ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH QUẢNG TRỊ

Năm học 2018 – 2019

Câu 1 (4.0 điểm). Cho biểu thức $a = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

a) Chứng minh a là nghiệm của phương trình $a^2 - 2a - 4 = 0$.

b) Tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}$.

Câu 2 (4.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x + y + 2xy = 2 \end{cases}$

b) Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)(x+5) = 360$

Câu 3 (4.0 điểm).

a) Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \geq 1; b \geq 1; c \geq 1$ và $ab + bc + ca = 9$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Câu 4 (6.0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AC < AB)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC và D là điểm nằm trên đoạn AH (D khác A và H). Đường thẳng BD cắt đường tròn tâm C bán kính CA tại E và F (F nằm giữa B và D). Gọi M là điểm nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $\widehat{ACF} = 2\widehat{BFM}$ và N là giao điểm của MF với AH.

a) Chứng minh rằng $BH.BC = BE.BF$ và tứ giác EFHC nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng HD là phân giác của góc $\widehat{EHF}$.

c) Chứng minh rằng F là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Câu 5 (2.0 điểm).

Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\dfrac{a^2}{a^2+b^2} + \dfrac{c^2}{a^2+c^2} = \dfrac{2c}{b+c}$. Chứng minh rằng bc là một số chính phương.

==========Hết đề===========

ĐÁP ÁN THAM KHẢO ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH QUẢNG TRỊ

Năm học 2018 – 2019

Câu 1 (4.0 điểm). Cho biểu thức $a = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

a) Chứng minh a là nghiệm của phương trình $a^2 - 2a - 4 = 0$.

Lời giải

Từ $a = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ nên dễ thấy $a > 0$. Từ đó ta được

$$\begin{aligned} a^2 &= 4+\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 4-\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)} \\ &= 8 + 2\sqrt{16-\left(10+2\sqrt{5}\right)} = 8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 8+\sqrt{5-2\sqrt{5}+1} \\ &= 8+2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = 8+2\left(\sqrt{5}-1\right) = 6+2\sqrt{5} = 5+2\sqrt{5}+1 = \left(\sqrt{5}+1\right)^2 \end{aligned}$$

Do $a > 0$ nên từ $a^2 = \left(\sqrt{5}+1\right)^2$ ta suy ra được $a = \sqrt{5}+1$. Thay vào phương trình $a^2 - 2a - 4 = 0$ ta được đẳng thức $6+2\sqrt{5} - 2\left(\sqrt{5}+1\right) - 4 = 0$ đúng. Do đó a là nghiệm của phương trình đã cho trên.

b) Tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}$.

Lời giải

Để ý rằng a là nghiệm của phương trình $a^2 - 2a - 4 = 0$. Do đó ta biến đổi biểu thức T như sau

$$T = \frac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12} = \frac{a^2\left(a^2-2a-4\right) - 2a\left(a^2-2a-4\right) + \left(a^2-2a-4\right) + 8}{a^2 - 2a - 4 + 16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Câu 2 (4.0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x + y + 2xy = 2 \end{cases}$

Lời giải

Biến đổi phương trình trên ta được

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ 2\left(xy-1\right) = x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+y\right)^3 - 3xy\left(x+y\right) = 8 \\ xy = 2 - \left(x+y\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x+y\right)^3 + 3\left(x+y-2\right)\left(x+y\right) = 16 \\ 2xy = 2-\left(x+y\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x+y\right)^3 + 3\left(x+y\right)^2 - 6\left(x+y\right) = 16 \\ x+y = 2-2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+y-2\right)\left[2\left(x+y\right)^2 + 7\left(x+y\right) + 8\right] = 0 \\ x+y = 2-2xy \end{cases}$$

Dễ thấy $2\left(x+y\right)^2 + 7\left(x+y\right) + 8 > 0$ nên từ hệ phương trình trên ta được

$$\begin{cases} x+y = 2 \\ x+y = 2-2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; y = 2 \\ x = 2; y = 0 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(0;2\right), \left(2;0\right)$.

b) Giải phương trình $\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)^2\left(x+4\right)\left(x+5\right)=360$.

Lời giải

Phương trình đã cho được viết lại thành $\left(x^2+6x+5\right)\left(x^2+6x+9\right)\left(x^2+6x+8\right)=360$.

Đặt $t=x^2+6x+5$, khi đó phương trình trên được viết lại thành

$$t\left(t+3\right)\left(t+4\right)=360 \Leftrightarrow t^3+7t^2+12t-360=0 \Leftrightarrow \left(t-5\right)\left(t^2+12t+72\right)=0$$

Dễ thấy $t^2+12t+72=\left(t+6\right)^2+36>0$ nên từ phương trình trên ta được

$$t-5=0 \Leftrightarrow t=5 \Leftrightarrow x^2+6x+5=5 \Leftrightarrow x\in\left\{-6;0\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{-6;0\right\}$.

Câu 3 (4.0 điểm).

a) Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$.

Lời giải

Với a, b, c là các số thực bất kì ta luôn có

$$\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2\ge 0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a\ge 1; b\ge 1; c\ge 1$ và $ab+bc+ca=9$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

Lời giải

+ Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $P=a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca=9$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là 9, đạt được tại $a=b=c=\sqrt{3}$.

+ Không mất tính tổng quát ta giả sử $1\le c\le b\le a$.

Khi đó từ giả thiết ta có $9=ab+bc+ca\ge a+1+a$ hay ta được $a\le 4$.

Cũng từ $1\le c\le b\le a$ và kết hợp với $ab+bc+ca=9$ ta có

$$\left(a-b\right)\left(b-c\right)\ge 0 \Leftrightarrow ab-b^2-ca+bc\ge 0 \Leftrightarrow b^2+ca\le ab+bc$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\le a^2+c^2+ab+bc-ca \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\le\left(a-c\right)^2+9$$

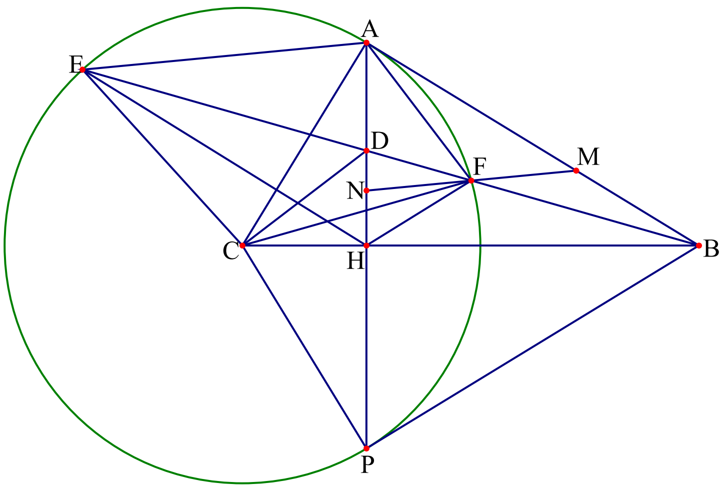
Để ý là ta có $1\le a\le 4$ và $c\ge 1$ nên ta có $\left(a-c\right)^2\le\left(4-1\right)^2=9$. Do vậy ta được $P\le 18$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a=4; b=c=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 18, đạt được tại $a=4; b=c=1$ hoặc các hoán vị.

Câu 4 (6.0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A $\left(AC<AB\right)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC và D là điểm nằm trên đoạn AH (D khác A và H). Đường thẳng BD cắt đường tròn tâm C bán kính CA tại E và F (F nằm giữa B và D). Gọi M là điểm nằm trên đoạn thẳng AB sao cho $\widehat{ACF}=2\widehat{BFM}$ và N là giao điểm của MF với AH.

Lời giải



a) Chứng minh $BH.BC = BE.BF$ và tứ giác EFHC nội tiếp đường tròn.

Do AB vuông góc với AC nên AB là tiếp tuyến tại A với đường tròn $\left(C;CA\right)$. Khi đó dễ thấy $\widehat{AEF} = \widehat{BAF}$ nên suy ra hai tam giác BAF và BEA đồng dạng với nhau, do đó $\frac{BF}{BA} = \frac{BA}{BE}$ hay ta được $BA^2 = BE.BF$.

Trong tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH nên $AB^2 = BK.BC$. Kết hợp hai kết quả đó ta suy ra được $BH.BC = BE.BF$.

Cũng từ $BH.BC = BE.BF$ ta được $\frac{BH}{BF} = \frac{BE}{BC}$ nên suy ra hai tam giác BHF và BEC đồng dạng với nhau. Do đó ta được $\widehat{BHF} = \widehat{BEC}$ nên tứ giác EFHC nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh HD là phân giác của góc $\widehat{EHF}$.

Do tứ giác EFHC nội tiếp đường tròn nên ta có $\widehat{BHF} = \widehat{CEF} = \widehat{EFC} = \widehat{EHC}$. Lại có AH vuông góc với BC nên suy ra $\widehat{AHE} = \widehat{AHF}$ hay HA là phân giác của góc $\widehat{EHF}$

c) Chứng minh F là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Gọi P là giao điểm thứ hai của AH với đường tròn $\left(C;CA\right)$, khi đó dễ chứng minh được BP cùng là tiếp tuyến với đường tròn $\left(C;CA\right)$. Ta có $2\widehat{BFM} = \widehat{ACF} = 2\widehat{AEF}$ hay ta được $\widehat{BFM} = \widehat{AEF}$ nên suy ra MN song song với AE. Đến đây ta suy ra được $\widehat{ANM} = \widehat{PAE}$, mặt khác ta lại có $\widehat{PAM} = \widehat{PEA}$ nên hai tam giác AMN và EPA đồng dạng với nhau. Ta đã có tứ giác EFHC nội tiếp đường tròn và HA là phân giác của góc $\widehat{EHF}$ nên ta có $\widehat{NFA} = 180^0 - \widehat{FAE} = \widehat{FPE} = \frac{1}{2}\widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FHE} = \widehat{EHA}$. Kết hợp với $\widehat{ANM} = \widehat{HAE}$ ta suy ra được hai tam giác ANF và EAH đồng dạng với nhau. Đến đây ta có được $\frac{MN}{AP} = \frac{AN}{AE} = \frac{NF}{AH} = \frac{2NF}{AP}$ nên suy ra $MN = 2NF$ hay F là trung điểm của MN.

Câu 5 (2.0 điểm). Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}=\frac{2c}{b+c}$. Chứng minh rằng bc là một số chính phương.

Lời giải

Từ giả thiết $\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}=\frac{2c}{b+c}$ ta suy ra được $\left(b+c\right)\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)$. Khi đó ta có biến đổi giả thiết như sau

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}=\frac{2c}{b+c}\Leftrightarrow\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{c}{b+c}+\frac{c^2}{c^2+a^2}-\frac{c}{b+c}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2\left(b+c\right)-c\left(a^2+b^2\right)}{\left(b+c\right)\left(a^2+b^2\right)}+\frac{c^2\left(b+c\right)-c\left(c^2+a^2\right)}{\left(b+c\right)\left(a^2+c^2\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{b\left(a^2-bc\right)}{\left(b+c\right)\left(a^2+b^2\right)}+\frac{c\left(bc-a^2\right)}{\left(b+c\right)\left(a^2+c^2\right)}=0\Leftrightarrow\frac{a^2-bc}{b+c}\left(\frac{b}{a^2+b^2}-\frac{c}{a^2+c^2}\right)=0$$

$$\frac{a^2-bc}{b+c}.\frac{b\left(a^2+c^2\right)-c\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}=0\Leftrightarrow\frac{a^2-bc}{b+c}.\frac{a^2\left(b-c\right)-bc\left(b-c\right)}{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(a^2-bc\right)^2\left(b-c\right)}{\left(b+c\right)\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}=0\Leftrightarrow\left(a^2-bc\right)^2\left(b-c\right)=0$$

+ Khi $a^2-bc=0\Leftrightarrow bc=a^2$ nên bc là một số chính phương.
+ Khi $b-c=0\Leftrightarrow b=c$ nên bc cũng là một số chính phương.

Lời giải trên chỉ mang tính tham khảo, không phải là đáp án chính của đề thi. Nếu có gì sai sót mong được thông cảm và góp ý. Nếu bạn đọc có những góp ý xin được chia sẻ về email: nguyenkhanhdatchi@gmail.com