ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH NGHỆ AN

Năm học 2018 – 2019

Câu 1 (3.0 điểm).

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2y^2 + x - 2y + 5 = xy$

b) Chứng minh rằng $A = 2^{2^n} + 4^n + 16$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.

Câu 2 (6.5 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+3} = \dfrac{8x^3 + 4x}{2x+5}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 \\ (x-1)(y-3) + 3 = x + y \end{cases}$

Câu 3 (2.5 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(\frac{a}{a+b}\right)^4 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^4 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^4$$

Câu 4 (6.0 điểm).

1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A, B, C của tam giác đó. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ nhất M (M khác phía với O so với đường thẳng AB), đường thẳng BM cắt đường thẳng DF tại N.

a) Chứng minh rằng EF vuông góc với OA.

b) Chứng minh rằng $AM = AN$.

2. Cho tam giác nhọn ABC, D là điểm trong tam giác đó sao cho $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^0$ và $AC.BD = AD.BC$. Chứng minh rằng $\dfrac{AB.CD}{AC.BD} = \sqrt{2}$.

Câu 5 (2.0 điểm).

Trong hình vuông cạnh bằng 1 có 2019 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng $\dfrac{1}{91}$ nằm trong hình vuông đó mà không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

==========Hết đề===========

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH NGHỆ AN
Năm học 2018 – 2019

Câu 1 (3.0 điểm).

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2y^2 + x - 2y + 5 = xy$.

Lời giải

Biến đổi tương đường phương trình trên ta được

$$2y^2 + x - 2y + 5 = xy \Leftrightarrow 2y^2 - 2y - (xy - x) = -5 \Leftrightarrow (y-1)(2y-x) = -5$$

Do x và y là các số nguyên nên $y - 1$ và $2y - x$ là ước của -5. Từ đó ta xét bảng sau.

$y-1$	-5	-1	1	5
$2y-x$	1	5	-5	-1
x	-9	-5	9	13
y	-4	0	2	6

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên là $(x;y) = (-9;-4),(-5;0),(9;2),(13;6)$

b) Chứng minh rằng $A = 2^{2^n} + 4^n + 16$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.

Lời giải

Do n là số nguyên dương nên 2^n chia hết cho 2. Đặt $2^n = 2k$ với k là số nguyên dương.

Ta có $2^{2^n} = 2^{2k} = 4^k = (3+1)^k$ và $4^n = (3+1)^n$ chia 3 có số dư là 1. Lại có 16 chia 3 có số dư là 1. Từ đó ta suy ra được $A = 2^{2^n} + 4^n + 16$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.

Câu 2 (6.5 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+3} = \dfrac{8x^3 + 4x}{2x+5}$

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $2x + 3 \ge 0; 2x + 5 \ne 0$ hay $x \ge -\dfrac{3}{2}$.

Phương trình đã cho được viết lại thành

$$8x^3 + 4x = (2x+5)\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow (2x)^3 + 2(2x) = (2x+3)\sqrt{2x+3} + 2\sqrt{2x+3}$$

Đặt $a = 2x; b = \sqrt{2x+3}\ (b \ge 0)$, khi đó phương trình trên lại được viết thành

$$a^3 + 2a = b^3 + 2b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) + 2(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 2) = 0$$

Dễ thấy $a^2 + ab + b^2 + 2 = \left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} + 2 > 0$ với mọi a và b.

Do đó từ phương trình trên ta được $a = b$, hay ta có phương trình

$$2x = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4x^2 = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{13}}{4}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{4}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x-1\right)^2 + \left(y-3\right)^2 = 1 \\ \left(x-1\right)\left(y-3\right) + 3 = x + y\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho được viết lại thành $\begin{cases}\left(x-1\right)^2 + \left(y-3\right)^2 = 1 \\ \left(x-1\right)\left(y-3\right) = \left(x-1\right) + \left(y-3\right) + 1\end{cases}$

Đặt $a = x - 1; b = y - 3$, khi đó hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases}a^2 + b^2 = 1 \\ ab = a + b + 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(a+b\right)^2 - 2ab = 1 \\ ab = a + b + 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(a+b\right)^2 - 2\left(a+b+1\right) = 1 \\ ab = a + b + 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(a+b\right)^2 - 2\left(a+b\right) + 1 = 4 \\ ab = a + b + 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(a+b-1\right)^2 = 4 \\ ab = a + b + 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a + b - 1 = \pm 2 \\ ab = a + b + 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a + b = 3; ab = 4 \\ a + b = -1; ab = 0\end{array}\right.$$

+ Với $a + b = 3; ab = 4$ thì dễ thấy $\left(a+b\right)^2 < 4ab$ nên hệ vô nghiệm.

+ Với $\begin{cases}a + b = -1 \\ ab = 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a = 0; b = -1 \\ a = -1; b = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1; y = 2 \\ x = 0; y = 3\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(0;3\right),\left(1;2\right)$

Câu 3 (2.5 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(\frac{a}{a+b}\right)^4 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^4 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^4$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{1}{\left(1+x\right)^2} + \dfrac{1}{\left(1+y\right)^2} \geq \dfrac{1}{xy+1}$ với x, y là các số thực dương.

Thật vậy, biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{\left(1+x\right)^2} + \frac{1}{\left(1+y\right)^2} \geq \frac{1}{xy+1} \Leftrightarrow \left(xy+1\right)\left(x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2\right) \geq \left(x^2 + 2x + 1\right)\left(y^2 + 2y + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2xy - x^2y^2 = x^3y + xy^3 \Leftrightarrow \left(xy-1\right)^2 + xy\left(x-y\right)^2 \geq 0$$

Do bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên ta có điều cần chứng minh.

Trở lại bài toán.

Do a, b, c là các số nguyên dương nên biểu thức P được viết lại thành

$$P=\left(\frac{1}{1+\frac{b}{a}}\right)^4+\left(\frac{1}{1+\frac{c}{b}}\right)^4+\left(\frac{1}{1+\frac{a}{c}}\right)^4.$$

Đặt $x=\frac{b}{a};y=\frac{c}{b};z=\frac{a}{c}$, khi đó ta được x, y, z dương thỏa mãn $xyz=1$. Ta viết lại biểu thức P và áp dụng một đánh giá quen thuộc thì được

$$P=\left(\frac{1}{1+x}\right)^4+\left(\frac{1}{1+y}\right)^4+\left(\frac{1}{1+z}\right)^4\ge\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\left(1+x\right)^2}+\frac{1}{\left(1+y\right)^2}+\frac{1}{\left(1+z\right)^2}\right]^2$$

Đặt $Q=\frac{1}{\left(1+x\right)^2}+\frac{1}{\left(1+y\right)^2}+\frac{1}{\left(1+z\right)^2}$ và ta có $xyz=1$. Áp dụng bổ đề trên ta được

$$Q=\frac{1}{\left(1+x\right)^2}+\frac{1}{\left(1+y\right)^2}+\frac{1}{\left(1+z\right)^2}\ge\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{\left(1+z\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}+\frac{1}{\left(1+z\right)^2}=\frac{z}{z+1}+\frac{1}{\left(z+1\right)^2}$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{z}{z+1}+\frac{1}{\left(z+1\right)^2}\ge\frac{3}{4}$. Thật vậy, biến đổi bất đẳng thức ta được

$$\frac{z}{z+1}+\frac{1}{\left(z+1\right)^2}\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{z\left(z+1\right)+1}{\left(z+1\right)^2}\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow 4\left(z^2+z+1\right)\ge 3\left(x^2+2z+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4z^2+4z+4\ge 3z^2+6z+3\Leftrightarrow z^2-2z+1\ge 0\Leftrightarrow\left(z-1\right)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Do vậy ta có $\frac{z}{z+1}+\frac{1}{\left(z+1\right)^2}\ge\frac{3}{4}$, dấu bằng xẩy ra khi $z=1$.

Từ đó ta được $Q\ge\frac{3}{4}$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. Suy ra $P\ge\frac{1}{3}Q^2\ge\frac{1}{3}.\frac{9}{16}=\frac{3}{16}$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{16}$, xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét. Ta có thể chứng minh $\frac{1}{\left(1+x\right)^2}+\frac{1}{\left(1+y\right)^2}+\frac{1}{\left(1+z\right)^2}\ge\frac{3}{4}$ theo cách khác sau đây.

Do $xyz=1$ nên tồn tại các số dương m, n, p thỏa mãn $x=\frac{np}{m^2};y=\frac{mp}{n^2};z=\frac{mn}{p^2}$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{1}{\left(1+\frac{np}{m^2}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{mp}{n^2}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{mn}{p^2}\right)^2}\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{m^4}{\left(m^2+np\right)^2}+\frac{n^4}{\left(n^2+mp\right)^2}+\frac{p^4}{\left(p^2+mn\right)^2}\ge\frac{3}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì được

$$\frac{m^4}{\left(m^2+np\right)^2}+\frac{n^4}{\left(n^2+mp\right)^2}+\frac{p^4}{\left(p^2+mn\right)^2}\geq\frac{\left(m^2+n^2+p^2\right)}{\left(m^2+np\right)^2+\left(n^2+mp\right)^2+\left(p^2+mn\right)^2}$$

Và ta cần chứng minh $\dfrac{\left(m^2+n^2+p^2\right)}{\left(m^2+np\right)^2+\left(n^2+mp\right)^2+\left(p^2+mn\right)^2}\geq\dfrac{3}{4}$ hay ta cần chứng minh

$$m^4+n^4+p^4+5\left(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2\right)\geq 6mnp\left(m+n+p\right)$$

Dễ thấy $m^4+n^4+p^4\geq m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2; m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2\geq mnp\left(m+n+p\right)$

Nên ta được

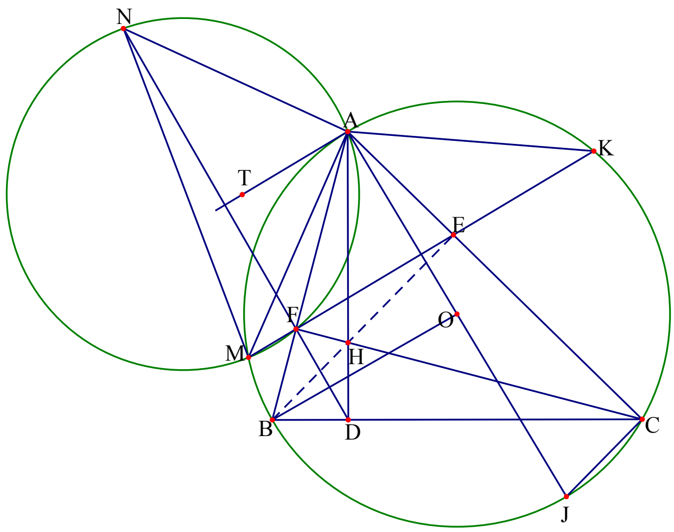
$$m^4+n^4+p^4+5\left(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2\right)\geq 6\left(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2\right)\geq 6mnp\left(m+n+p\right).$$

Như vậy bất đẳng thức $\dfrac{1}{\left(1+x\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+y\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+z\right)^2}\geq\dfrac{3}{4}$ hay $Q\geq\dfrac{3}{4}$.

Câu 4 (6.0 điểm).

1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A, B, C của tam giác đó. Đường thẳng EF cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm thứ nhất M (M khác phía với O so với đường thẳng AB), đường thẳng BM cắt đường thẳng DF tại N.

Lời giải



a) Chứng minh rằng EF vuông góc với OA.

+ **Cách 1.** Ta có $\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^0$ nên tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn, suy ra $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}$. Vẽ đường kính AJ của đường tròn $\left(O\right)$, khi đó $\widehat{CAJ}=90^0-\widehat{CJA}=90^0-\widehat{CBA}=\widehat{BAD}$. Từ đó ta có $\widehat{CAJ}+\widehat{AEF}=\widehat{BAD}+\widehat{ABC}=90^0$ nên EF vuông góc với AJ hay EF vuông góc với AO.

+ **Cách 2.** Tương tự như trên ta có tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$. Vẽ tiếp tuyến AT với đường tròn (O), khi đó ta có $\widehat{BAT} = \widehat{BCA}$. Suy ra $\widehat{BAT} = \widehat{AFE}$ nên AT song song với EF. Mà ta có AT vuông góc với OA nên suy ra EF vuông góc với OA.

b) Chứng minh rằng $AM = AN$.

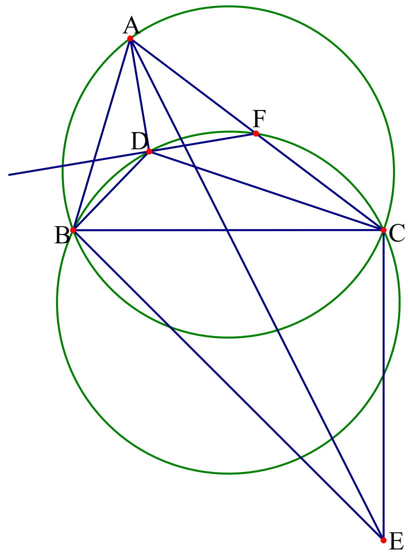
Để ý đến các tứ giác AMBC ACDF nội tiếp đường tròn ta có $\widehat{AMN} = \widehat{ACB} = \widehat{BFD} = \widehat{AFN}$ nên suy ra tứ giác MNAF nội tiếp đường tròn. Từ đó ta được

$$\widehat{ANM} = \widehat{AFE} = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{BM} + sd\overset{\frown}{AK}\right) = \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{BM} + sd\overset{\frown}{AM}\right) = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AB} = \widehat{ACB} = \widehat{NMA}$$

Điều này dẫn đến tam giác AMN cân tại A, do đó suy ra $AM = AN$.

2. Cho tam giác nhọn ABC, D là điểm trong tam giác đó sao cho $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^0$ và $AC.BD = AD.BC$. Chứng minh rằng $\frac{AB.CD}{AC.BD} = \sqrt{2}$.

Lời giải



Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác BCE vuông cân tại E. Khi đó ta có

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^0 = \widehat{ACB} + \widehat{BCE} = \widehat{ACE}.$$

Lại từ $AC.BD = AD.BC$ và $BC = CE$ ta được $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{EC}$ nên suy ra hai tam giác ABD và ACE đồng dạng với nhau. Từ đó dẫn đến $\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}$ và $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ nên $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ nên ta lại được hai tam giác ADC và ABE đồng dạng, suy ra $\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{CD}$, hay ta được $AB.CD = AD.BE$. Để ý rằng tam giác BCE vuông cân lại C nên ta có $BE = BC\sqrt{2}$. Từ đó ta được $AB.CD = AD.BC\sqrt{2}$. Mà ta đã có $AC.BD = AD.BC$, do đó $AB.CD = AC.BD\sqrt{2}$

Do vậy ta có $\frac{AB.CD}{AC.BD} = \sqrt{2}$

Câu 5 (2.0 điểm). Trong hình vuông cạnh bằng 1 có 2019 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng $\frac{1}{91}$ nằm trong hình vuông đó mà không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

Lời giải

Chia mỗi cạnh của hình vuông thành 45 phần bằng nhau. Khi đó hình vuông có cạnh bằng 1 được chia thành $45 + 45 = 2025$ hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{45}$. Do số điểm ta nằm trong hình vuông lớn là 2019 điểm nên theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại một hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{45}$ không chứa điểm nào. Không mất tính tổng quát ta gọi hình vuông đó là MNPQ, khi đó xét đường tròn có tâm O và bán kính $\frac{1}{90}$ nội tiếp hình vuông MNPQ thì đường tròn tâm O đó không chưa điểm nào trong 2109 điểm đã cho. Do $\frac{1}{91} < \frac{1}{90}$ nên khi vẽ đường tròn tâm O bán kính $\frac{1}{91}$ thì đường tròn này nằm trong hình vuông MNPQ, do đó đường tròn này không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã xét. Vậy bài toán được chứng minh.

Lời giải trên chỉ mang tính tham khảo, không phải là đáp án chính của đề thi. Nếu có gì sai sót mong được thông cảm và góp ý. Nếu bạn đọc có những góp ý xin được chia sẻ về email: nguyenkhanhdatchi@gmail.com