tiên giả sử rằng $2k+(\lambda-\mu)(k+l)=0$. Khi đó $f_2=f_3$ và đồng thời $\lambda-\mu=-m$ sẽ là một số nguyên âm và $(2-m)k=ml$. Nếu $m\ge 2$ thì $(2-m)k\le 0$ trong khi $ml>0$, mâu thuẫn. Do đó $m=1$ nên $k=l$ và $\lambda+1=\mu$. Từ hệ thức $\mu l=k(k-\lambda-1)$ và cùng với việc $k=l$ và $\mu=\lambda+1$ ta thu được $\lambda+1=k-\lambda-1$ nên $k=2(\lambda+1)=2\mu$, kết thúc chứng minh cho trường hợp 1) của khẳng định.

Nếu $2k+(\lambda-\mu)(k+l)$ khác không thì từ công thức tính f_2 và f_3 như đã trình bày ở phần trên ta suy ra được rằng $\left(2k+(\lambda-\mu)(k+l)\right)/\sqrt{d}$ là một số hữu tỷ khác không nên d sẽ là một số chính phương.

Do $k+l=v-1$ nên từ công thức tính f_2 và f_3 ta cũng thu được các ý i) và ii) của trường hợp 2.

Tài liệu tham khảo

Marshall Hall, Combinatorial Theory, First Edition