Lý thuyết tích phân các hàm chỉnh hình

Trương Phước Nhân, 01/02/2019

Nội dung bài viết tập trung trình bày các kết quả quan trọng về lý thuyết tích phân phức cho lớp các hàm chỉnh hình.

1. Kiến thức cơ bản

Ý tưởng xây dựng khái niệm tích phân phức được phát triển tương tự như khái niệm tích phân Riemann cho các hàm thực như sau:

Giả sử cho trước đường cong Jordan γ trơn từng khúc và hàm số $f\left(z\right)$ xác định trên đường cong γ.

Chia đường cong γ thành n phần bởi các điểm chia $a=z_1,...,z_{n+1}=b$ và trên mỗi cung $z_k z_{k+1}$ $(k=1,...,n+1)$ chọn một điểm ζ_k bất kì.

Lập tổng tích phân $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\left(z_{k+1}-z_k\right)$.

Nếu tồn tại giới hạn của tổng tích phân S_n khi đường kính phân hoạch $d=\max\limits_{1\le k\le n}\left|z_{k+1}-z_k\right|$ dần về 0, không phụ thuộc vào cách phân chia đường cong và cách chọn các điểm ζ_k.

Khi đó giới hạn $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\left(z_{k+1}-z_k\right)$ được gọi là tích phân của hàm số $f\left(z\right)$ dọc theo đường cong γ.

Kí hiệu: $\int\limits_{\gamma} f\left(z\right)dz=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\left(z_{k+1}-z_k\right)$.

Trong các tính toán thực hành ta thường không sử dụng cách định nghĩa theo phương pháp Riemann mà tính toán thông qua các hàm số thực.

Thật vậy, giả sử $f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$, $z_k=x_k+iy_k$, $\zeta_k=\xi_k+i\eta_k$, $u_k=u\left(\xi_k,\eta_k\right)$, $v_k=v\left(\xi_k,\eta_k\right)$.

Khi đó

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(u_k+iv_k\right)\left(\Delta x_k+i\Delta y_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(u_k\Delta x_k-v_k\Delta y_k\right)+i\sum_{k=1}^{n}\left(u_k\Delta y_k+v_k\Delta x_k\right).$$

Nhận thấy rằng các tổng bên vế phải là tổng tích phân của các tích phân đường loại hai tương ứng và do tồn tại $\lim\limits_{d\to 0}S_n$ nên, bằng cách hạn chế một số điều kiện nhất định ví dụ như đường cong γ đo được và hàm $f\left(z\right)$ liên tục trên γ, ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại của các tổng tích phân ở vế phải.

Bằng cách chuyển qua giới hạn ta có:

$$\boxed{\int_{\gamma} f\left(z\right)dz=\int_{\gamma}\left(udx-vdy\right)+i\int_{\gamma}\left(udy+vdx\right)}$$

2. Các tính chất cơ bản

Xuất phát từ định nghĩa theo phương pháp Riemann ta dễ dàng kiểm tra lại được các tính chất cơ bản sau:

a) Tính chất tuyến tính.

Nếu $f_k\left(z\right)$, $k=1,...,n$, là những hàm liên tục trên γ và a_k, $k=1,...,n$, là những hằng số cho trước thì

$$\int_{\gamma}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k f_k\left(z\right)\right)dz=\sum_{k=1}^{n}a_k\int_{\gamma} f_k\left(z\right)dz.$$

b) Tính chất cộng tính.

Nếu hàm số $f(z)$ khả tích trên hai đường cong Jordan trơn từng khúc γ_1 và γ_2 thì

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

c) Tính chất định hướng.

Nếu hàm số $f(z)$ khả tích trên đường cong Jordan trơn từng khúc γ thì $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma^-} f(z)dz$ trong đó γ^- là đường cong Jordan trơn từng khúc được định hướng ngược lại với hướng của γ.

d) Ước lượng tích phân.

Nếu hàm số $f(z)$ khả tích trên đường cong Jordan trơn từng khúc γ thì $\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \le \int_{\gamma} |f(z)||dz|$ trong đó $|dz| = \sqrt{dx^2+dy^2}$ là vi phân cung.

3. Công thức tính toán tích phân phức

Như ta đã biết bài toán tính tích phân phức có thể được chuyển về bài toán tính tích phân đường loại hai nên trước hết ta sẽ khảo sát cách tính toán các tích phân đường loại hai.

Kết quả 1. (Green)

Giả sử C là đường cong phẳng kín, đơn và trơn từng khúc, U là miền bao gồm cả C và phần C bao bọc. Khi đó, nếu $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ là những hàm khả vi liên tục trên miền mở chứa U thì

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_U \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy.$$

Chứng minh kết quả 1.

Đầu tiên ta chứng minh định lý Green cho trường hợp miền U có dạng đơn giản.

Nếu miền U có dạng $U = \{a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ trong đó φ_1, φ_2 là các hàm liên tục trên $[a,b]$.

Khi đó,

$$\iint_U \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = \int_b^a dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = \int_b^a \left(P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))\right)dx,$$

$$\oint_c P(x,y)dx = \int_{A_1}^{A_2} P(x,y)dx + \int_{A_2}^{B_2} P(x,y)dx + \int_{B_2}^{B_1} P(x,y)dx + \int_{B_1}^{A_1} P(x,y)dx$$

$$= \int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx + \int_b^a P(x,\varphi_2(x))dx.$$

Do đó,

$$\oint_c P(x,y)dx = \iint_U \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy.$$

Bằng phương pháp lập luận tương tự, ta cũng thu được

$$\oint_c Q(x,y)dy = \iint_U \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy.$$

Do đó,

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_U \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy.$$

Nếu miền U có dạng $U = \{\alpha \le y \le \beta, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$ trong đó ψ_1, ψ_2 là các hàm liên tục trên $[\alpha,\beta]$ thì bằng phương pháp lập luận tương tự như trên ta cũng chỉ ra được rằng

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_U \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy$$

Đối với các miền U phức tạp ta có thể chia thành những miền con có dạng như đã nêu và công thức Green vẫn thỏa mãn vì tích phân kép ở vế phải là hợp của tích phân kép trên từng miền nhỏ còn tích phân đường vế trái chỉ chứa những đường là biên của miền U.

Trong trường hợp miền U có lỗ hổng ta chỉ cần tách miền U thành miền C_1, C_2 và đoạn B_1B_2.

Nhận xét rằng tích phân đường dọc theo đoạn B_1B_2 tham gia hai lần, một lần từ B_1 đến B_2 và một lần từ B_2 đến B_1, nên công thức Green vẫn được thỏa mãn.

Đối với các miền có nhiều lỗ hổng ta áp dụng cách chứng minh hoàn toàn tương tự.

Từ công thức Green ta nhận thấy kết quả lí thú:

"Giả sử $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ là các hàm liên tục trên U, A và B là hai điểm bất kì trong miền U.

Khi đó, tích phân $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân C khi và chỉ khi $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ trên U."

Hơn nữa ta còn thu được kết quả sâu sắc hơn như sau:

Kết quả 2.

Giả sử $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ là các hàm liên tục trên U, A và B là hai điểm bất kì trong miền U.

Khi đó, tích phân $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân C khi và chỉ khi tồn tại hàm $F(x,y)$ khả vi trên U sao cho $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = Q(x,y)$.

Chứng minh kết quả 2.

Điều kiện cần.

Giả sử tích phân $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân, bằng cách cố định $(x_0,y_0) \in U$, ta xây dựng hàm $F(x,y)$ theo công thức $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Do tích phân $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ chỉ phụ thuộc vào (x,y) và không phụ thuộc vào đường lấy tích phân từ (x_0,y_0) đến (x,y) nên hàm $F(x,y)$ được xác định đúng.

Tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$.

Do $F(x+\Delta x,y)-F(x,y)=\int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx$

nên

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx=P(x,y).$$

Bằng cách tương tự ta cũng tính được $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=Q(x,y)$.

Điều kiện đủ.

Giả sử tồn tại tồn tại hàm $F(x,y)$ khả vi trên U sao cho $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=P(x,y)$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=Q(x,y)$.

Lấy hai điểm A,B bất kì trong U và C là đường cong nối A với B cho bởi phương trình tham số $x=x(t),\ y=y(t),\ a\le t\le b$.

Nếu C là đường cong trơn thì

$$\begin{aligned}\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy&=\int\limits_a^b \frac{\partial F(x(t),y(t))}{\partial x}x'(t)dt+\frac{\partial F(x(t),y(t))}{\partial x}y'(t)dt\\&=\int\limits_a^b \frac{d}{dt}\left[F(x(t),y(t))\right]dt\\&=F(x(b),y(b))-F(x(a),y(a)).\end{aligned}$$

Nếu C là đường cong trơn từng khúc thì, bằng cách tách tích phân thành từng phần, ta cũng nhận được kết quả $\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=F(x(b),y(b))-F(x(a),y(a))$.

Điều này chứng tỏ rằng tích phân $\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Lưu ý rằng hàm F được nêu trong kết quả trên được gọi là nguyên hàm của dạng vi phân $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ và công thức $\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=F(x(b),y(b))-F(x(a),y(a))$ được gọi là công thức Newton – Leibniz.

Bây giờ ta quay về khảo sát lớp các hàm số biến số phức.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra cho ta đó là:

"Với điều kiện nào của hàm $f(z)$ thì tích phân phức $\int\limits_\gamma f(z)dz$ không phụ thuộc vào dạng của đường cong γ mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường cong ?"

Nhận thấy rằng ta luôn có thể chuyển một bài tính tích phân phức $\int\limits_\gamma f(z)dz$ về bài toán tính tích phân đường loại hai dạng $\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ thông qua hệ thức $\int\limits_\gamma f(z)dz=\int\limits_\gamma (udx-vdy)+i\int\limits_\gamma (udy+vdx)$ trong đó $f=u+iv$.

Mặt khác, từ kết quả 1 và 2, ta biết rằng điều kiện cần và đủ để việc tính tích phân đường loại hai không phụ thuộc vào đường lấy tích phân là $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$.

Áp dụng kết quả phân tích này cho trường hợp hàm biến phức và lưu ý đến phương trình Cauchy – Riemann cho các lớp hàm chỉnh hình ta nhận thấy rằng

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx) = \iint_U \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{0} dxdy + \iint_U \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0} dxdy = 0$$

trong đó U là miền hữu hạn giới hạn bởi đường cong γ.

Ngược lại nếu $\int_\gamma f(z)dz = 0$ trong đó γ đường cong Jordan, trơn từng khúc, kín chứa trong miền D thì ta dễ dàng chứng minh được rằng việc tính tích phân $\int_\gamma f(z)dz$ sẽ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường cong.

Sau đây ta sẽ trình bày một cách chứng minh khá lí thú của tác giả Cauchy cho sự kiện này

Kết quả 3. (Cauchy)

Giả sử hàm số $f(z)$ chỉnh hình trong miền đơn liên và hữu hạn D.

Khi đó, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ trong đó γ là đường cong Jordan, trơn từng khúc, kín chứa trong miền D.

Chứng minh kết quả 3.

Trường hợp 1. γ *là biên của một tam giác, tức là* $\gamma = \partial\Delta$.

Đặt $M = \left|\int_\gamma f(z)dz\right|$.

Ta chia tam giác Δ thành bốn tam giác con bởi các đường trung bình và giả thiết rằng biên của Δ và của các tam giác con này đều được định hướng ngược chiều kim đồng hồ. Giả sử bốn tam giác con này được kí hiệu là Δ_i, $i = 1,2,3,4$, với biên tương ứng γ_i.

Khi đó,

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} f(z)dz .$$

Từ đó suy ra

$$M = \left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \left|\int_{\gamma_1} f(z)dz\right| + \left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| + \left|\int_{\gamma_3} f(z)dz\right| + \left|\int_{\gamma_4} f(z)dz\right|.$$

Do đó trong số bốn hình tam giác Δ_i, $i = 1,2,3,4$, luôn có ít nhất một hình tam giác con mà ta sẽ tạm kí hiệu là Δ^1 sao cho

$$\left|\int_{\partial\Delta^1} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4}.$$

Ta tiếp tục chia tam giác Δ^1 thành bốn tam giác bằng nhau bởi các đường trung bình như ở trên.

Khi đó trong số bốn tam giác vừa thu được tồn tại một tam giác con mà ta tạm kí hiệu là Δ^2 sao cho

$$\left|\int_{\partial\Delta^2} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4^2}.$$

Bằng cách lặp lại tiếp tục quá trình này vô hạn lần ta thu được dãy các hình tam giác lồng nhau $\{\Delta^n\}$ sao cho:

i) $\Delta \supset \Delta^1 \supset \ldots \supset \Delta^n \supset \ldots$ và $\Delta^n \subset \Delta$, $\forall n$,

ii) Chu vi của tam giác Δ bằng 2^n lần chu vi tam giác Δ^n, tức là $\left|\partial\Delta^n\right| = \frac{1}{2}\left|\partial\Delta^{n-1}\right| = \frac{1}{2^n}\left|\partial\Delta\right|$.

iii) $\left|\int\limits_{\partial\Delta^n} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4^n}$, $\forall n$.

Áp dụng nguyên lý Cantor cho dãy các hình tam giác lồng nhau $\{\Delta^n\}$ với đường kính dần về 0 ta suy ra rằng:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\Delta^n = \{z_0\}.$$

Do hàm $f(z)$ giải tích tại $z_0 \in D$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $z \in D$ mà $|z - z_0| < \delta$ kéo theo

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon.$$

Do $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n = \{z_0\}$ nên $\exists N \in \mathbb{N}$ sao cho $\partial\Delta^n \subset \{z : |z - z_0| < \delta\}$ với mọi $n \ge N$.

Do đó

$$\left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right| < \varepsilon|z - z_0| \text{ với mọi } z \in \partial\Delta^n.$$

Nhận xét rằng khoảng cách $|z' - z|$ giữa hai điểm bất kì của một tam giác luôn bé hơn chu vi của nó nên $\left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right| < \varepsilon|z - z_0| < \varepsilon\left|\partial\Delta^n\right| < \varepsilon\frac{|\partial\Delta|}{2^n}$.

Mặt khác,

$$\int\limits_{\partial\Delta^n}\left[f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right]dz = \int\limits_{\partial\Delta^n} f(z)dz + f(z_0)\int\limits_{\partial\Delta^n} dz + f'(z_0)\int\limits_{\partial\Delta^n} zdz - z_0 f'(z_0)\int\limits_{\partial\Delta^n} dz.$$

Bằng cách sử dụng định nghĩa tích phân ta dễ dàng tính được $\int\limits_{\partial\Delta^n} dz = 0, \int\limits_{\partial\Delta^n} zdz = 0$.

Do đó,

$$\int\limits_{\partial\Delta^n}\left[f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right]dz = \int\limits_{\partial\Delta^n} f(z)dz.$$

Bằng cách kết hợp các kết quả vừa nhận được ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}\frac{M}{4^n} &\le \left|\int\limits_{\partial\Delta^n} f(z)dz\right| \\ &= \left|\int\limits_{\partial\Delta^n}\left[f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right]dz\right| \\ &\le \varepsilon\frac{|\partial\Delta|^2}{4^n} \\ \Rightarrow M &\le \varepsilon|\partial\Delta|^2.\end{aligned}$$

Bằng cách chuyển qua giới hạn khi cho ε tiến dần đến 0 ta suy ra $M = 0$ hay $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Trường hợp 2. γ là biên của một đa giác.

Bằng cách chia đa giác thành các hình tam giác có định hướng dướng, ta suy ra được rằng

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz = 0,$$

trong đó γ_k là biên của các tam giác.

Trường hợp 3. γ là đường cong kín bất kì.

Trước khi tiến hành trình bày cách chứng minh ta cần đến một bổ đề đơn giản sau của tác giả Goursat

Bổ đề. (Goursat)

Nếu $f(z)$ là hàm liên tục trên miền đơn liên D và γ là đường cong Jordan kín, trơn từng khúc chứa trong D thì với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một đa giác $P \subset D$ có các đỉnh nằm trên γ sao cho

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\partial P} f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

Chứng minh bổ đề.

Giả sử D' là miền sao cho $\gamma \subset \overline{D'} \subset D$.

Do f liên tục trên $\overline{D'}$ nên f liên tục đều trên $\overline{D'}$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $|z_1 - z_2| < \delta$ kéo theo $|z_1 - z_2| < \dfrac{\varepsilon}{2l}$ trong đó l là độ dài của đường cong γ.

Chia đường cong γ thành n cung nhỏ γ_k, $k = 1,...,n$, bởi các điểm chia $z_1,..,z_n$ sao cho $d(\gamma_k) < \delta$ và $P \subset D$ trong đó P là đa giác với các đỉnh $z_1,..,z_n$ và $d(\gamma_k) = \max\limits_{z,z' \in \gamma_k} |z - z'|$ là đường kính của cung γ_k.

Khi đó,

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k \right| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} |f(z) - f(z_k)||dz| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bằng phương pháp lập luận tương tự ta cũng thu được kết quả

$$\left| \int_{\partial P} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do đó,

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\partial P} f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

Điều này kết thúc phép chứng minh của bổ đề Goursat.

Bằng cách áp dụng bổ đề Goursat ta nhận thấy với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một đa giác $P \subset D$ có các đỉnh nằm trên γ sao cho

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\partial P} f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

Bằng cách áp dụng kết quả khảo sát trong các trường hợp cơ bản ta nhận thấy $\int_{\partial P} f(z)dz = 0$.

Do đó,

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| < \varepsilon.$$

Bằng cách chuyển qua giới hạn khi cho ε tiến tới 0 ta thu được $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Từ định lý Cauchy vừa chứng minh ta nhận thấy rằng nếu hàm f chỉnh hình trên một miền D thì tích phân phức $\int_\gamma f(z)\,dz$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Câu hỏi thứ hai được đặt ra đó là:

"Nếu $\int_\gamma f(z)\,dz$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân thì làm sao để xác định giá trị của tích phân phức $\int_\gamma f(z)\,dz$?".

Chìa khóa cho lời giải của vấn đề này nằm ở kết quả sau

Kết quả 4.

Giả sử hàm $f(z)$ liên tục trên miền đơn liên D và $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ với mọi đường cong Jordan γ trơn kín chứa trong miền D.

Khi đó, với $z_0 \in D$ cố định, $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ là hàm chỉnh hình trên D và $F'(z) = f(z)$.

Chứng minh kết quả 4.

Do và $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ với mọi đường cong Jordan γ trơn kín chứa trong miền D nên $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân hay $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ xác định một hàm số trên miền D.

Do $\dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \dfrac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta$ với mọi $z \in D$ nên

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \left(f(\zeta) - f(z)\right)d\zeta\right| \text{ (bởi vì } \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = 1\text{)}$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)||d\zeta|.$$

Do f liên tục trên miền D nên $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sao cho với mọi $\zeta \in D$ mà $|\zeta - z| < \delta$ kéo theo $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$.

Bằng cách chọn Δz sao cho $|\Delta z| < \delta$, ta nhận được

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \leq \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z} \varepsilon |d\zeta| = \varepsilon.$$

Do đó,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Nhắc lại công thức quen thuộc $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma}(udx - vdy) + i\int\limits_{\gamma}(udy + vdx)$

Nếu $F = U + iV$ và $f = u + iv$ thì $\dfrac{\partial U}{\partial x} = u$, $\dfrac{\partial V}{\partial x} = v$.

Đồng thời do F là hàm chỉnh hình nên $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$.

Do đó hàm U đóng vai trò là nguyên hàm của dạng vi phân $udx - vdy$ còn hàm V đóng vai trò là nguyên hàm của dạng vi phân $udy + vdx$.

Bằng cách áp dụng các kết quả phân tích được khí khảo sát các tích phân đường ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned}\int\limits_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} f(z)dz &= \int\limits_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)}(udx - vdy) + i\int\limits_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)}(udy + vdx)\\ &= U(x_B,y_B) - U(x_A,y_A) + i\left[V(x_B,y_B) - V(x_A,y_A)\right]\\ &= U(x_B,y_B) + iV(x_B,y_B) - \left[U(x_A,y_A) + iV(x_A,y_A)\right]\\ &= F(x_B,y_B) - F(x_A,y_A)\end{aligned}$$

trong đó (x_A,y_A) và (x_B,y_B) lần lượt là điểm đầu và điểm cuối của đường cong định hướng γ.

Do đó hàm số $F(z)$ cũng được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(z)$ và

công thức $\int\limits_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} f(z)dz = F(x_B,y_B) - F(x_A,y_A)$ cũng được gọi là công thức Newton – Leibniz.

<u>Tài liệu tham khảo:</u>

[1]. Trương Văn Thương, Hàm số biến số phức, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2]. Nguyễn Thủy Thanh, Cơ sở lý thuyết hàm biến phức, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội.

[3]. Đinh Thế Lục, Phạm Huy Điển, Tạ Duy Phượng, Giải tích các hàm nhiều biến – Những nguyên lý cơ bản và tính toán thực hành, Viện toán học.