

Cấu hình tổ hợp liên kết với đồ thị strong regular

Trương Phước Nhân, 28/07/2018

1. Định nghĩa & tính chất cơ bản

Đồ thị strong regular, ký hiệu bởi $\text{srg}(v, k, \lambda, \mu)$, là một đồ thị đều bậc k với v đỉnh thỏa mãn các điều kiện:

- (1) Với hai đỉnh x, y liên hợp nhau, có chính xác λ đỉnh được nối với cả x và y .
- (2) Với hai đỉnh x, y không liên hợp nhau, có chính xác μ đỉnh được nối với cả x và y .

Hiển nhiên, một đồ thị là hợp của m đồ thị đầy đủ K_k cũng là một $\text{srg}(km, k-1, k-2, 0)$.

Không quá khó khăn để kiểm tra rằng đồ thị bù $\bar{G}$ của một $\text{srg}(v, k, \lambda, \mu)$ G là một $\text{srg}(v, v-k-1, v-2k+\mu-2, v-2k+\lambda)$.

Để loại bỏ đi các trường hợp tầm thường, bằng cách xem xét các đồ thị strong regular và cả phần bù của nó đều liên thông, tức là ta sẽ giả sử $0 < \mu < k < v-1$ (trường hợp $\mu = 0$ kéo theo rằng đồ thị là hợp của các đồ thị đầy đủ).

Một hệ thức liên hệ giữa các tham số v, k, λ, μ được tìm thấy như sau thiết lập như sau:

Xét một đỉnh x bất kỳ và phân hoạch các đỉnh khác thành hai tập: tập $\Gamma(x)$ các đỉnh liên hợp với x và tập $\Delta(x)$ các đỉnh không liên hợp với x .

Từ định nghĩa của đồ thị strong regular, $\Gamma(x)$ chứa k đỉnh và mỗi đỉnh này được nối với λ đỉnh của $\Gamma(x)$. Mỗi đỉnh trong $\Delta(x)$ được nối với μ đỉnh nằm trong $\Gamma(x)$.

Sử dụng ý tưởng đếm số các cạnh có một đầu mút nằm trong $\Gamma(x)$ và một đầu mút khác nằm trong $\Delta(x)$ bằng hai cách, ta thu được $k(k-\lambda-1) = \mu(v-k-1)$.

Ma trận liên hợp A của một đồ thị G với v đỉnh $1, \dots, v$ là một $(0,1)$ -ma trận cấp $v \times v$ với $a_{ij} = 1$ nếu và chỉ nếu đỉnh i và j được nối với nhau. Hiển nhiên A là một ma trận đối xứng với tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 0.

Từ định nghĩa của ma trận liên hợp ta dễ dàng nhận thấy rằng:

$$G \text{ là một } \text{srg}(v, k, \lambda, \mu) \text{ khi và chỉ khi } AJ = kJ \text{ và } A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)I = \mu J.$$

2. Cấu trúc đại số của một đồ thị strong regular

Đại số Bose-Mesner $\mathcal{A}$ của một đồ thị strong regular G là một đại số 3 chiều $\mathcal{A}$ bao gồm các tổ hợp tuyến tính của I, J và A . Đại số này chứa các ma trận đối xứng giao hoán lẫn nhau.

Sau đây ta sẽ chỉ ra rằng ma trận A có ba không gian con riêng trong $\mathbb{R}^v$ và các không gian này đồng thời cũng là các không gian con riêng của một phần tử bất kỳ của đại số $\mathcal{A}$.

Kết quả 1. Nếu tồn tại một $\text{srg}(v, k, \lambda, \mu)$ thì các số $f := \frac{1}{2} \left\{ v-1 + \frac{(v-1)(\mu-\lambda)-2k}{\sqrt{(\mu-\lambda)^2 + 4(k-\mu)}} \right\}$ và $g := \frac{1}{2} \left\{ v-1 - \frac{(v-1)(\mu-\lambda)-2k}{\sqrt{(\mu-\lambda)^2 + 4(k-\mu)}} \right\}$ là các số nguyên không âm.

Chứng minh. Giả sử A là ma trận liên hợp của $\text{srg}(v, k, \lambda, \mu)$. Sử dụng hệ thức $AJ = kJ$ ta suy ra vector $j := (1, 1, \dots, 1)^T$ là một vector riêng của ma trận A với giá trị riêng tương ứng là k . Từ tính liên thông của $\text{srg}(v, k, \lambda, \mu)$ ta suy ra giá trị riêng k có số bội bằng 1.

Giả sử x là một giá trị riêng khác của A . Do A là ma trận đối xứng nên vector riêng tương ứng với x phải trực giao với j và do đó ta thu được phương trình $x^2 + (\mu - \lambda)x + (\mu - k) = 0$, lưu ý đến hệ thức $A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)I = \mu J$.

$$\text{Giải phương trình bậc hai này ta tìm được hai nghiệm } r, s = \frac{1}{2} \left\{ \lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)} \right\}.$$

Giả sử f và g lần lượt là số bội của các giá trị riêng r và s của ma trận A .

Khi đó, ta có $1 + f + g = v$, $\text{tr}(A) = k + fr + gs = 0$.

Giải hệ phương trình tuyến tính trên và sử dụng công thức tính r, s ta thu được kết quả sau:

$$f = \frac{1}{2} \left\{ v - 1 + \frac{(v-1)(\mu-\lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu-\lambda)^2 + 4(k-\mu)}} \right\} \text{ và } g = \frac{1}{2} \left\{ v - 1 - \frac{(v-1)(\mu-\lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu-\lambda)^2 + 4(k-\mu)}} \right\}.$$

Nhận xét.

- Biểu thức tính số bội f và g có thể được viết lại dưới dạng gọn như sau:

$$f = \frac{-k(s+1)(k-s)}{(k+rs)(r-s)} \text{ và } g = \frac{k(r+1)(k-r)}{(k+rs)(r-s)}.$$

- Trong trường hợp $f \neq g$, biểu thức căn chứa dưới mẫu trong biểu thức tính của f và g phải là một số nguyên, tức là $(\mu-\lambda)^2 + 4(k-\mu)$ là một số chính phương.

Từ công thức tính $r, s = \frac{1}{2} \left\{ \lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)} \right\}$, ta cũng nhận ra rằng r, s là các số nguyên.

Trong trường hợp $f = g$, cấu hình tổ hợp mà ta nhận được là $\text{srg}(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$.

Kết quả 2. Cho G là một đồ thị strong regular và k, r, s là các giá trị riêng của ma trận liên hợp A của G .

Khi đó, $(r+1)(k+r+2rs) \leq (k+r)(s+1)^2$, $(s+1)(k+s+2sr) \leq (k+s)(r+1)^2$.

Chứng minh.

Từ kết quả 1 ta biết rằng các ma trận của đại số $\mathcal{A}$ có chung ba không gian con riêng với số chiều lần lượt là 1, f và g ; ta tạm gọi ba không gian con riêng này là V_0, V_1 và V_2 , trong đó V_0 là không gian con riêng sinh bởi j , V_1 và V_2 là các không gian con tương ứng với các giá trị riêng r và s của A .

Với mỗi $i = 0, 1, 2$, đặt E_i là ma trận của phép chiếu lên không gian V_i , nên E_i có giá trị riêng bằng 1 trên V_i và bằng 0 trên các không gian con riêng còn lại. Các ma trận mà ta vừa định nghĩa thường được gọi là cơ sở lũy đẳng cực tiểu của $\mathcal{A}$.

Đặt $B := J - I - A$, bây giờ trên cùng tập $\mathcal{A}$ thay cho việc xét tích thông thường giữa hai ma trận ta xét tích Hadamard của chúng. Dễ dàng kiểm tra được rằng tích Hadamard của hai trong số ba ma trận I, A, B đều cho kết quả bằng 0 và mọi $(0,1)$ -ma trận đều lũy đẳng đối với tích Hadamard, nên đại số $\mathcal{A}$ đóng kín đối với tích Hadamard và các ma trận I, A, B là cơ sở lũy đẳng cực tiểu của $\mathcal{A}$.

Bằng cách tính toán trực tiếp, ta nhận ra rằng

$$I = E_0 + E_1 + E_2,$$

$$A = kE_0 + rE_1 + sE_2,$$

$$B = (v-k-1)E_0 + (-r-1)E_1 + (-s-1)E_2.$$

Từ hệ phương trình trên ta có thể biểu diễn $E_i, i = 0, 1, 2$, theo I, A và B .

Tích Hadamard $E_i \circ E_j$ là ma trận con chính của tích Kronecker $E_i \otimes E_j$. Ma trận $E_i \otimes E_j$ là lũy đẳng, nên các giá trị riêng của nó bằng 0 hoặc 1.

Do các ma trận $E_i, i = 0, 1, 2$, là một cơ sở của đại số $\mathcal{A}$ nên ta có $E_i \circ E_j = \sum_{k=0}^2 q_{ij}^k E_k$, trong đó q_{ij}^k là giá trị riêng của $E_i \circ E_j$ trên không gian con V_k .

Kết hợp hai kết quả phân tích trên ta suy ra các giá trị riêng q_{ij}^k phải bằng nằm giữa 0 và 1.

Sau khi thực hiện hoàn tất các phép tính toán và biến đổi mà ta vừa trình bày ở trên thì hóa ra là tất cả các đánh giá đều được thỏa mãn ngoại trừ hai đánh giá. Hai đánh giá đó là $q_{11}^1 \geq 0$, $q_{22}^2 \geq 0$ và hai đánh giá này thực ra chính là hai đánh giá mà ta cần chứng minh.

Kết quả 3. Cho k, r, s là các giá trị riêng của ma trận liên hợp A của một $\text{srg}(v, k, \lambda, \mu)$ với các số bội

tương ứng là 1, f và g . Khi đó, $v \leq \frac{f(f+3)}{2}$ và $v \leq \frac{f(f+3)}{2}$.

Chứng minh.

Ký hiệu B là ma trận $J - I - A$ và $E_i, i = 0, 1, 2$, tương tự như trong chứng minh của kết quả 2.

Giả sử $E_1 = \alpha I + \beta A + \gamma B$, do E_1 là một ma trận đối xứng, nên tồn tại một ma trận trực giao $(H_1 \ K_1)$ sao cho $E_1 = (H_1 \ K_1) \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^T \\ K_1^T \end{pmatrix} = H_1 H_1^T$, trong đó H_1 là một ma trận cấp $v \times f$ thỏa mãn $H_1^T H_1 = I$.

Ta xem các hàng của ma trận H_1 như một tập S gồm v vector trong $\mathbb{R}^f$.

Từ hệ thức $H_1 H_1^T = E_1 = \alpha I + \beta A + \gamma B$, ta suy ra rằng mỗi vector mà ta vừa nêu ở trên đều có độ dài $\alpha^{\frac{1}{2}}$ và hai vector phân biệt chọn từ tập S có tích vô hướng bằng β hoặc γ . Một tập S thỏa mãn các tính chất như trên được gọi là sphere 2-distance, cách gọi tên này bắt nguồn từ việc ta có thể xem tập S như các điểm nằm trên một mặt cầu và khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ chỉ có thể nhận hai giá trị.

Ta sẽ chứng minh rằng S chứa tối đa $\frac{f(f+3)}{2}$ vector.

Đầu tiên ta thực hiện chuẩn hóa các vector và thu được một tập S' gồm v vector trên mặt cầu đơn vị Ω trong $\mathbb{R}^f$ sao cho tích vô hướng của hai vector bất kỳ bằng b hoặc c .

Với mỗi $v \in S'$, ta định nghĩa một hàm $f_v(x) := \frac{(\langle v, x \rangle - b)(\langle v, x \rangle - c)}{(1-b)(1-c)}$.

Các hàm mà ta vừa định nghĩa là các đa thức bậc hai theo các thành phần của vector x .

Nếu $v \in S, w \in S, v \neq w$, thì $f_v(v) = 1$ và $f_v(w) = 0$; điều này chỉ ra rằng các hàm này là độc lập tuyến tính.

Không gian các đa thức thuần nhất bậc nhất và bậc hai trên Ω có số chiều lần lượt bằng f và $\frac{f(f+1)}{2}$.

Do $x_1^2 + \dots + x_f^2 = 1$ trên Ω nên ta có thể biểu diễn các hằng số ở dạng đa thức thuần nhất bậc 2.

Kết hợp các điều vừa phân tích được ở trên ta suy ra rằng số các hàm f_v tối đa là

bằng $f + \frac{f(f+1)}{2} = \frac{f(f+3)}{2}$. Điều này chỉ ra rằng $v \leq \frac{f(f+3)}{2}$.

Lập luận tương tự ta cũng chỉ ra được rằng $v \leq \frac{g(g+3)}{2}$.

3. Cấu hình tựa đối xứng

Một 2-design được gọi là tựa đối xứng nếu kích thước của phần giao của hai khối phân biệt bất kỳ chỉ nhận hai giá trị, ta tạm thời giả sử hai giá trị này là x và y với $x > y$.

Đồ thị khối của cấu hình là một đồ thị với các đỉnh là các khối của cấu hình và hai đỉnh liên hợp với nhau khi và chỉ khi giao của chúng có y phần tử.

Kết quả 4. Đồ thị khối của một cấu hình tựa đối xứng là một đồ thị strongly regular.

Chứng minh.

Giả sử N là ma trận liên thuộc của cấu hình và A là ma trận liên hợp của đồ thị khối G của nó.

Giả sử các tham số của 2-design này là v, k, b, λ , ta có các phương trình ma trận sau:

$$NN^T = (r - \lambda)I + \lambda J,$$

$$N^T N = kI + yA + x(J - I - A).$$

Nhận xét, hai ma trận NN^T và $N^T N$ đều có giá trị riêng kr và các giá trị vector riêng j tương ứng với chúng có tất cả các thành phần đều bằng 1, hiển nhiên là với các độ dài khác nhau.

Đồng thời, ma trận NN^T chỉ có duy nhất một giá trị riêng $r - \lambda$ trên $j^\perp$ với số bội bằng $v - 1$.

Do NN^T và $N^T N$ có cùng các giá trị riêng khác không và có cùng số bội của chúng, nên $N^T N$ phải có thêm giá trị riêng 0 với số bội $b - v$ trên $j^\perp$.

Do $x \neq y$ nên A là một tổ hợp tuyến tính của I, J và $N^T N$.

Kết hợp với các phân tích trên ta suy ra rằng A có một vector riêng j và hai giá trị riêng khác trên không gian $j^\perp$. Hai giá trị riêng này lần lượt là $\frac{r-\lambda+k+x}{y-x}$ với số bội $v-1$ và $\frac{x-k}{y-x}$ với số bội $b-v$.

Từ các tính toán thu được ở trên ta nhận ra rằng G là một đồ thị strong regular.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Ian Anderson, A short Course in Combinatorial Designs, 2012
- [2]. Trương Phước Nhân, Đồ thị strong regular, 16/07/2018.
- [3]. J.H. van Lint- R.M. Wilson, A course in combinatorics, Cambridge University Press, 2001.