Bổ đề Lindström–Gessel–Viennot

Trương Phước Nhân, 30/01/2019

Nội dung của bài viết bàn về một bổ đề thú vị của ba nhà toán học Lindström, Gessel, Viennot. Mặc dù chứng minh của bổ đề này không quá phức tạp nhưng nó lại mang lại một cách giải thích hoàn toàn mới về ý nghĩa của khái niệm định thức.

Cho trước ma trận $M = \left(m_{ij}\right)$ cấp $n \times n$.

Khi đó, bằng cách áp dụng công thức khai triển định thức Leibniz, ta có

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sign}\sigma\right) m_{1,\sigma(1)} \ldots m_{n,\sigma(n)}, \qquad (1)$$

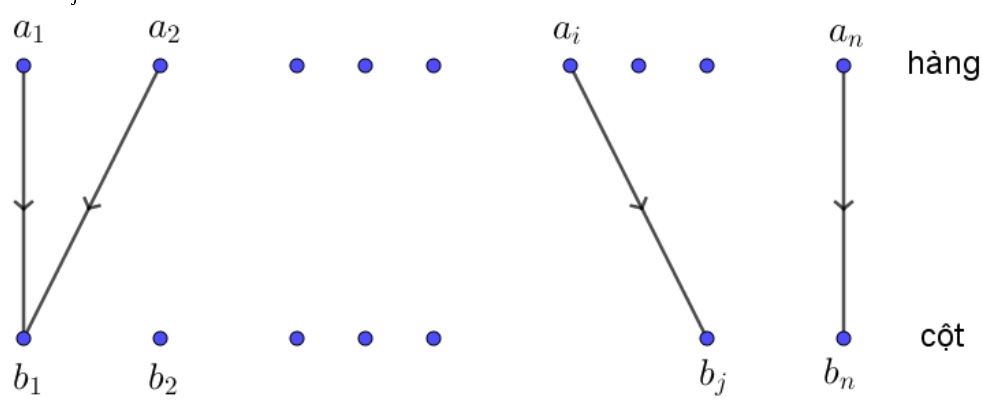
trong đó S_n là tập các hoán vị của n phần tử.

Ý tưởng của ba nhà toán học này nằm ở một nhận xét đơn giản như sau:

Đánh số các hàng và các cột của ma trận M lần lượt bởi các đỉnh $a_1, \ldots, a_n$ và các đỉnh $b_1, \ldots, b_n$.

Kí hiệu $G = \left(A, B, E\right)$ là đồ thị lưỡng phân đầy đủ trong đó $A = \left\{a_1, \ldots, a_n\right\}$ và $B = \left\{b_1, \ldots, b_n\right\}$.

Hơn nữa, mỗi phần tử m_{ij} của ma trận M được xem như trọng lượng $w\left(a_i, b_j\right)$ của cạnh định hướng nối đỉnh a_i với đỉnh b_j.



Hình vẽ minh họa.

Ma trận M được gọi là ***ma trận đường đi*** của đồ thị $G = \left(A, B, E\right)$.

Một ***hệ đường đi không giao nhau*** từ $A = \left\{a_1, \ldots, a_n\right\}$ đến $B = \left\{b_1, \ldots, b_n\right\}$, kí hiệu bởi P_σ, là một hệ các đường đi $P_1 : a_1 \to b_{\sigma(1)}, \ldots, P_n : a_n \to b_{\sigma(n)}$.

Trọng lượng của đường đi P_σ, kí hiệu bởi $w(P_\sigma)$, là tích của các trọng lượng của các đường đi thành phần $w(P_\sigma) = w(P_1) \ldots w(P_n)$.

Khi đó,

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sign}\sigma\right) w\left(P_\sigma\right).$$

Do đó ta có thể giải thích lại công thức khai triển Leibniz như sau:

"Định thức của ma trận đường đi bằng tổng các trọng lượng có tính dấu lấy trên tất cả các hệ đường đi không giao nhau từ tập từ tập $A = \left\{a_1, \ldots, a_n\right\}$ đến tập $B = \left\{b_1, \ldots, b_n\right\}$."

Một cách tổng quát ta có thể mở rộng ý tưởng tiếp cận vừa nêu trên cho một đồ thị bất kì như sau:

Giả sử $G = \left(V, E\right)$ là một đồ thị định hướng hữu hạn không chứa chu trình định hướng (một đồ thị có các tính chất vừa nêu thường được gọi là ***phản chu trình/acylic***). Gán cho mỗi cạnh e một trọng lượng $w\left(e\right)$.

Xét hai tập $A=\{a_1,...,a_n\}$, $B=\{b_1,...,b_n\}\subset V$:

Với mỗi đường đi định hướng P từ A đến B ta định nghĩa trọng lượng của đường đi này bởi hệ thức $w(P)=\prod_{e\in P} w(e)$ trong trường hợp đường đi P có độ dài bằng 0 thì ta quy ước $w(P)=1$.

Với hai đỉnh $a_i\in A$ và $b_j\in B$ ta định nghĩa trọng lượng $w(a_i,b_j)$ là tổng các trọng lượng lấy trên tất cả các đường đi định hướng P từ a_i đến b_j, tức là $w(a_i,b_j)=\sum_{P:a_i\to b_j} w(P)$.

Ma trận đường đi tương ứng với hai tập A và B, kí hiệu bởi M, là ma trận có các hàng và các cột được đánh số bởi các phần tử của các tập A, B và các phần tử thể hiện trọng lượng của các đỉnh tương ứng, nghĩa là

$$M=\begin{pmatrix} w(a_1,b_1) & w(a_1,b_2) & \cdots & w(a_1,b_n) \\ w(a_2,b_1) & w(a_2,b_2) & \cdots & w(a_2,b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(a_n,b_1) & w(a_n,b_2) & \cdots & w(a_n,b_n) \end{pmatrix}.$$

Một n - bộ gồm các đường đi định hướng $(P_1,...,P_n)$ của G được gọi là ***không giao nhau*** nếu như:

i) Tồn tại một hoán vị σ của tập $\{1,...,n\}$ sao cho P_i là đường đi định hướng từ đỉnh a_i đến đỉnh $b_{\sigma(i)}$ với mọi chỉ số i, kí hiệu lại hoán vị σ dưới dạng $\sigma(P)$.

ii) Nếu $i\neq j$ thì các đường đi P_i và P_j không có điểm chung với nhau (kể cả các đầu mút).

Một n - bộ gồm các đường đi định hướng $(P_1,...,P_n)$ thỏa mãn điều kiện i) được gọi là ***xoắn***.

Một n - bộ $(P_1,...,P_n)$ xoắn không thỏa mãn điều kiện ii) được gọi là ***giao nhau***.

Bổ đề Lindström – Gessel - Viennot khẳng định rằng:

$$\det M=\sum_{P=(P_1,...,P_n):A\to B:\text{ không giao nhau}} \operatorname{sign}(\sigma(P))\prod_{i=1}^{n} w(P_i),$$

trong đó tổng được lấy trên tất cả các n - bộ $P=(P_1,...,P_n)$ các đường đi không giao nhau từ A đến B.

<u>Chứng minh bổ đề Lindström – Gessel - Viennot.</u>

$$\begin{aligned}\det M &= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} w(a_i,b_{\sigma(i)}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\sum_{P_i:a_i\to b_{\sigma(i)}} w(P_i) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)\sum\{w(P): P \text{ là một } n-\text{bộ đường đi tư } (a_1,...,a_n) \text{ đên } (b_{\sigma(1)},...,b_{\sigma(n)})\} \\
&= \sum \operatorname{sign}(\sigma)\sum\{w(P): P \text{ là một } n-\text{bộ đường đi xoắn tư } (a_1,...,a_n) \text{ đên } (b_1,...,b_n)\} \\
&= \sum\{\operatorname{sign}(\sigma(P))w(P): P \text{ là một } n-\text{bộ đường đi không giao nhau tư } (a_1,...,a_n) \text{ đên } (b_1,...,b_n)\} \\
&\quad +\sum\{\operatorname{sign}(\sigma(P))w(P): P \text{ là một } n-\text{bộ đường đi xoắn giao nhau tư } (a_1,...,a_n) \text{ đên } (b_1,...,b_n)\} \\
&= \sum_{P=(P_1,...,P_n):A\to B:\text{ không giao nhau}} \operatorname{sign}(\sigma(P))\prod_{i=1}^{n} w(P_i)\end{aligned}$$

$$+\underbrace{\sum\left\{\text{sign}\left(\sigma(P)\right)w(P): P \text{ là một } n-\text{bộ đường đi xoắn giao nhau từ } (a_1,...,a_n) \text{ đến } (b_1,...,b_n)\right\}}_{=0?}$$

Để hoàn tất phép chứng minh ta cần chỉ ra rằng tổng các số hạng $\text{sign}\left(\sigma(P)\right)w(P)$ tính trên tất cả các n - bộ đường đi xoắn giao nhau bằng 0.

Kí hiệu $\mathcal{E}$ là tập tất cả các n - bộ đường đi xoắn giao nhau.

Ý tưởng cho phép chứng minh nằm ở việc xây dựng một phép xoắn $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ thỏa mãn $w\left(f(P)\right)=w(P)$ và $\text{sign}\left(\sigma\left(f(P)\right)\right)=-\text{sign}\left(\sigma(P)\right)$ với mọi $P\in\mathcal{E}$.

Thật vậy, nếu tồn tại một phép xoắn f thỏa mãn các tính chất nêu trên thì

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\mathcal{E}}\text{sign}\left(\sigma(P)\right)w(P)&=\frac{1}{2}\left(\sum_{P\in\mathcal{E}}\text{sign}\left(\sigma\left(f(P)\right)\right)w\left(f(P)\right)+\sum_{P\in\mathcal{E}}\text{sign}\left(\sigma(P)\right)w(P)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{P\in\mathcal{E}}-\text{sign}\left(\sigma(P)\right)w(P)+\sum_{P\in\mathcal{E}}\text{sign}\left(\sigma(P)\right)w(P)\right)\\&=0.\end{aligned}$$

Ý tưởng để xây dựng phép xoắn f nằm ở chỗ ta chọn ra hai đường đi giao nhau trong n đường đi và hoán đổi phần đuôi nằm phía sau điểm giao nhau của hai đường đi. Trong trường hợp tổng quát khi cho trước n đường đi giao nhau thì có thể có nhiều cặp đường đi giao nhau và hai đường đi này có thể giao nhau nhiều lần. Do đó ta cần áp chế một số điều kiện phụ để chọn lựa ra cặp đường đi phù hợp.

Cho trước một n - bộ đường đi xoắn giao nhau $P=\left(P_1,...,P_n\right)$.

Do hệ đường đi P giao nhau nên tồn tại cặp đường đi P_{i_0} và P_{j_0} ($i_0<j_0$) có điểm chung thỏa mãn các điều kiện:

- i_0 là chỉ số nhỏ nhất sao cho đường đi P_{i_0} có điểm chung với một đường đi P_j nào đó,
- j_0 là chỉ số nhỏ nhất sao cho $X\in P_{i_0}\cap P_{j_0}$ trong đó X là điểm chung đầu tiên của đường đi P_{i_0} với một đường đi P_j nào đó.

Khi đó,

$$P_i\equiv a_i=u_0\to u_1\to u_2\to ...\to\overbrace{\underset{=X}{u_\alpha}\to u_{\alpha+1}\to ...\to u_r=b_{\sigma(i)}}^{\text{đuôi } i},$$

$$P_j\equiv a_j=v_0\to v_1\to v_2\to ...\to\overbrace{\underset{=X}{v_\beta}\to v_{\beta+1}\to ...\to v_s=b_{\sigma(j)}}^{\text{đuôi } j}.$$

Để xây dựng hệ đường đi $f(P)$ ta hoán đổi hai đuôi i, j để tạo ra cặp đường đi mới P_i', P_j' và giữ nguyên các đường đi còn lại trong hệ P như sau:

$$P_i'\equiv a_i=u_0\to u_1\to u_2\to ...\to\overbrace{\underset{=X}{v_\beta}\to v_{\beta+1}\to ...\to v_s=b_{\sigma(j)}}^{\text{đuôi } j},$$

$$P_j'\equiv a_j=v_0\to v_1\to v_2\to ...\to\overbrace{\underset{=X}{u_\alpha}\to u_{\alpha+1}\to ...\to u_r=b_{\sigma(i)}}^{\text{đuôi } i}.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng $f(P)$ là một n - bộ đường đi xoắn giao nhau.

Đồng thời nếu áp dụng cách xây dựng vừa nêu ở trên cho hệ đường đi $f(P)$ ta nhận lại hệ đường đi P nên $f(f(P))=P$.

Từ cách định nghĩa phép xoắn f ta nhận thấy rằng hoán vị $\sigma\left(f\left(P\right)\right)$ gần như giống với hoán vị $\sigma\left(P\right)$ ngoại trừ việc $\sigma\left(i\right)$ và $\sigma\left(j\right)$ bị hoán đổi vị trí nên $\operatorname{sign}\left(\sigma\left(f\left(P\right)\right)\right)=-\operatorname{sign}\left(\sigma\left(P\right)\right)$.

Mặt khác,

$$\begin{aligned} w\left(P_i'\right)w\left(P_j'\right) &= \left(\prod_{t=0}^{\alpha-1} w\left(u_t,u_{t+1}\right).\prod_{t=\beta}^{s-1} w\left(v_t,v_{t+1}\right)\right).\left(\prod_{t=0}^{\beta-1} w\left(v_t,v_{t+1}\right).\prod_{t=\alpha}^{r-1} w\left(u_t,u_{t+1}\right)\right) \\ &= \prod_{t=0}^{r-1} w\left(u_t,u_{t+1}\right).\prod_{t=0}^{s-1} w\left(v_t,v_{t+1}\right) \\ &= w\left(P_i\right)w\left(P_j\right). \end{aligned}$$

Do đó,

$$w\left(f\left(P\right)\right)=\prod_{k=1}^{n} w\left(f\left(P\right)_k\right)=\prod_{k\neq i,j}^{n} w\left(P_k\right).w\left(P_i'\right)w\left(P_j'\right)=\prod_{k\neq i,j}^{n} w\left(P_k\right).w\left(P_i\right)w\left(P_j\right)=\prod_{k=1}^{n} w\left(P_k\right)=w\left(P\right).$$

Điều này kết thúc phép chứng minh của bổ đề Lindström – Gessel – Viennot.

<u>Tài liệu tham khảo:</u>

[1]. Wikipedia, Lindström–Gessel–Viennot lemma, ??/??/????.

[2]. Martin Aigner, A Course in Enumeration, Springer.