MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ ÔN THI LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

BÀI TẬP HÌNH HỌC ÔN THI LỚP 10 CHUYÊN TOÁN 2019 - 2020

Bài 1. Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AE, AF của (O)(E, F là các tiếp điểm). Điểm D di động trên cung lớn EF sao cho $DE < DF$, D không trùng với E và tiếp tuyến tại D của (O) cắt các tia AE, AF lần lượt tại B, C.

a) Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng OB, OC. Chứng minh tứ giác BNMC nội tiếp một đường tròn.

b) Kẻ tia phân giác DK của góc $\widehat{EDF}$ và tia phân giác OI của góc $\widehat{BOC}$ $(K \in EF; I \in BC)$. Chứng minh rằng OI song song với DK.

c) Chứng minh đường thẳng IK luôn đi qua một điểm cố định.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Phan Bội Châu Nghệ An, năm học 2016 – 2017

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BB', CC' cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm BC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại điểm P.

1) Chứng minh hai tam giác BPC' và CPB' đồng dạng.

2) Các đường phân giác của các góc $\widehat{BPC'}$, $\widehat{CPB'}$ lần lượt cắt AB, AC tại các điểm E và F. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, K là giao điểm của HM và AO'.

a) Chứng minh tứ giác PEKF nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh các tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O') cắt nhau tại một điểm nằm trên (O).

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Thành Phố Hà Nội, năm học 2016 – 2017

Bài 3. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây BC không đi qua O. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A(khác B). Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O)(M, N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC và K là giao điểm của AC với MN.

a) Chứng minh rằng IA là tia phân giác của góc $\widehat{MIN}$.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{2}{AK} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$.

c) Lấy các điểm E, P, F lần lượt trên AM, MN, NA sao cho tứ giác AEPF là hình bình hành. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua đường thẳng EF. Chứng minh rằng ba điểm O, P, Q thẳng hàng.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Tỉnh Hà Nam, năm học 2016 – 2017

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M khác A. Qua M kẻ các tiếp tuyến MC và MD với đường tròn (O')(C, D là tiếp điểm và D nằm trong đường tròn tâm O).

a) Chứng minh rằng $AD.BC = AC.DB$.

b) Các đường thẳng AC, AD cắt đường tròn (O) lần lượt tại E và F (E, F khác A). Chứng minh đường thẳng CD đi qua trung điểm của EF.

c) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm có định khi M thay đổi.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Phan Bội Châu Nghệ An, năm học 2017 – 2018

Bài 5. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tam đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tia AI cắt đường tròn (O) tại J khác A. Đường thẳng OJ cắt đường tròn (O) tại K khác J và cắt C tại E.

a) Chứng minh rằng J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC và $JE.JK = JI^2$.

b) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S. Chứng minh rằng $SJ.EK = SK.EJ$.

c) Đường thẳng SA cắt đường tròn (O) tại D khác A, đường thẳng DI cắt đường tròn (O) tại M khác D. Chứng minh rằng MJ đi qua trung điểm của đoạn thẳng EI.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu, năm học 2017 – 2018

Bài 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại M. Kẻ đường cao BF của tam giác ABC(F thuộc AC). Từ F kẻ đường thẳng song song với MA cắt AB tại E. Gọi H là giao điểm củ CE và BF, D là giao điểm của AH và BC.

a) Chứng minh rằng $MA^2 = MB.MC$ và $\dfrac{MC}{MB} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$.

b) Chứng minh rằng AH vuông góc với BC tại D.

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh bốn điểm E, F, D, I cùng nằm trên một đường tròn.

d) Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với HI cắt AB và AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng H là trung điểm của PQ.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Tỉnh Bắc Ninh, năm học 2017 – 2018

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O có $AB < AC$. Các đường cao BD, CE cắt nhau tại H (D thuộc AC, E thuộc AB). Gọi M là trung điểm của BC, tia MH cắt đường tròn (O) tại N.

a) Chứng minh rằng năm điểm A, D, H, E, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Lấy điểm P trên đoạn BC sao cho $\widehat{BHP} = \widehat{CHM}$, gọi Q là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng HP. Chứng minh rằng tứ giác DENQ là hình thang cân.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O).

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Trần Phú Hải Phòng, năm học 2016 – 2017

Bài 8. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AK, BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng $\widehat{NKH} = \widehat{MKH}$.

b) Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm I và J. Chứng minh rằng AO đi qua trung điểm của IJ.

c) Gọi P là trung điểm BC và diện tích tứ giác AMHN là S. Chứng minh rằng $2OP^2 > S$.

Bài 9. Cho đường tròn tâm O bán kính R. Tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ có B, C cố định. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc $\widehat{BHC}$ cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng tam giác AMN cân.

b) Xác định vị trí của điểm A để tam giác DEF có chu vi lớn nhất.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ tại $K(K \neq A)$. Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Trích đề thi học sinh giỏi Toán 9 Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2015 – 2016

Bài 10. Cho tam giác ABC có $(O),(I),(I_a)$ theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác với các tâm tương ứng là O, I, I_a. Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC, P là điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (O), PI_a cắt đường tròn (O) tại điểm K. Gọi M là giao điểm của PO và BC, N là điểm đối xứng với P qua O.

a) Chứng minh rằng IBI_aC là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP.

c) Chứng minh rằng $\widehat{DAI} = \widehat{KAI_a}$.

Trích đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 Tỉnh Thanh Hóa năm học 2017 – 2018

Bài 11. Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ của tam giác cắt cạnh BC tại D và cắt lại đường tròn (O) tại E. Gọi K là điểm nằm trong tam giác ABC thỏa mãn các điều kiện $KB = KC$ và $\widehat{BKC} + \widehat{BAC} = 180^0$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, O, K, D cùng thuộc một đường tròn, kí hiệu là (P).

b) Gọi L là giao điểm thứ hai của (P) và (O). Chứng minh rằng $\widehat{LAB} = \widehat{KAC}$

c) Gọi G là giao điểm của AL và BC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, M là trung điểm của đoạn GI, N là giao điểm thứ hai của đường thẳng EM và đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng NI, AK cắt nhau tại một điểm thuộc (O).

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Thành phố Đà Nẵng 2015 – 2016

Bài 12. Cho tam giác ABC nhọn và nội tiếp đường tròn (O), H là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A. P là điểm nằm trong tam giác ABC và nằm trên đường phân giác kẻ từ A. Đường tròn đường kính của AP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là G. L là hình chiếu của P lên AH.

a) Chứng minh rằng đường thẳng GL luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

b) Chứng minh rằng nếu GL đi qua trung điểm của HP thì P là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Quảng Ninh 2015 – 2016

Bài 14. Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn tâm O. Lấy điểm P trên cạnh AB sao cho $\widehat{BOP} = \widehat{ABC}$ và lấy điểm Q trên cạnh AC sao cho $\widehat{COQ} = \widehat{ACB}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ cắt đường tròn (O) tại điểm E khác A.

a) Chứng minh rằng AE song song với BC và $AB.BP = AC.CQ$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng đối xứng với BC qua PQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AQP.

Bài 15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn (K) tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại S. Các đường thẳng SE, SF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N khác S. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM, AFN cắt nhau tại P khác A. Gọi giao điểm của EN, FM với đường tròn (K) lần lượt là G, H.

a) Chứng minh rằng trung điểm I của EF là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Gọi giao điểm của GH với MN là T. Chứng minh rằng tứ giác AMPN là hình bình hành và tam giác AST cân.

Bài 1. Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AE, AF của (O) (E, F là các tiếp điểm). Điểm D di động trên cung lớn EF sao cho $DE < DF$, D không trùng với E và tiếp tuyến tại D của (O) cắt các tia AE, AF lần lượt tại B, C.

a) Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng OB, OC. Chứng minh tứ giác BNMC nội tiếp một đường tròn.

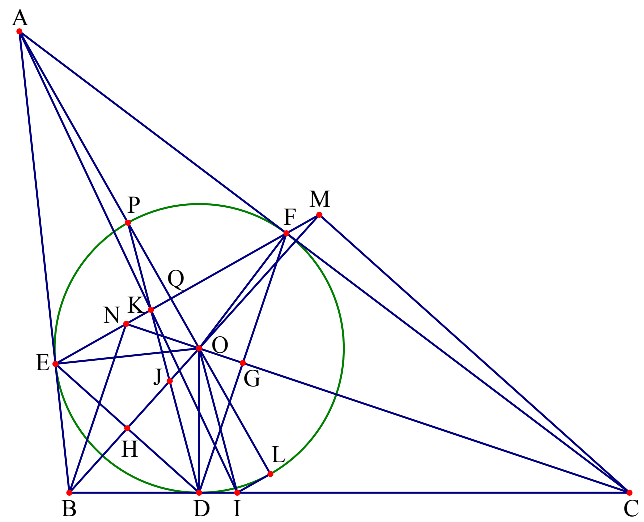
b) Kẻ tia phân giác DK của góc $\widehat{EDF}$ và tia phân giác OI của góc $\widehat{BOC}$ $(K \in EF; I \in BC)$. Chứng minh rằng OI song song với DK.

c) Chứng minh đường thẳng IK luôn đi qua một điểm cố định.

Phân tích và Lời giải

a) Chứng minh rằng tứ giác BNMC nội tiếp

• ***Phân tích tìm lời giải***. *Yêu cầu chứng minh tứ giác nội tiếp đường tròn làm ta nhớ đến các phương pháp chứng minh đã được học, tuy nhiên xử lý theo hướng nào thì lại phụ thuộc đến việc đọc được các giả thiết đang còn bị ẩn đi của bài toán. Quan sát hình vẽ và kết hợp với yếu tố liên quan đến đường tròn nội tiếp ta nghĩ đến chứng minh tứ giác BNMC nội tiếp theo các hướng đi như sau.*



+ ***Hướng 1.*** *Đầu tiên với ý tưởng chứng minh hai góc đối diện của tứ giác BNMC có tổng bằng* 180^0. *Tức là ta cần chỉ ra được* $\widehat{NBC} + \widehat{NMC} = 180^0$. *Tuy nhiên trong bài toán các góc ta xét là các góc bất kì và lại không có mối quan hệ với nhau nên hướng đi này không cho ta kết quả mong muốn.*

+ ***Hướng 2.*** *Chứng minh hai góc* $\widehat{BMC} = \widehat{BNC}$. *Quan sát hình vẽ ta dự đoán rằng* $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90^0$.

Để ý rằng ta có $\widehat{BEO} = \widehat{BDO} = 90^0$, *do đó ta quy bài toán về chứng minh các tứ giác BONE hoặc DONE và các tứ giác COFM hoặc DOMC nội tiếp.*

Do vai trò của điểm M và N như nhau nên các phép chứng minh tương tự nhau. Do O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên ta sử dụng phép biến đổi góc để chứng minh tứ giác BONE hoặc DONE (Với các tứ giác giác COFM hoặc DOMC ta biến đổi hoàn toàn tương tự).

- Để chứng minh tứ giác BONE nội tiếp đường tròn ta biến đổi góc như sau

$$\widehat{ONF} = \widehat{EFA} - \widehat{OCA} = 90^0 - \widehat{OAF} - \frac{1}{2}\widehat{ACA} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{BAC} - \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \widehat{ABO}$$

- Để chứng minh tứ giác DONE nội tiếp đường tròn ta có biến đổi góc $\widehat{DEF} = \frac{1}{2}\widehat{DOF} = \widehat{COD}$.

Do A cố định và B, C thay đổi nên ta thấy N có thể nằm trên đoạn thẳng EF và cũng có thể nằm trên tia đối của tia EF. Trường hợp N nằm trên EF ta biến đổi như trên, còn trường hợp N nằm trên tia đối của tia EF ta biến đổi hoàn toàn tương tự với điểm M trong hình trên, do đó ta không cần phải xét hai trường hợp. Ngoài ra trong phép phân tích *trên ta không đi theo hướng chứng minh tứ giác BDON nội tiếp vì ta đang cần chứng minh* $\widehat{BNO}=90^0$ *nên không thể biến đổi các góc liên quan đến điểm N đến các góc đặc biệt trong bài toán.*

+ ***Hướng 3.*** *Chứng minh* $\widehat{NCB}=\widehat{NMB}$ *hoặc tương tự với* $\widehat{MNC}=\widehat{MBC}$. *Theo giả thiết của bài toán ta có* $\widehat{NCB}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$. *Như vậy ta cần chỉ ra được* $\widehat{NMB}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$. *Quan sát hình vẽ ta nhận thấy* $\widehat{NMB}=\widehat{AFE}-\widehat{ABM}=\widehat{AFE}-\frac{1}{2}\widehat{ABC}$. *Mà ta lại có* $\widehat{AFE}=90^0-\frac{1}{2}\widehat{BAC}$. *Từ đó thì ta suy ra được* $\widehat{NMB}=90^0-\frac{1}{2}\left(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}\right)=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$. *Đến đây ta có thêm một lời giải cho ý thứ nhất.*

- **Trình bày lời giải.**

+ **Lời giải 1.** Ta có $\widehat{DEF}=\frac{1}{2}\widehat{DOF}=\widehat{DOC}$ nên $\widehat{DEF}+\widehat{DON}=180^0$ suy ra ta có tứ giác DONE nội tiếp. Mặt khác ta có $\widehat{BEO}=\widehat{BDO}=90^0$ nên BDOE nội tiếp. Như vậy năm điểm B, D, E, O, N cùng thuộc một đường tròn. Từ đó suy ra $\widehat{BNO}=\widehat{BEO}=90^0$. Chứng minh tương tự ta được $\widehat{BMC}=90^0$. Như vậy ta có $\widehat{BMC}=\widehat{BNC}=90^0$ hay tứ giác BNMC nội tiếp.

+ **Lời giải 2**. Theo giả thiết của bài toán ta có $\widehat{NCB}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$. Do $\widehat{AFE}$ là góc ngoài của tam giác FBM nên ta có $\widehat{NMB}=\widehat{AFE}-\widehat{ABM}=\widehat{AFE}-\frac{1}{2}\widehat{ABC}$. Mà ta lại có $\widehat{AFE}=90^0-\frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Từ đó ta được $\widehat{NMB}=90^0-\frac{1}{2}\left(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}\right)=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$. Kết hợp hai kết quả ta thu được $\widehat{NMB}=\widehat{NCB}$, do đó tứ giác BNMC nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng OI song song với DK.

- ***Phân tích.*** *Giả thiết cho các tia phân giác và cầu chứng minh hai đường thẳng song song nên ta nghĩ đến các hướng đi sau.*

+ ***Hướng 1.*** *Sử dụng tính chất tia phân giác để suy ra các tỉ số bằng nhau và áp dụng định lí Talet để chứng minh hai đường thẳng song song. Ta có* $\frac{OB}{OC}=\frac{IB}{IC}$ *và* $\frac{DE}{DF}=\frac{EK}{FK}$, *ta phải tìm được mối liên hệ giữa tỉ số* $\frac{IO}{DK};\frac{CI}{CD}$ *với các tỉ số trên. Tuy nhiên đến đây thì có vẻ như hướng đi này không thể tiếp tục.*

+ ***Hướng 2.*** *Sử dụng phép biến đổi góc cộng góc để chỉ ra một cặp góc đồng vị hoặc một cặp góc so le trong bằng nhau. Ở đây ta để ý đến các tia phân giác*

Ta có $\widehat{EDF}=180^0-\widehat{EDB}-\widehat{FDC}=180^0-\left(90^0-\frac{\widehat{ABC}}{2}\right)-\left(90^0-\frac{\widehat{ACB}}{2}\right)=\frac{\widehat{ABC}+\widehat{ACB}}{2}$

Mà ta lại có $\widehat{KDC}=\widehat{KDF}+\widehat{FDC}=\frac{\widehat{EDF}}{2}+\widehat{FDC}=90^0+\frac{\widehat{ABC}}{4}-\frac{\widehat{ACB}}{4}$. *Như vậy ta cần chỉ ra được* $\widehat{OIC}=90^0+\frac{\widehat{ABC}}{4}-\frac{\widehat{ACB}}{4}$. *Tuy nhiên do OI là phân giác của* $\widehat{BOC}$ *nên điều này hiển nhiên đúng.*

+ ***Hướng 3.*** *Gọi H là giao điểm của BO với DE và G là giao điểm của CO với CF. Gọi J là giao điểm của DK với OB. Khi đó để ý đến tứ giác OHDG nội tiếp đường tròn ta có* $\widehat{HOG}+\widehat{HDG}=180^0$. *Để ý rằng OI là phân giác của góc*

$\widehat{BOC}$ *và DK là phân giác của góc* $\widehat{EDF}$ *nên* $\widehat{EDK} + \widehat{BOI} = 90^0$*. Mà ta lại có* $\widehat{EDK} + \widehat{BJD} = 90^0$ *nên ta được* $\widehat{BOI} = \widehat{BJD}$*. Từ đó suy ra OI song song với DK.*

- **Trình bày lời giải.**

+ Lời giải 1. Ta có biến đổi góc như sau

$$\widehat{EDF} = 180^0 - \widehat{EDB} - \widehat{FDC} = 180^0 - \left(90^0 - \frac{\widehat{ABC}}{2}\right) - \left(90^0 - \frac{\widehat{ACB}}{2}\right) = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2}$$

Mà ta lại có $\widehat{KDC} = \frac{\widehat{EDF}}{2} + \widehat{FDC} = \frac{\widehat{ABC}}{4} + \frac{\widehat{ACB}}{4} + 90^0 - \frac{\widehat{ACB}}{2} = 90^0 + \frac{\widehat{ABC}}{4} - \frac{\widehat{ACB}}{4}$. Mặt khác do OI là phân giác của góc $\widehat{BOC}$ nên ta có

$$\widehat{OIC} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \widehat{BOI} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{BOC}}{2} = \frac{1}{2}\left(180^0 - \frac{\widehat{ABC}}{2} - \frac{\widehat{ACB}}{2}\right) = 90^0 + \frac{\widehat{ABC}}{4} - \frac{\widehat{ACB}}{4}$$

Kết hợp hai kết quả trên ta suy ra $\widehat{KDC} = \widehat{OIC}$ nên OI song song với DK.

+ Lời giải 2. Gọi H, G lần lượt là giao điểm của BO với DE và CO với CF. Gọi J là giao điểm của DK với OB. Khi đó dễ thấy tứ giác OHDG nội tiếp đường tròn, do đó ta được $\widehat{HOG} + \widehat{HDG} = 180^0$. Do OI là phân giác của góc $\widehat{BOC}$ và DK là phân giác của góc $\widehat{EDF}$ nên ta có $\widehat{EDK} + \widehat{BOI} = 90^0$. Mà ta lại có $\widehat{EDK} + \widehat{BJD} = 90^0$ nên ta được $\widehat{BOI} = \widehat{BJD}$. Từ đó suy ra OI song song với DK.

c) Chứng minh đường thẳng IK luôn đi qua một điểm cố định.

- ***Phân tích.*** *Trên cở sở hình vẽ ta dự đoán rằng đường thẳng IK đi qua điểm A. Cũng từ giả thiết ta được điểm A cố định nên nhận định trên càng có cơ sở. Như vậy ta cần phải chứng minh được ba điểm I, K, A thẳng hàng. Từ giả thiết bài toán và kết quả các hai ý đầu ta nghĩ đến việc lập các tỉ số bằng nhau để áp dụng định lý Talets hoặc chỉ ra điểm K trùng với giao điểm của AI với EF.*

+ *Hướng 1.* *Giả sử P là giao điểm của DK với đường tròn* (O)*, khi đó P là điểm chính giữa cung nhỏ EF và ba điểm O, P, A thẳng hàng. Để ý rằng lúc này KP song song với OD, như vậy nếu ta có được* $\frac{KP}{OI} = \frac{AP}{AO}$ *thì xem như bài toán được chứng minh. Ta cần tìm các tỉ số bằng với* $\frac{KP}{OI}; \frac{AP}{AO}$*.*

Gọi Q là giao điểm của AO với EF, khi đó dễ thấy hai tam giác KPQ và IDO đồng dạng với nhau nên ta có $\frac{KP}{OI} = \frac{PQ}{DO} = \frac{PQ}{PO}$*. Mặt khác ta có* $\frac{PQ}{PO} = 1 - \frac{OQ}{PO} = 1 - \frac{OQ}{OE} = 1 - \frac{OE}{OA} = 1 - \frac{OP}{OA} = \frac{AP}{OA}$*. Như vậy ta có một lời lời giải cho bài toán.*

+ *Hướng 2.* *Cũng đi chứng minh* $\frac{KP}{OI} = \frac{AP}{AO}$*, nhưng ở đây ta tiếp cận bài toán theo một con đường khác hơn. Dễ thấy* $\widehat{KPO} = \widehat{KDO} = \widehat{DOI}$ *nên hai tam giác KQP và DIO đồng dạng, do đó Từ đó ta được* $\frac{KP}{OI} = \frac{PQ}{OD} = \frac{PQ}{OE}$*. Mặt khác ta lại có P là điểm chính giữa cung nhỏ EF nên EP là phân giác của tam giác AEQ, từ đó ta được* $\frac{PA}{PQ} = \frac{EA}{EQ} = \frac{AO}{EO}$*, suy ra* $\frac{PA}{OA} = \frac{PQ}{EO}$*. Kết hợp hai kết quả trên ta được* $\frac{AP}{AO} = \frac{KP}{OI}$*, như vậy ta có lời giải khác cho bài toán.*

+ ***Hướng 3.*** *Gọi K' là giao điểm của AI với EF, ta cần chứng minh hai điểm K và K' trùng nhau. Chú ý rằng ta đã có PD song song với OI, như vậy nếu chỉ ra được PK' song song với OI thì bài toán xem như được chứng minh.*

Gọi giao điểm của AO với đường tròn (O) *là L. Khi đó* $\widehat{COL} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right)$. *Mặt khác* $\widehat{DOB} = \widehat{EOB} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 90^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BAC} - \widehat{BCA}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right)$. *Từ đó ta được* $\widehat{COL} = \widehat{BOD}$ *nên suy ra* $\widehat{DOI} = \widehat{LOI}$, *điều này dẫn đến* $\Delta IOD = \Delta IOL$, *do đó LI là tiếp tuyến của đường tròn* (O). *Dễ thấy* $AP.AL = AE^2 = AQ.AO$ *nên ta được* $\frac{AQ}{AL} = \frac{AP}{AO}$. *Mà do QK' song song với IL nên theo định lý Talets ta có* $\frac{AQ}{AL} = \frac{AK'}{AI}$. *Từ đó* $\frac{AK'}{AI} = \frac{AP}{AO}$ *nên có* PK' *song song với OI. Điều này dẫn đến PK' và PD trùng nhau hay K và K' trùng nhau. Từ đó suy ra A, K, I thẳng hàng.*

- **Trình bày lời giải.**

+ **Lời giải 1.** Giả sử P là giao điểm của DK với cung nhỏ EF, khi đó P là điểm chính giữa cung nhỏ EF. Từ đó suy ra ba điểm A, P, O thẳng hàng. Gọi Q là giao điểm AO với EF. Do đó ta được AO vuông góc với EF tại Q. Xét hai tam giác vuông KPQ và IDO có $\widehat{OID} = \widehat{ODP} = \widehat{KPQ}$ nên tam giác KPQ đồng dạng với tam giác IDO. Do đó ta được $\frac{KP}{OI} = \frac{PQ}{DO} = \frac{PQ}{PO}$. Mặt khác $\widehat{OAE} = 90^0$, lại có EQ vuông góc với OP và $OE = OP$ nên ta được $\frac{OQ}{OE} = \frac{OE}{OA}$.
Từ đó suy ra $\frac{PQ}{PO} = 1 - \frac{OQ}{PO} = 1 - \frac{OQ}{OE} = 1 - \frac{OE}{OA} = 1 - \frac{OP}{OA} = \frac{AP}{OA}$. Kết hợp hai kết quả trên ta được $\frac{KP}{OI} = \frac{AP}{AO}$, mà ta có KP song song với OD. Do đó suy ra ba điểm A, K, I thẳng hàng. Vậy IK luôn đi qua điểm cố định A.

+ **Lời giải 2.** Gọi giao điểm của DK với đường tròn (O) là P, khi đó dễ thấy ba điểm A, P, O thẳng hàng. Giả sử AO cắt EF tại Q. Do DK song song với OI nên ta có $\widehat{KPO} = \widehat{KDO} = \widehat{DOI}$, điều này dẫn đến hai tam giác KQP và DIO đồng dạng với nhau. Từ đó ta được $\frac{KP}{OI} = \frac{PQ}{OD} = \frac{PQ}{OE}$. Mặt khác ta lại có P là điểm chính giữa cung nhỏ EF nên EP là phân giác của tam giác AEQ, theo tích chất đường phân giác kết hợp hai tam giác AEO và AQE ta suy ra được $\frac{PA}{PQ} = \frac{EA}{EQ} = \frac{AO}{EO}$, suy ra $\frac{PA}{OA} = \frac{PQ}{EO}$. Kết hợp hai kết quả trên ta được $\frac{AP}{AO} = \frac{KP}{OI}$, mà ta có KP song song với IO nên theo định lí Talets ta suy ra được ba điểm A, K, I thẳng hàng. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

+ **Lời giải 3.** Gọi giao điểm của AO với đường tròn (O) là L. Khi đó do CO là phân giác của $\widehat{BCA}$ và AO là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên ta có $\widehat{COL} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right)$. Mặt khác do tứ giác BDOE nội tiếp đường tròn nên ta có

$$\widehat{DOB} = \widehat{EOB} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 90^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BAC} - \widehat{BCA}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right)$$

Từ đó ta được $\widehat{COL} = \widehat{BOD}$. Mà OI là phân giác của góc $\widehat{BOC}$ nên suy ra $\widehat{DOI} = \widehat{LOI}$. Kết hợp với $OD = OL$ và OI chung dẫn đến tam giác IOD bằng tam giác IOL, suy ra $\widehat{ILO} = \widehat{IDO} = 90^0$ hay LI là tiếp tuyến của đường tròn (O). Gọi K' là giao điểm của AI với EF. Khi đó dễ dàng chứng minh được $AP.AL = AE^2 = AQ.AO$ nên ta được

$\dfrac{AQ}{AL}=\dfrac{AP}{AO}$. Mà do QK' song song với IL nên theo định lý Talets ta có $\dfrac{AQ}{AL}=\dfrac{AK'}{AI}$. Từ đó dẫn đến $\dfrac{AK'}{AI}=\dfrac{AP}{AO}$, nên theo định lý Talets đảo thì ta có PK' song song với OI. Điều này dẫn đến PK' và PD trùng nhau hay K và K' trùng nhau. Từ đó suy ra ba điểm A, K, I thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BB', CC' cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm BC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại điểm P.

1) Chứng minh hai tam giác BPC' và CPB' đồng dạng.

2) Các đường phân giác của các góc $\widehat{BPC'}$, $\widehat{CPB'}$ lần lượt cắt AB, AC tại các điểm E và F. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, K là giao điểm của HM và AO'.

a) Chứng minh tứ giác PEKF nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh các tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O') cắt nhau tại một điểm nằm trên (O).

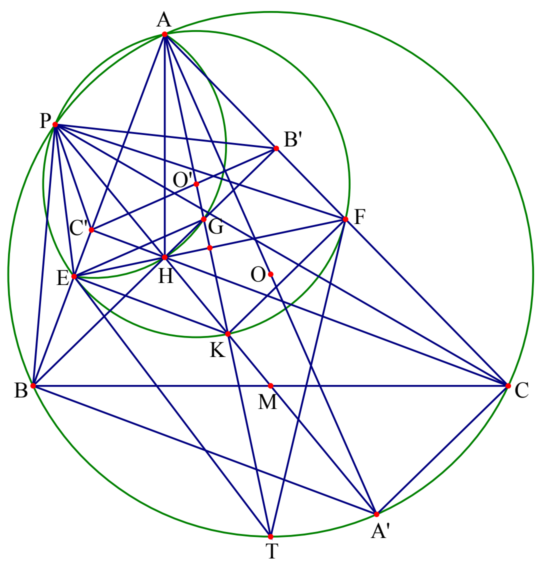
Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Thành Phố Hà Nội, năm học 2016 – 2017

Phân tích và Lời giải

1) Chứng minh hai tam giác BPC' và CPB' đồng dạng.

- ***Phân tích.*** *Giả sử HM cắt đường tròn* (O) *tại* A' *khi đó* AA' *là đường kính của đường tròn* (O), *do đó* $\widehat{APH}=\widehat{AB'H}=\widehat{AC'H}=90^0$. *Từ đó tứ giác* $PAB'C'$ *nội tiếp đường tròn đường kính AH, nên ta có* $\widehat{PC'B}=\widehat{PB'C}$, *mà ta lại có* $\widehat{PBC'}=\widehat{PCB'}$ *nên* $\Delta PBC' \backsim \Delta PCB'$.

- **Lời giải.** Kẻ đường kính AA' của đường tròn đường tròn (O), khi đó dễ dàng chứng minh được tứ giác $HBA'C$ là hình bình hành. Do đó HA' đi qua điểm M nên HA' cũng đi qua điểm P. Từ đó $\widehat{APH}=90^0=\widehat{AB'H}=\widehat{AC'H}$ nên suy ra tứ giác $PAB'C'$ nội tiếp đường tròn đường kính AH. Do đó ta suy ra được $\widehat{PC'A}=\widehat{PB'A}$ nên $\widehat{PC'B}=\widehat{PB'C}$. Mà $\widehat{PBC'}=\widehat{PCB'}$ do đó ta được tam goác PBC' đồng dạng với tam giác PCB'.



2) Các đường phân giác của các góc $\widehat{BPC'}$, $\widehat{CPB'}$ lần lượt cắt AB, AC tại các điểm E và F. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và K là giao điểm của HM và AO'.

a) Chứng minh tứ giác $PEKF$ nội tiếp.

- ***Phân tích.*** *Dễ thấy* $\widehat{APK}=90^0$ *nên để chứng minh tứ giác PEKF nội tiếp đường tròn ta đi chứng minh PAFE nội tiếp đường tròn đường kính AK. Mà đường tròn* (O') *đi qua ba điểm AEF nên ta chỉ cần chứng minh AK là đường kính của đường tròn* (O'). *Muốn vậy ta vẽ đường kính* AK' *của đường tròn* (O') *và chứng minh cho hai điểm K và*

K' *trùng nhau. Ngoài ra để chứng minh Ak là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF ta cũng có thể chứng minh AE vuông góc với EK. Mặt khác ta cũng nhận thấy tam giác AEF cân tại A nên AK chính là đường phân giác của góc* $\widehat{EAF}$. *Như vậy nếu ta chỉ ra được PH cũng là phân giác của góc* $\widehat{EPF}$ *thì K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Đến đây ta có các lời giải cho bài toán.*

- **Lời giải.**

+ Lời giải 1. Trước hết ta nhận thấy tứ giác $AC'HB'$ nội tiếp đường tròn đường kính AH. Mà ta có P nằm trên đường tròn đường kính AH đồng thời nằm trên đường tròn (O) nên ta có $\widehat{PC'A} = \widehat{PB'A}$ và $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$. Từ đó suy ra $\widehat{BPC'} = \widehat{CPB'}$. Để ý rằng PE, PF theo thứ tự là đường phân giác của các góc $\widehat{BPC'}$ và $\widehat{CPB'}$ nên ta suy ra được $\widehat{EPB} = \widehat{FPC}$. Từ đó suy ra $\widehat{PEA} = \widehat{PFA}$ nên tứ giác APEF nội tiếp đường tròn. Kẻ đường kính AK' của đường tròn (O'), khi đó ta có $\widehat{APK'} = 90^0$. Mà P thuộc đường kính AH nên ta có $\widehat{APK} = 90^0$ nên suy ra hai tia PK và PK' trùng nhau. Mà ta có K và K' cùng thuộc đường thẳng AO' nên suy ra hai điểm K và K' trùng nhau. Điều này dẫn đến tứ giác PEKF nội tiếp đường tròn (O').

+ Lời giải 2. Lập luận chứng minh tương tự như các lời giải trên ta có tứ giác APEF nội tiếp đường tròn (O') và tứ giác $APC'B'$ nội tiếp đường tròn đường kính AH. Do đó ta có $\widehat{BPC'} = \widehat{CPB'}$, do đó ta suy ra được $\widehat{BPC} = \widehat{B'PC'}$. Lại có $\widehat{BCP} = \widehat{BAP} = \widehat{C'AP} = \widehat{C'B'P}$ nên suy ra tam giác PBC đồng dạng với tam giác $PC'B'$. Kết hợp với tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{PC'}{PB} = \dfrac{EC'}{EB} = \dfrac{B'C'}{BC}$. Dễ thấy tam giác $HB'C'$ đồng dạng với tam giác HCB nên ta lại có $\dfrac{C'B'}{BC} = \dfrac{C'H}{BH}$. Đến đây ta được $\dfrac{C'H}{BH} = \dfrac{EC'}{EB}$ nên HE là phân giác của góc $\widehat{BHC'}$. Chứng minh tương tự thì ta được nên HF là phân giác của góc $\widehat{CHB'}$. Đến đây ta suy ra được ba điểm E, H, F thẳng hàng. Ta lại có tam giác AEF cân tại A nên AK là phân giác của góc $\widehat{EAF}$ nên cũng là phân giác của góc $\widehat{HAA'}$. Chú ý rằng tam giác AHC' đồng dạng với tam giác $AA'C$ nên suy ra $\dfrac{KH}{HA'} = \dfrac{HC'}{A'C} = \dfrac{HC'}{HB} = \dfrac{EC'}{EB}$. Ta lại có tứ giác $HC'BA'$ là hình thang nên ta có $PE; HC'; A'B$ song song với nhau. Do vậy suy ra PE vuông góc với AB. Chứng minh hoàn toàn tương tự thì ta có PF vuông góc với AC. Do vậy AK là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Suy ra tứ giác $PEKF$ nội tiếp đường tròn.

+ Lời giải 3. Do tam giác PBC' đồng dạng với tam giác PCB' và E, F là là chân các đường phân giác tương ứng nên ta suy ra được $\widehat{PEC'} = \widehat{PFB'}$, do đó từ giác APEF nội tiếp đường tròn, điều này có nghĩa là điểm P thuộc đường tròn (O'). Do PE là phân giác của tam giác BPC' nên theo tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{EB}{EC'} = \dfrac{PB}{PC'}$. Cũng do tứ giác $APC'H$ nội tiếp đường tròn nên ta có

$$\begin{aligned}\widehat{PC'H} &= 180^0 - \widehat{PAH} = 180^0 - \widehat{PAB} - \widehat{HAB} = 180^0 - \widehat{PA'B} - \widehat{HCB} \\ &= 180^0 - \widehat{PA'B} - \widehat{CBA'} = \widehat{BMA'} = \widehat{CMH}\end{aligned}$$

Lại có $\widehat{PHC'} = \widehat{CHM}$ nên tam giác $PC'H$ đồng dạng với CMH nên $\frac{HC'}{PC'} = \frac{HM}{CM} = \frac{MA'}{MB}$. Mặt khác lại do tứ giác $PBA'C$ nội tiếp đường tròn nên ta suy ra được tam giác PMB đồng dạng với tam giác CMA'. Do vậy $\frac{MA'}{MB} = \frac{CA'}{PB} = \frac{HB}{PB}$. Kết hợp các kết quả ta được $\frac{HB}{PB} = \frac{HC'}{PC'}$ hay $\frac{HB}{HC'} = \frac{PB}{PC'}$. Mà ta đã có $\frac{EB}{EC'} = \frac{PB}{PC'}$ nên suy ra $\frac{EB}{EC'} = \frac{HB}{HC'}$ hay ta được HE là phân giác của góc $\widehat{BHC'}$. Chứng minh hoàn toàn tương tự thì ta được HF là phân giác của góc $\widehat{CHB'}$. Đến đây ta được ba điểm E, H, F thẳng hàng. Ngoài ra cũng từ tam giác PBC' đồng dạng với tam giác PCB' và tam giác $HC'B$ đồng dạng với tam giác HCB' ta được $\frac{PE}{PF} = \frac{BC'}{CB'} = \frac{HE}{HF}$ nên suy ra PH là phân giác của góc $\widehat{EPF}$ nên PH là đi qua điểm chính giữa cung EF không chứa A của đường tròn (O'). Lại do tam giác AEF cân tại A nên AO' là phân giác của góc $\widehat{EAF}$ nên suy ra AO' đi qua điểm chính giữa cung EF không chứa A của đường tròn (O'). Do vậy suy ra giao điểm K của AO' với PH nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Vậy tứ giác PEKF nội tiếp đường tròn (O').

b) Chứng minh các tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O') cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

- ***Phân tích.*** *Giả sử tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T và khi T nằm trên đường tròn (O) thì ta thấy ba điểm A, K, T thẳng hàng. Như vậy nếu gọi T là giao điểm của AK với đường tròn (O) thì bài toán sẽ kết thúc nếu ta chỉ ra được TE, TF là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Để chứng minh được TE là tiếp tuyến của đường tròn (O) ta cần chỉ ta được TE vuông góc với $O'E$. Từ các phân tích trên ta có các lời giải cho bài toán.*
- **Lời giải.**

+ Lời giải 1. Như đã chứng minh trên ta có ba điểm H, E, F thẳng hàng và AK là phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Gọi giao điểm thứ hai của AK với đường tròn (O) là T và giao điểm của AK với BB' là G. Khi đó ta có $\widehat{FHB'} = \frac{\widehat{CHB'}}{2} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{GAE}$ nên tứ giác AEHG nội tiếp đường tròn. Từ đó ta suy ra được $\widehat{AEG} = \widehat{AHG} = \widehat{AHB'} = \widehat{ACB} = \widehat{ATB}$ nên tứ giác BEGT nội tiếp đường tròn. Điều này dẫn ta đến $\widehat{ATE} = \widehat{ABG} = 90^0 - \widehat{BAC}$. Mà ta lại có AT vuông góc với EF nên $\widehat{TEF} = 90^0 - \widehat{ATE} = \widehat{BAC}$. Do vậy TE là tiếp tuyến của (O'). Mặt khác ta lại có $TE = TF$ nên TF cũng là tiếp tuyến của (O'). Tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O') cắt nhau tại T trên đường tròn (O).

+ Lời giải 2. Gọi T là điểm chính giữa cung BC không chứa A của đường tròn (O) và gọi Q là điểm đối xứng với T qua BC. Khi đó ta có $\widehat{BQC} = \widehat{BTC} = 180^0 - \widehat{BAC} = \widehat{BHC}$ nên tứ giác BHQC nội tiếp đường tròn. Do đó ta có

$\widehat{HBQ} = \widehat{HCQ}$ và $\widehat{QHC} = \widehat{QBC} = \widehat{TBC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{B'HC}$. Từ đó suy ra HQ là phân giác của góc $\widehat{B'HC}$. Từ đó suy ra các điểm E, F, H, Q thẳng hàng. Ta có DQ là phân giác của góc $\widehat{BTC}$ nên ta có $\widehat{QTB} = \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BAC}\right) = \widehat{AEF}$ hay tứ giác BTQE nội tiếp đường tròn. Do đó ta được $\widehat{BET} = \widehat{BQT} = \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BAC}\right) = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90^0 - \widehat{AEO'}$, điều này dẫn đến ET vuông góc với EO' hay ET là tiếp tuyến tại E của đường tròn (O'). Chứng minh hoàn toàn tương tự thì ta có FT là tiếp tuyến tại F của đường tròn (O'). Vậy các tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (O') cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

+ **Lời giải 3.** Dễ dàng chứng minh được MB' và MC' là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH. Như vậy hai tiếp tuyến tại B' và C' của đường tròn đường kính AH cắt nhau tại M. Ta lại có hai tiếp tuyến tại E và F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Để ý rằng ta chứng minh được tam giác $PB'C'$ và tam giác PEF. Từ đó ta suy ra được tam giác $PB'M$ đồng dạng với tam giác PFT nên suy ra tam giác PMT đồng dạng với tam giác $PB'F$. Do vậy ta có biến đổi góc

$$\widehat{PMT} = \widehat{PB'F} = 180^0 - \widehat{PB'A} = 180^0 - \widehat{PHA} = \widehat{AHM}$$

Đến đây ta suy ra MT song song với AH nên ta được MT thuộc đường trung trực của BC. Dễ thấy T nằm trên AK do tam giác AEF cân. Nên T nằm trên đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Do vậy T là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng BC với đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên T nằm trên đường tròn (O). Từ đó ta có điều cần chứng minh.

Bài 3. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây BC không đi qua O. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A(khác B). Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O)(M, N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC và K là giao điểm của AC với MN.

a) Chứng minh rằng IA là tia phân giác của góc $\widehat{MIN}$.

b) Chứng minh rằng $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

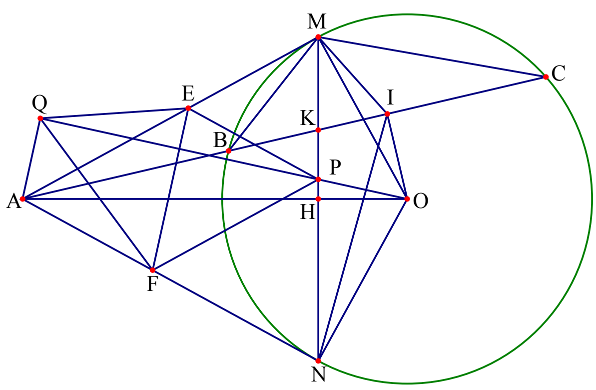
c) Lấy các điểm E, P, F lần lượt trên AM, MN, NA sao cho tứ giác AEPF là hình bình hành. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua đường thẳng EF. Chứng minh rằng ba điểm O, P, Q thẳng hàng.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Tỉnh Hà Nam, năm học 2016 – 2017

Phân tích và Lời giải

a) Chứng minh IA là tia phân giác của góc $\widehat{MIN}$.

Do AM và AN là tiếp tuyến với đường tròn (O) và I trung điểm của dây BC nên ta có $\widehat{AIO} = \widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^0$. Từ đó suy ra năm điểm A, M, I, O, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AO. Do vậy $\widehat{AIM} = \widehat{AOM}$ và $\widehat{NIA} = \widehat{NOA}$. Mà ta có $\widehat{MOA} = \widehat{NOA}$ nên $\widehat{MIA} = \widehat{NIA}$. Suy ra IA là tia phân giác của góc $\widehat{MIN}$.



b) Chứng minh $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

• ***Phân tích.*** *Hệ thức cần chứng minh được viết lại thành* $2AB.AC = AK\left(AB + AC\right)$. *Do I là trung điểm của BC nên ta có* $AB + AC = \left(AI - BI\right) + \left(AI + IC\right) = 2AI$. *Do đó ta quy điều cần chứng minh về chứng minh hệ thức* $AB.AC = AK.AI$. *Dễ thấy* $AB.AC = AM^2$*, như vậy phép chứng minh hoàn tất nếu ta chỉ ra được* $AK.AI = AM^2$. *Điều này hiển nhiên khi ta có tam giác AKM và AMI đồng dạng với nhau.*

• **Lời giải.** Gọi H là giao điểm của AO với MN. Xét hai tam giác AHK và AIO có $\widehat{AHK} = \widehat{AIO} = 90^0$ và $\widehat{HAK}$ chung nên tam giác AHK và tam giác AIO đồng dạng. Từ đó ta được $\frac{AK}{AO} = \frac{AH}{AI}$ hay ta được $AK.AI = AH.AO$. Dễ dàng chứng minh được $AB.AC = AM^2$ và $AH.AO = AM^2$. Do đó ta suy ra $AB.AC = AH.AO$. Như vậy ta được $AI.AK = AB.AC$. Để ý rằng ta có $AI = \frac{AB + AC}{2}$. Điều này dẫn đến $\frac{AB + AC}{2}.AK = AB.AC$ hay $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

c) Lấy các điểm E, P, F lần lượt trên AM, MN, NA sao cho tứ giác AEPF là hình bình hành. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua đường thẳng EF. Chứng minh ba điểm O, P, Q thẳng hàng.

• ***Phân tích.*** *Do P và Q đối xứng với nhau qua EF và AEPF là hình bình hành ta suy ra* $\widehat{EAF} = \widehat{EQF}$*, do đó tứ giác AQEF nội tiếp đường tròn, điều này dẫn đến* $\widehat{QAE} = \widehat{QFE}; \widehat{QEA} = \widehat{QFA}$ *nên ta suy ra được* $\widehat{QAE} = \widehat{AEF}$ *hay AQ song song với EF, do đó AQEF là hình thang cân nên* $QE = FA = EP$.

Mà ta lại thấy $EP = ME = QE; QF = AE = PF = NE; \widehat{QFN} = \widehat{QEM}$. *Từ đó ta được tam giác QME đồng dạng với tam giác QNF nên* $\widehat{QNF} = \widehat{QMA}$ *hay AQMN nội tiếp đường tròn. Điều này dẫn đến sáu điểm A, M, N, O, I, Q cùng nằm đường tròn đường kính AO. Do đó suy ra* $OQ \perp QA$*, mà ta đã có PQ vuông góc với EF và AQ song song với EF nên ba điểm O, P, Q thẳng hàng.*

• **Lời giải.** Do P và Q đối xứng với nhau qua EF nên $\widehat{EQF} = \widehat{EPF}$ và $\widehat{QFE} = \widehat{PFE}$. Do AEPF là hình bình hành nên ta được $\widehat{EAF} = \widehat{EPF}$ và $\widehat{PFE} = \widehat{AEF}$. Từ đó $\widehat{EAF} = \widehat{EQF}$ nên tứ giác AQEF nội tiếp đường tròn, do đó $\widehat{QAE} = \widehat{QFE}; \widehat{QEA} = \widehat{QFA}$. Suy ra $\widehat{QAE} = \widehat{AEF}$ nên AQ song song với EF, do đó AQEF là hình thang cân nên $QE = FA = EP$.Dễ dàng chứng minh được $EP = ME = QE;\ QF = AE = PF = NE; \widehat{QFN} = \widehat{QEM}$. Từ đó ta được tam giác QME đồng dạng với tam giác QNF nên $\widehat{QNF} = \widehat{QMA}$, suy ra tứ giác AQMN nội tiếp đường tròn. Điều này dẫn đến sáu điểm A, M, N, O, I, Q cùng nằm đường tròn đường kính AO. Do đó suy ra $\widehat{AQO} = 90^0$ nên OQ vuông góc với AQ. Mà ta đã có PQ vuông góc với EF và AQ song song với EF. Do đó ta được ba điểm O, P, Q thẳng hàng.

Bài 4. Cho hai đường tròn $\left(O\right)$ và $\left(O'\right)$ cắt nhau tại A và B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M khác A. Qua M kẻ các tiếp tuyến MC và MD với đường tròn $\left(O'\right)$ (C, D là tiếp điểm và D nằm trong đường tròn tâm O).

a) Chứng minh rằng $AD.BC = AC.DB$.

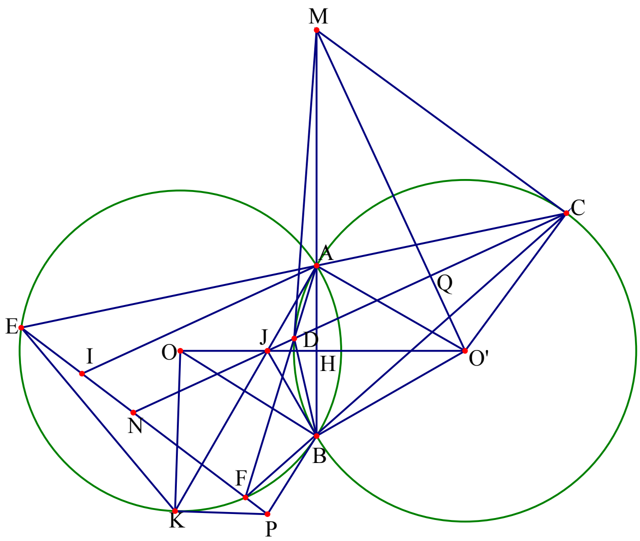
b) Các đường thẳng AC, AD cắt đường tròn $\left(O\right)$ lần lượt tại E và F (E, F khác A). Chứng minh đường thẳng CD đi qua trung điểm của EF.

c) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm có định khi M thay đổi.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Phan Bội Châu Nghệ An, năm học 2017 – 2018

Phân tích và Lời giải

a) Chứng minh $AD.BC = AC.DB$.



• ***Phân tích tìm lời giải.*** *Quan sát hình vẽ ta nhận thấy và giả thiết của bài toán ta nhận thấy để chứng minh được* $AD.BC = AC.DB$ *ta quy về chứng minh* $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$. *Nhận thấy rằng không thể chứng minh được một cách trực tiếp nên ta nghĩ đến chọn các tỉ số trung gian. Ta có AC là tiếp tuyến và AB là cát tuyến nên dễ thấy hai tam giác MAC và MCB đồng dạng với nhau, từ đó ta được* $\frac{AC}{BC} = \frac{MA}{MB}$. *Tương tự thì* $\frac{AD}{BD} = \frac{MA}{MB}$. *Do đó ta được* $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ *hay ta có điều cần chứng minh.*

• **Lời giải.** Vì MC là tiếp tuyến của đường tròn (O') nên ta được $\widehat{MCA} = \widehat{CBM}$. Xét hai tam giác MAC và MCB có $\widehat{MCA} = \widehat{CBM}$ và $\widehat{MCB}$ chung. Suy ra tam giác MAC đồng dạng với tam giác MCB, do đó ta được $\frac{AC}{BC} = \frac{MA}{MB}$. Chứng minh tương tự ta được tam giác MAD đồng dạng với tam giác MDB nên $\frac{AD}{BD} = \frac{MA}{MB}$. Kết hợp hai kết quả trên ta được $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ hay $AD.BC = AC.DB$.

b) Các đường thẳng AC và AD cắt đường tròn (O) lần lượt tại E, F (E, Fkhác A). Chứng minh đường thẳng CD đi qua trung điểm của EF.

• ***Phân tích tìm lời giải.*** *Gọi N là giao điểm của CD với EF và ta cần chứng minh* $NE = NF$. *Nhận thấy rằng không thể chỉ ra trực tiếp các tam giác chứa NE và NF bằng nhau nên ta nghĩ đến việc tạo ra các tỉ số bằng nhau thông qua các tam giác đồng dạng hoặc định lí Talets. Để ý là các tỉ số bằng nhau cần có chứa các đoạn NE và NF. Từ đó ta thấy có các hướng sau.*

+ Hướng 1. Ta thấy $\widehat{NFB} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ *nên tứ giác NFBD nội tiếp. Do đó* $\widehat{FNB} = \widehat{FDB} = \widehat{ACB}$ *nên hai tam giác BNF và CAB đồng dạng nên ta có* $\frac{CA}{CB} = \frac{NF}{NB}$. *Từ ý a) ta đã có* $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$. *Do đó phép chứng minh kết thúc nếu ta chỉ ra được* $\frac{DA}{DB} = \frac{NE}{NB}$. *Để ý ta có* $\widehat{BEN} = \widehat{FAB}$ *và* $\widehat{ENB} = \widehat{BDA}$, *do đó suy ra hai tam giác ENF và BDA đồng dạng. Suy ra ta được* $\frac{DA}{DA} = \frac{NE}{NB}$. *Đến đây kết hợp các kết quả ta được* $NE = NF$.

+ Hướng 2. Dựng đường qua A đường thẳng song song với CD cắt EF tại I. Khi đó theo định lý Talest ta có $\frac{NE}{NI} = \frac{EC}{AC}$ *và* $\frac{NF}{NI} = \frac{DF}{DA}$. *Như vậy phép chứng minh sẽ kết thúc nếu ta chỉ ra được* $\frac{EC}{AC} = \frac{DF}{DA}$. *Tứ giác ACBD nội tiếp nên* $\widehat{FDB} = \widehat{ACB}$, *do đó ta được* $\widehat{FDB} = \widehat{ECB}$. *Xét tam giác ECB và tam giác DFB có* $\widehat{FDB} = \widehat{ECB}$ *và*

$\widehat{CEB} = \widehat{DFB}$ *(cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$). Suy ra tam giác ECB đồng dạng với tam giác DFB, từ đó suy ra* $\frac{DF}{EC} = \frac{DB}{CB}$.

Do đó ta được $\frac{DA}{CA} = \frac{DF}{EC}$ *hay* $\frac{EC}{AC} = \frac{DF}{DA}$. *Điều này dẫn đến* $\frac{NF}{NI} = \frac{NE}{NI}$ *hay N là qua trung điểm của EF.*

+ Hướng 3. Để ý đến định lí Menelaus cho tam giác EAF với ba điểm N, D, C thẳng hàng ta có hệ thức $\frac{NF}{NE}.\frac{CE}{CA}.\frac{DA}{DF} = 1$. *Như vậy để có* $NE = NF$ *ta cần chỉ ra được* $\frac{DA}{DF}.\frac{CE}{CA} = 1$. *Chú ý rằng theo kết quả ý a ta có* $AD.BC = AC.DB$. *Như vậy phép chứng minh kết thúc nếu ta chỉ ra được* $\frac{BC}{BD} = \frac{DF}{CE}$. *Điều này có nghĩa là ta cần chứng minh được tam giác BCE đồng dạng với tam giác BDF. Để ý ta lại thấy* $\widehat{ECB} = \widehat{BDF}$ *và* $\widehat{CEB} = \widehat{BFD}$ *nên tam giác BCE và tam giác BDF đồng dạng với nhau. Như vậy ta có lời giải cho bài toán.*

- **Trình bày lời giải.**

+ Lời giải 1. Gọi N là giao điểm của CD và EF. Từ câu a ta đã có $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$. Do tứ giác ABFE và tứ giác ACBD nội tiếp đường tròn nên $\widehat{NFB} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, suy ra tứ giác BFND nội tiếp đường tròn, do đó $\widehat{FNB} = \widehat{FDB} = \widehat{ACB}$. Lại có $\widehat{NFB} = \widehat{BAC}$ nên hai tam giác NFB và CAB đồng dạng với nhau. Do đó suy ra $\frac{CA}{CB} = \frac{NF}{NB}$. Ta lại có $\widehat{BEN} = \widehat{FAB}$, lại do $\widehat{FNB} = \widehat{FDB}$ nên $\widehat{ENB} = \widehat{BDA}$, do đó suy ra hai tam giác ENF và BDA đồng dạng. Suy ra ta được $\frac{DA}{DA} = \frac{NE}{NB}$. Kết hợp ba kết quả trên ta được $\frac{NE}{NB} = \frac{NF}{NB}$, do đs $NE = NF$ hay N là trung điểm của EF.

+ Lời giải 2. Từ $AD.BC = AC.DB$ suy ra $\frac{DA}{CA} = \frac{DB}{CB}$. Gọi N là giai điểm của CD với EF. Từ A kẻ đường thẳng song song với CD cắt EF tại I. Theo định lý Talest ta có $\frac{NE}{NI} = \frac{EC}{AC}$ và $\frac{NF}{NI} = \frac{DF}{DA}$. Tứ giác ACBD nội tiếp nên $\widehat{FDB} = \widehat{ACB}$, do đó ta được $\widehat{FDB} = \widehat{ECB}$. Xét tam giác ECB và tam giác DFB có $\widehat{FDB} = \widehat{ECB}$ và $\widehat{CEB} = \widehat{DFB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$). Suy ra tam giác ECB đồng dạng với tam giác DFB, từ đó suy ra $\frac{DF}{EC} = \frac{DB}{CB}$. Do đó ta được $\frac{DA}{CA} = \frac{DF}{EC}$ hay $\frac{EC}{AC} = \frac{DF}{DA}$. Điều này dẫn đến $\frac{NF}{NI} = \frac{NE}{NI}$ hay N là qua trung điểm của EF. Vậy CD đi qua trung điểm N của EF.

+ Lời giải 3. Gọi N là giao điểm của CD và EF. Theo kết quả ý a ta có $AD.BC = AC.DB$. Xét hai tam giác BCE và BDF có $\widehat{ECB} = \widehat{BDF}$ và $\widehat{CEB} = \widehat{BFD}$ nên $\Delta BCE \backsim \Delta BDF$. Từ đó $\frac{BC}{BD} = \frac{DF}{CE}$. Do đó ta được $\frac{DA}{DF}.\frac{CE}{CA} = 1$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác EAF với ba điểm N, D, C thẳng hàng ta có $\frac{NF}{NE}.\frac{CE}{CA}.\frac{DA}{DF} = 1$. Kết hợp với $\frac{DA}{DF}.\frac{CE}{CA} = 1$ ta được $\frac{NF}{NE} = 1$ nên suy ra $NE = NF$ hay N là trung điểm của EF.

c) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm có định khi M thay đổi.

- ***Phân tích tìm lời giải.*** *Bài toán yêu cầu chứng minh EF đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên AB do đó ta dự đoán được điểm cố định. Từ đề bài ta nhận thấy các điểm A, B, O, O' cố định nên ta dự đoán rằng điểm cố định cần tìm sẽ có liên hệ với các điểm trên. Do điểm O và B cố định nên tiếp tuyến với đường tròn* (O) *tại B cố định. Gọi P là giao điểm của EF với tiếp tuyến tại B đó là P khi đó ta dự đoán rằng P là điểm cố định. Muốn khẳng định được điều ta dự đoán thì ta cần chứng minh được BP không đổi. Đến đây ta thấy có các hướng sau*

+ Hướng 1. Gọi K và H là lần lượt là trung điểm của AC và BD. Gọi J là giao điểm của OO' và CD. Khi đó dễ thấy JA và BJ là các tiếp tuyến của đường tròn $\left(O'\right)$. *Do đó J là điểm cố định. Biến đổi góc ta có* $\widehat{EPB} = \widehat{EFB} - \widehat{FBP} = \widehat{BAC} - \widehat{BEP} = \widehat{BDC} - \widehat{FAB} = \widehat{BDC} - \widehat{JBD} = \widehat{BJC}$. *Điều này dẫn đến hai tam giác EPB và CJB đồng dạng với nhau. Do đó ta được* $\frac{BE}{BC} = \frac{BP}{BJ}$ *hay* $BP = \frac{BE}{BC}.BJ$ *và BJ không đổi. Dễ thấy hai tam giác EPB và CJB đồng dạng với nhau nên hai tam giác DBC và FBE đồng dạng với nhau. Mà hai tam giác DBC và EBF nội tiếp trong hai đường tròn* $\left(O'\right)$ *và* $\left(O\right)$. *Do đó* $\frac{BE}{BC} = \frac{OA}{O'A}$ *không đổi. Từ đó ta được* $BP = \frac{BE}{BC}.BJ$ *không đổi. Suy ra P là điểm cố định hay EF luôn đi qua điểm P cố định.*

+ Hướng 2. Do tứ giác BFND nội tiếp ta có $\widehat{PBF} = \widehat{PEB} = \widehat{BAF} = \widehat{JBD}$ *và* $\widehat{BFP} = \widehat{BDJ}$. *Suy ra hai tam giác BDJ và BFP đồng dạng, do đó* $\widehat{BJD} = \widehat{BPF}$ *nên tứ giác BJNP nội tiếp đường tròn. Suy ra ta được* $\widehat{BJP} = \widehat{BNP} = \widehat{BDF} = \widehat{BCA} = \widehat{BO'O}$. *Mặt khác ta lại có* $\widehat{O'BO} = \widehat{PBJ}$ *nên hai tam giác JBP và O'BO đồng dạng với nhau. Do đó* $\frac{BP}{BO} = \frac{BJ}{BO'}$ *nên* $BP = \frac{BJ.BO}{BO'}$ *không đổi. Suy ra điểm P cố định.Vậy EF luôn đi qua điểm P cố định.*

- **Trình bày lời giải.**

+ Lời giải 1. Gọi K và H là lần lượt là trung điểm của AC và BD. Gọi J là giao điểm của OO' và CD. Khi đó dễ thấy $\Delta O'KJ \backsim \Delta O'HM$ nên ta được $\frac{O'K}{O'H} = \frac{O'J}{O'M}$ hay $O'K.O'M = O'H.O'J$. Mà ta lại có $O'K.O'M = O'D^2 = O'A^2$ do đó ta có $OA^2 = O'H.O'J$ nên ta suy ra được $AJ \perp O'A$ hay NA là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O'\right)$ tại A và do đó BJ cũng là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O'\right)$ tại B.

Từ B kẻ tiếp tuyến với đường tròn $\left(O\right)$ cắt EF tại P. Khi đó ta có

$$\widehat{EPB} = \widehat{EFB} - \widehat{FBP} = \widehat{BAC} - \widehat{BEP} = \widehat{BDC} - \widehat{FAB} = \widehat{BDC} - \widehat{JBD} = \widehat{BJC}.$$

Dẫn đến hai tam giác EPB và CJB đồng dạng với nhau. Do đó ta được $\frac{BE}{BC} = \frac{BP}{BJ}$ hay $BP = \frac{BE}{BC}.BJ$. Do hai đường tròn $\left(O\right)$ và $\left(O'\right)$ cố định nên A và B cố định, do đó điểm J cố định, suy ra BJ không đổi. Do hai tam giác EPB và CJB đồng dạng với nhau nên suy ra hai tam giác DBC và FBE đồng dạng với nhau. Mà hai tam giác DBC và EBF nội tiếp trong hai đường tròn $\left(O'\right)$ và $\left(O\right)$. Do đó $\frac{BE}{BC} = \frac{OA}{O'A}$ không đổi. Từ đó ta được $BP = \frac{BE}{BC}.BJ$ không đổi. Suy ra P là điểm cố định hay EF luôn đi qua điểm P cố định.

+ Lời giải 2. Gọi J và H lần lượt là giao điểm của OO' với CD và AB. Gọi K là giao điểm của MO' với CD. Khi đó dễ thấy hai tam giác O'HM và O'KJ đồng dạng với nhau. Suy ra $\frac{O'H}{O'Q} = \frac{O'M}{O'J}$ nên ta có được $O'H.O'J = O'K.O'M = O'C^2 = O'B^2$. Từ đó ta lại được $\frac{O'H}{O'B} = \frac{O'B}{O'J}$, suy ra hai tam giác HO'B và O'BJ đồng dạng với nhau. Do đó ta được $\widehat{O'BJ} = \widehat{O'HB} = 90^0$, suy ra $BJ \perp O'B$ hay BJ là tiếp tuyến tại B của đường tròn $\left(O'\right)$. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được AJ là tiếp tuyến tại A của đường tròn $\left(O'\right)$. Do A và B cố định nên J cố định. Từ B kẻ tiếp tuyến với đường tròn $\left(O\right)$, tiếp tuyến này cắt EF tại P, suy ra đường thẳng BP cố định. Khi đó do tứ giác BFND nội tiếp đường tròn nên ta có $\widehat{PBF} = \widehat{PEB} = \widehat{BAF} = \widehat{JBD}$ và $\widehat{BFP} = \widehat{BDJ}$. Suy ra hai tam giác BDJ và BFP đồng dạng với nhau, do đó ta được $\widehat{BJD} = \widehat{BPF}$ nên tứ giác BJNP nội tiếp đường tròn. Đến đây ta có biến đổi góc $\widehat{BJP} = \widehat{BNP} = \widehat{BDF} = \widehat{BCA} = \widehat{BO'O}$. Mặt khác lại có $\widehat{O'BO} = \widehat{PBJ}$ nên hai tam giác JBP và O'BO đồng dạng. Do đó $\dfrac{BP}{BO} = \dfrac{BJ}{BO'}$ hay ta được $BP = \dfrac{BJ.BO}{BO'}$ không đổi. Suy ra điểm P cố định. Vậy EF luôn đi qua điểm P cố định.

Bài 5. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tam đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tia AI cắt đường tròn (O) tại J khác A. Đường thẳng OJ cắt đường tròn (O) tại K khác J và cắt C tại E.

a) Chứng minh rằng J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC và $JE.JK = JI^2$.

b) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S. Chứng minh rằng $SJ.EK = SK.EJ$.

c) Đường thẳng SA cắt đường tròn (O) tại D khác A, đường thẳng DI cắt đường tròn (O) tại M khác D. Chứng minh rằng MJ đi qua trung điểm của đoạn thẳng EI.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu, năm học 2017 – 2018

Phân tích và lời giải

a) Chứng minh rằng J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC và $JE.JK = JI^2$.

- ***Phân tích.***

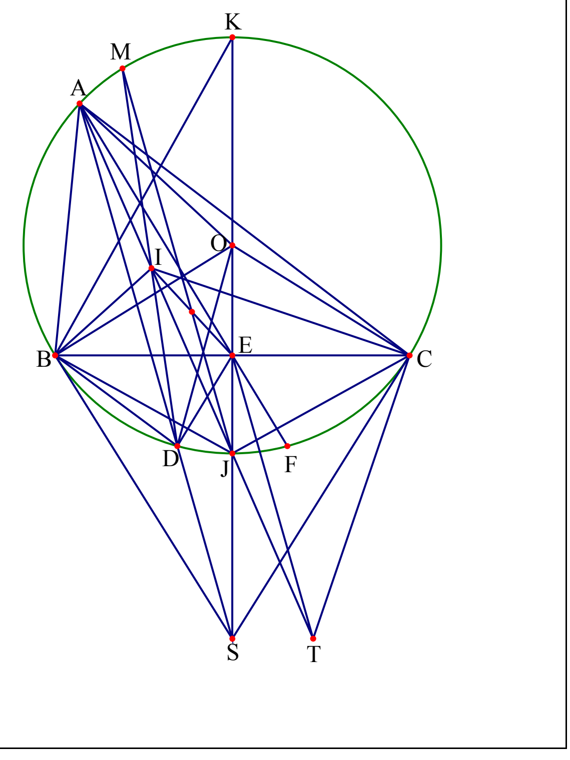
+ Để chứng minh J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC ta cần chỉ ra được $JB = JI = JC$, điều này đồng nghĩa với chứng minh tam giác BIJ cân tại J. Đây là một kết quả hoàn toàn quen thuộc có được từ biến đổi góc.

+ Tam giác BKJ vuông tại B nên ta có $BJ^2 = JE.JK$.

Mà $BJ = IJ$ nên $JE.JK = JI^2$.

- **Lời giải.** Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác của góc $\widehat{BAC}$, do đó J là điểm chính giữa cung BC không chứa A của đường tròn (O). Từ đó ta suy ra được $JB = JC$. Ta có BI là phân giác của góc $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{ABI} = \widehat{IBC} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}$.

Ta có $\widehat{IBJ} = \widehat{IBC} + \widehat{CBJ} = \widehat{ABI} + \widehat{BAJ} = \widehat{BIJ}$ nên tam giác BIJ cân tại J, do đó $BJ = IJ$. Như vậy ta được $JB = JC = JI$ nên J là tâm đường trong ngoại tiếp tam giác BIC.



+ Ta có JK là đường kính của đường tròn (O). Khi đó tam giác BKJ vuông tại B nên $BJ^2 = JE.JK$. Mà ta lại có $BJ = IJ$ nên $JE.JK = JI^2$

b) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S. Chứng minh rằng $SJ.EK = SK.EJ$.

- ***Phân tích.*** *Để chứng minh $SJ.EK = SK.EJ$ ta cần chỉ ra được $\dfrac{SJ}{JE} = \dfrac{KS}{KE}$. Mà theo tính chất đường phân giác của tam giác thì ta có $\dfrac{SJ}{JE} = \dfrac{BS}{BE}$ và $\dfrac{KS}{KE} = \dfrac{BS}{BE}$ nên ta có điều phải chứng minh.*

• **Lời giải.** Dễ thấy ba điểm S, J, K thẳng hàng. Do J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác SBC nên BJ là đường phân giác trong của tam giác SBE, theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\frac{SJ}{JE} = \frac{BS}{BE}$.

Do BK vuông góc với BJ nên BK là đường phân giác ngoài tại đỉnh B của tam giác SBE, do đó theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{KS}{KE} = \frac{BS}{BE}$. Từ đó ta được $\frac{SJ}{JE} = \frac{KS}{KE}$ nên suy ra $SJ.EK = SK.EJ$.

c) Đường thẳng SA cắt đường tròn (O) tại D khác A, đường thẳng DI cắt đường tròn (O) tại M khác D. Chứng minh rằng MJ đi qua trung điểm của đoạn thẳng EI.

• ***Phân tích.*** *Một ý tưởng để chứng minh MJ đi qua trung điểm của IE là ta dựng một điểm T để tam giác IET có J là trung điểm của IT và ta chứng minh rằng đường thẳng MJ chứa đường trung bình của tam giác. Ta có một kết quả cũng khá là quen thuộc là nếu gọi T là tâm đường tròn bàng tiếp góc* $\widehat{BAC}$ *thì J là trung điểm của IT. Như vậy để chứng minh được MJ đi qua trung điểm của IE thì ta cần chứng minh được MJ song song với ET. Muốn vậy ta cần có* $\widehat{ATE} = \widehat{AJM}$. *Chú ý rằng* $\widehat{ADI} = \widehat{AJM}$ *nên ta cần chỉ ra hai tam giác AID và AET đồng dạng với nhau.*

• **Lời giải.** Trước hết ta chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$. Thật vậy, gọi F là giao điểm của AE với đường tròn (O). Ta có $SB^2 = SD.SA = SE.SO$ nên tứ giác AOED nội tiếp đường tròn. Do đó ta được $\widehat{DOJ} = \widehat{DAF}$ nên J là điểm chính giữa cung DF của đường tròn (O). Điều này dẫn đến $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CF}$ nên $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$. Xét hai tam giác ABD và AEC có $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ và $\widehat{ADB} = \widehat{ACE}$ nên tam giác ABD đồng dạng với tam giác AEC, từ đó ta suy ra được $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$ nên ta được $AB.AC = AE.AD$. Gọi T là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC. Khi đó BT là đường phân giác ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC, do đó $\widehat{IBT} = 90^0$ nên tam giác IBT vuông tại B. Mà ta đã có $JB = JI$ nên suy ra J là trung điểm của IT. Mặt khác ta có $\widehat{BAI} = \widehat{CAI}$ và $\widehat{ACT} = 90^0 + \widehat{ACI} = \widehat{AIB}$ nên ta được tam giác ATC và tam giác BAJ đồng dạng với nhau. Từ đó ta có $AI.AT = AB.AC$. Kết hợp các kết quả trên ta thu được $AI.AT = AE.AD$, điều này dẫn đến tam giác AID đồng dạng với tam giác AET. Do đó suy ra $\widehat{ATE} = \widehat{ADI} = \widehat{AJM}$ nên ta được JM song song với ET. Mà J là trung điểm của IT nên MJ đi qua trung điểm của IE.

Bài 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại M. Kẻ đường cao BF của tam giác ABC(F thuộc AC). Từ F kẻ đường thẳng song song với MA cắt AB tại E. Gọi H là giao điểm củ CE và BF, D là giao điểm của AH và BC.

a) Chứng minh rằng $MA^2 = MB.MC$ và $\frac{MC}{MB} = \frac{AC^2}{AB^2}$.

b) Chứng minh rằng AH vuông góc với BC tại D.

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh bốn điểm E, F, D, I cùng nằm trên một đường tròn.

d) Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với HI cắt AB và AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng H là trung điểm của PQ.

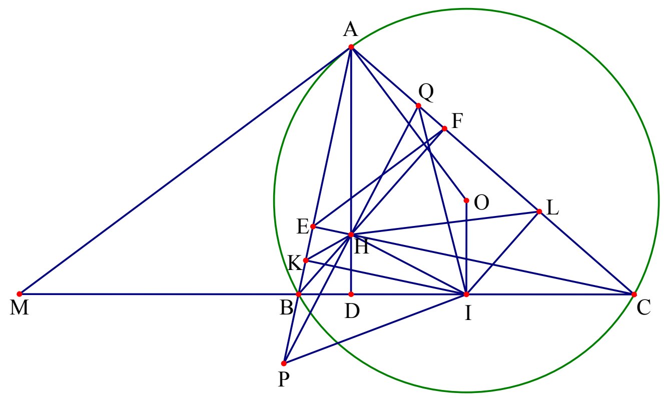
Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Tỉnh Bắc Ninh, năm học 2017 – 2018

Phân tích và Lời giải

a) Chứng minh rằng $MA^2 = MB.MC$ và $\frac{MC}{MB} = \frac{AC^2}{AB^2}$.

• ***Phân tích.*** *Do MA là tiếp tuyến và MBC là cát tuyến của đường tròn* (O) *nên ta có được* $MA^2 = MB.MC$. *Ngoài ra cũng có tam giác MAB và tam giác MCA ta được* $\frac{MC}{MB} = \frac{AC^2}{AB^2}$

• **Lời giải.** Hai tam giác MAB và MCA có $\widehat{AMB}$ chung và $\widehat{ACB} = \widehat{MAB}$ nên suy ra tam giác MAB đồng dạng với tam giác MCA. Do đó ta được $\frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA}$ hay $MA^2 = MB.MC$. Cũng từ hai tam giác MAB và MCA đồng dạng nên ta có $\frac{MC}{MA} = \frac{AC}{AB}$ hay $\frac{MC^2}{MA^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$.



Kết hợp với $MA^2 = MB.MC$ ta được $\frac{MC^2}{MA^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$ nên suy ra $\frac{MC^2}{MB.MC} = \frac{AC^2}{AB^2}$ hay ta được $\frac{MC}{MB} = \frac{AC^2}{AB^2}$.

b) Chứng minh AH vuông góc với BC tại D.

• ***Phân tích.*** *Nhận thấy H là trực tâm của tam giác ABC nên AH vuông góc với BC.*

• **Lời giải.** Do $\widehat{MAE} = \widehat{AEF}$ và $\widehat{ACB} = \widehat{MAE}$ nên ta được $\widehat{ACB} = \widehat{AEF}$, từ đó tứ giác BEFC nội tiếp đường tròn. Mà ta có $\widehat{BFC} = 90^0$ nên ta suy ra được $\widehat{BEC} = 90^0$ nên CE vuông góc với AB. Do đó H là trực tâm của tam giác ABC, suy ra tam giác AH vuông góc với BC tại D.

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh bốn điểm E, F, D, I cùng nằm trên một đường tròn.

• ***Phân tích.*** *Nhận thấy* $\widehat{FIC} = \widehat{DEF}$ *nên bốn điểm E, F, I, D cùng nằm trên một đường tròn.*

• **Phân tích.** Do tam giác BFC vuông tại F và I là trung điểm của BC nên $FI = \frac{1}{2}BC$. Từ đó tam giác BFI cân tại I. Do đó ta được $\widehat{FIC} = 2\widehat{IBF}$. Mặt khác tứ giác BEHD nội tiếp đường tròn nên $\widehat{HAF} = \widehat{HEF}$. Mà ta lại có $\widehat{HAF} = \widehat{HBD}$ vì cùng phụ với $\widehat{ACB}$. Kết hợp các kết quả trên ta được $\widehat{HBD} = \frac{1}{2}\widehat{DEF}$ nên suy ra được $\widehat{FIC} = \widehat{DEF}$. Vậy bốn điểm E, F, I, D cùng nằm trên một đường tròn.

d) Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với HI cắt AB và AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh H là trung điểm của PQ.

• ***Phân tích.*** *Nhận thấy ngay IH vuông góc với PQ. Như vậy để H là trung điểm của PQ là cần chứng minh được tam giác IPQ cân tại I.*

• **Lời giải.** Gọi K và L lần lượt là trung điểm của BE và FC, khi đó IK là đường trung bình của tam giác BEC. Từ đó ta suy ra được IK và EC song song với nhau nên ta được IK vuông góc với BE. Do vậy tứ giác PKHI nội tiếp đường tròn nên $\widehat{HPI} = \widehat{HKI}$. Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\widehat{HQI} = \widehat{HLI}$.

Ta có $\widehat{HKI} + \widehat{HKE} = 90^0$ và $\widehat{HLI} + \widehat{HLF} = 90^0$. Ta lại có tam giác HBE và tam giác HEF đồng dạng với nhau nên suy ra $\frac{HE}{HF} = \frac{BE}{CF}$ hay $\frac{HE}{HF} = \frac{KE}{LF}$. Xét hai tam giác HKE và HLF có $\frac{HE}{HF} = \frac{KE}{LF}$ và $\widehat{HEK} = \widehat{HFL} = 90^0$ nên tam giác HKE và tam giác HFL đồng dạng, do đó ta được $\widehat{HKE} = \widehat{HLF}$. Kết hợp với $\widehat{HLI} + \widehat{HLF} = 90^0$ ta được $\widehat{HKI} = \widehat{HLI}$ nên $\widehat{HPI} = \widehat{HQI}$, do đó tam giác IPQ cân tại I. Mà IH vuông góc với PQ tại H nên H là trung điểm của PQ.

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O có $AB < AC$. Các đường cao BD, CE cắt nhau tại H (D thuộc AC, E thuộc AB). Gọi M là trung điểm của BC, tia MH cắt đường tròn (O) tại N.

a) Chứng minh rằng năm điểm A, D, H, E, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Lấy điểm P trên đoạn BC sao cho $\widehat{BHP} = \widehat{CHM}$, gọi Q là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng HP. Chứng minh rằng tứ giác DENQ là hình thang cân.

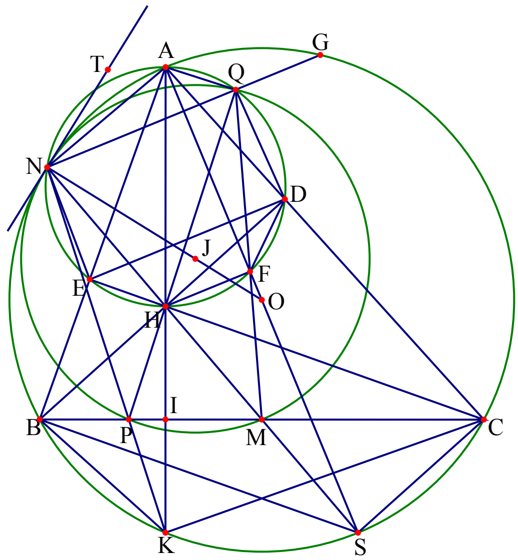
c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O).

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Trần Phú Hải Phòng, năm học 2016 – 2017

Phân tích và Lời giải

a) Chứng minh rằng năm điểm A, D, H, E, N cùng thuộc một đường tròn.

- ***Phân tích.*** *Trước hết ta nhận thấy tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn đường kính AH. Như vậy để chứng minh N thuộc đường tròn đường kính AH ta cần chỉ ra AN vuông góc với AH. Gọi S là giao điểm khác A của AO với đường tròn (O). Khi đó dễ thấy tứ giác BHCS là hình bình hành nên bốn điểm N, H, M, S thẳng hàng. Đến đây ta có lời giải cho bài toán.*
- **Lời giải.** Gọi giao điểm khác A của AO với đường tròn (O) là S. Ta dễ dàng chứng minh được tứ giác BHCS là hình bình hành nên HS đi qua trung điểm BC. Từ đó suy ra bốn điểm N, H, M, S thẳng hàng.



Do đó ta được $\widehat{ANH} = \widehat{ANS} = 90^0$ (Do N nằm trên đường tròn (O) đường kính AS). Đến đây ta suy ra được $\widehat{ANH} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^0$ hay A, D, H, E, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Lấy điểm P trên đoạn BC sao cho $\widehat{BHP} = \widehat{CHM}$, gọi Q là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng HP. Chứng minh tứ giác DENQ là hình thang cân.

- ***Phân tích.*** *Nhận thấy tứ giác QNED nội tiếp đường tròn. Như vậy để chứng minh được tứ giác QNED là hình thang cân thì ta cần chỉ ra được NQ song song với DE. Để ý đến giả thiết $\widehat{BHP} = \widehat{CHM}$ ta suy ra được $\widehat{NED} = \widehat{QDE}$ nên suy ra NQ song song với DE. Đến đây ta có lời giải cho bài toán.*
- **Lời giải.** Do Q là hình chiếu của A trên HP nên dễ thấy được QNED là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AH. Ta lại có $\widehat{NED} = \widehat{NHD} = \widehat{BHM} = \widehat{PHC} = \widehat{QHE} = \widehat{QDE}$ nên suy ra hai cung NE và QD có số đo bằng nhau. Do vậy ta được DE song song với NQ nên tứ giác QNED là hình thang. Đến đây ta suy ra được tứ giác QNED là hình thang cân.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O).

- ***Phân tích.*** *Trước hết ta nhận thấy tứ giác MPNQ nội tiếp đường tròn. Như vậy N là giao điểm của đường tròn (O) và đường tròn nội tiếp tam giác MPQ. Do đó để chứng minh đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ ta đo chứng minh hai đường tròn này có chung tiếp tuyến tại N hoặc nếu gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ thì ta đi chứng minh ba điểm O, J, N thẳng hàng.*

\+ *Hướng 1. Gọi giao điểm của AH với đường tròn (O) là K, giao điểm của AH và BC là I. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ. Khi đó ta có $\widehat{ASN} + \widehat{ABC} = \widehat{BHM}$. Đến đây ta có biến đổi góc ta được $\widehat{ASN} = \widehat{PHK} = \widehat{AKP}$. Mà ta lại có $\widehat{ASN} = \widehat{AKN}$ nên $\widehat{AKN} = \widehat{AKP}$ suy ra ba điểm N, P, K thẳng hàng. Mặt khác $\widehat{PNJ} = 90^0 - \widehat{NMP} = 90^0 - \widehat{NSK} = \widehat{ONK} = \widehat{ONP}$ nên N, J, O thẳng hàng.*

+ Hướng 2. Trước hết ta có tứ giác MPNQ nội tiếp đường tròn và AO vuông với ED. Gọi F là giao điểm của AS với đường tròn đường kính AH và G là giao điểm của NQ với đường tròn (O). *Đến đây ta nhận thấy ba điểm M, F, Q thẳng hàng nên HF song song với NG. Kẻ tiếp tuyến NT với đường tròn* (O). *Khi đó ta có* $\widehat{TNG}=\widehat{GSN}=\widehat{ANG}+\widehat{ASN}=\widehat{AFQ}+\widehat{ASN}=\widehat{MFS}+\widehat{ASN}=\widehat{NMQ}=\widehat{TNQ}$. *Điều này dẫn đến NT là tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ. Do vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn* (O) *tại N.*

- **Lời giải.**

+ Lời giải 1. Gọi giao điểm của AH với đường tròn (O) là K, giao điểm của AH và BC là I. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ. Dễ dàng chứng minh được H đối xứng với K qua BC. Dễ thấy rằng tứ giác ANIM nội tiếp đường trò. Từ đó ta chứng minh được $NH.HM=AH.IH=QH.HP$ nên tứ giác MPNQ nội tiếp đường tròn. Từ đó ta được $\widehat{BHM}=\widehat{CSM}=\widehat{NBM}$ nên $\widehat{ASN}+\widehat{ABC}=\widehat{BHM}$. Đến đây ta có biến đổi góc

$$\begin{aligned}\widehat{ASN}&=\widehat{BHM}+90^0-\widehat{ABC}-90^0=\widehat{BHM}+\widehat{HCB}-90^0\\&=\widehat{PHC}+\widehat{HCP}-90^0=\widehat{BPH}-90^0=\widehat{PHK}=\widehat{AKP}\end{aligned}$$

Mà ta lại có $\widehat{ASN}=\widehat{AKN}$ nên ta được $\widehat{AKN}=\widehat{AKP}$ do đó suy ra ba điểm N, P, K thẳng hàng. Mặt khác ta lại có $\widehat{PNJ}=90^0-\widehat{NMP}=90^0-\widehat{NSK}$ và $90^0-\widehat{NSK}=\widehat{ONK}=\widehat{ONP}$. Điều này dẫn ta đến $\widehat{PNJ}=\widehat{PNO}$ nên ta được N, F, O thẳng hàng. Ta có đường tròn (J) đi qua N. Ta có điểm N nằm trên đường tròn (O) và ba điểm O, F, N thẳng hàng nên đường tròn (F) tiếp xúc với đường tròn (O) tại N. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với (O).

+ Lời giải 2. Ta có $\widehat{QPM}=\widehat{HPM}=90^0-\widehat{PHI}=90^0-\widehat{AHQ}=90^0-\widehat{ANQ}=\widehat{QNH}=\widehat{QNM}$ nên tứ giác MPNQ nội tiếp đường tròn. Ta lại có $\widehat{EAO}=\widehat{BAO}=90^0-\widehat{ACB}=90^0-\widehat{AED}$ nên AO vuông với ED. Gọi F là giao điểm của AS với đường tròn đường kính AH và F là giao điểm của NQ với đường tròn (O). Ta có NQ song song với ED nên AO vuông góc với NQ, điều này dẫn đến AO là đường tring trực của NG. Do vậy ta được $\widehat{MSF}=\widehat{ASN}=\widehat{AGN}=\widehat{ANQ}=\widehat{AFQ}$ nên ba điểm M, F, Q thẳng hàng. Ta có HF vuông góc với AO nên suy ra HF song song với NG. Kẻ tiếp tuyến NT với đường tròn (O). Khi đó ta lại có biến đổi góc

$$\widehat{TNG}=\widehat{GSN}=\widehat{ANG}+\widehat{ASN}=\widehat{AFQ}+\widehat{ASN}=\widehat{MFS}+\widehat{ASN}=\widehat{NMQ}=\widehat{TNQ}$$

Điều này dẫn đến NT là tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ. Do vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn (O) tại N.

Bài 8. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AK, BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại H.

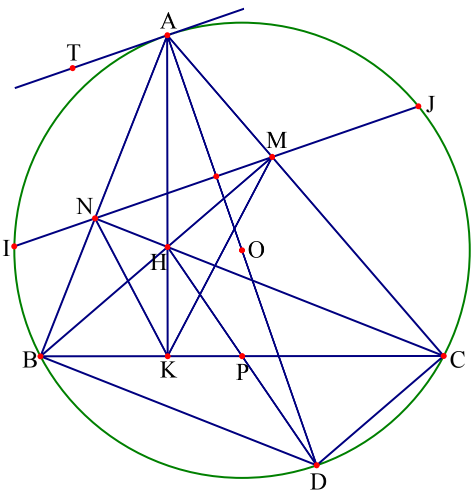
a) Chứng minh rằng $\widehat{NKH}=\widehat{MKH}$.

b) Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm I và J. Chứng minh rằng AO đi qua trung điểm của IJ.

c) Gọi P là trung điểm BC và diện tích tứ giác AMHN là S. Chứng minh rằng $2OP^2>S$.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 Trường chuyên Tỉnh Nam Định, năm học 2016 – 2017

Phân tích và Lời giải



a) Chứng minh $\widehat{NKH} = \widehat{MKH}$.

• ***Phân tích.*** *Dễ thấy ngay để chứng minh $\widehat{NKH} = \widehat{MKH}$ ta đi chi ra các tứ giác BKHN, CKHM và MCMN nội tiếp đường tròn. Điều này ta thấy ngay do ta đã có AK, BM, CN là các đường cao. Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh $\widehat{NKH} = \widehat{MKH}$ bằng cách chỉ ra $\widehat{BKN} = \widehat{CKM}$ thông qua các tam giác đồng dạng.*

• **Lời giải.** Do tam giác ABC có AK, BM, CN là ba đường cao cắt nhau tại H nên ta dễ dàng chứng minh được các tứ giác BKNH, CKHM nội tiếp đường tròn. Từ đó ta có $\widehat{NKH} = \widehat{NBH}$ và $\widehat{HKM} = \widehat{HCM}$. Mà ta lại có tứ giác BCMN nội tiếp đường tròn nên suy ra $\widehat{NBH} = \widehat{MCH}$. Do vậy ta suy ra được $\widehat{NKH} = \widehat{MKH}$.

b) Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm I và J. Chứng minh AO đi qua trung điểm của IJ.

• ***Phân tích.*** *Do IJ là dây cung của đường tròn (O) và AO là bán kính nên để chứng minh AO đi qua trung điểm của IJ ta đi chứng minh OA vuông góc với IJ. Đây là bài toán quen thuộc và có nhiều hướng để chứng minh như chứng minh IJ song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) hay biến đổi góc.*

• **Lời giải.**

+ Lời giải 1. Ta có tứ giác BNMC nội tiếp đường tròn. Từ đó ta được

$$\widehat{ANJ} = \widehat{ANM} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 90^0 - \widehat{BAO} = 90^0 - \widehat{NAO}.$$

Từ đó ta chứng minh được AO vuông góc với MN hay AO vuông góc với IJ. Do IJ là dây cung của đường tròn (O) nên suy ra AO đi qua trung điểm của IJ.

+ Lời giải 2. Kẻ tia tiếp tuyến AT với đường tròn (O). Khi đó ta được $\widehat{BAT} = \widehat{ACB}$. Mà ta có tứ giác BNMC nội tiếp đường tròn nên $\widehat{ANM} = \widehat{BCA}$. Từ đó ta được $\widehat{ANM} = \widehat{BAT}$ nên AT song song với MN. Lại có AT vuông góc với AO nên suy ra AO vuông góc với MN hay AO vuông góc với IJ. Do IJ là dây cung của đường tròn (O) nên suy ra AO đi qua trung điểm của IJ.

c) Gọi P là trung điểm BC và diện tích tứ giác AMHN là S. Chứng minh $2OP^2 > S$.

• ***Phân tích.*** *Trước hết ta nhận thấy* $S = S_{ANHM} = S_{ANH} + S_{AMH} = \frac{1}{2}(AN.HN + AM.HM)$. *Mặt khác theo bất đẳng thức AM – GM ta có*

$$AN.HN \le \frac{1}{2}(AN^2 + HN^2) = \frac{1}{2}AH^2; AM.HM \le \frac{1}{2}(AM^2 + HM^2) = \frac{1}{2}AH^2$$

Như vậy ta thấy $S \le \frac{1}{2}.AH^2$. *Do đó phép chứng minh hoàn tất khi ta chỉ ra được* $AH \le 2PO$. *Tuy nhiên theo một kết quả quen thuộc thì ta có* $AH = 2OP$. *Do vậy bài toán được chứng minh.*

• **Lời giải.** Kẻ đường kính AD của đường tròn (O), khi đó dễ dàng chứng minh được tứ giác BHCD là hình bình hành. Mà P là trung điểm của BC nên P cũng là trung điểm của DH. Trong tam giác DHA có PO là đường trung bình nên $AH = 2OP$. Ta có $S = S_{ANHM} = S_{ANH} + S_{AMH} = \frac{1}{2}\left(AN.HN + AM.HM\right)$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM và định lí Pitago ta được

$$AN.HN \le \frac{1}{2}\left(AN^2 + HN^2\right) = \frac{1}{2}AH^2; AM.HM \le \frac{1}{2}\left(AM^2 + HM^2\right) = \frac{1}{2}AH^2$$

Từ đó ta được $S \le \frac{1}{2}.AH^2 = \frac{1}{2}\left(2OP\right)^2 = 2OP^2$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $AN = NH; AM = MH$ nên tam giác ABC vuông cân tại A. Điều này mâu thuẫn với giả thiết tam giác ABC nhọn. Do vậy dấu bằng của các bất đẳng thức trên không xẩy ra, tức là ta có $2OP^2 > S$.

Bài 9. Cho đường tròn tâm O bán kính R. Tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$ có B, C cố định. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc $\widehat{BHC}$ cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng tam giác AMN cân.

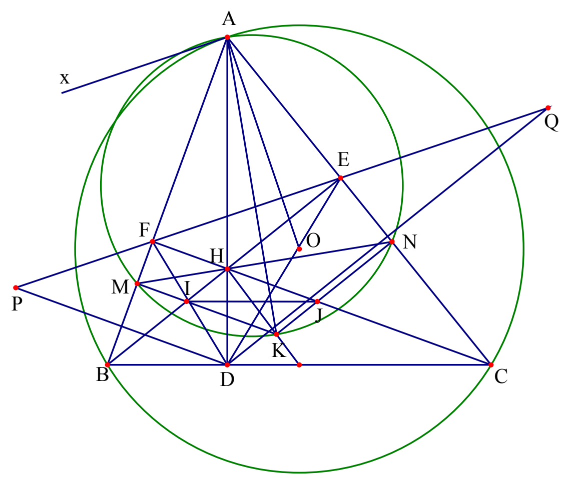
b) Xác định vị trí của điểm A để tam giác DEF có chu vi lớn nhất.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ tại $K\left(K \ne A\right)$. Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Trích đề thi học sinh giỏi Toán 9 Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2015 – 2016

Phân tích và Lời giải

a) Chứng minh rằng tam giác AMN cân.



• ***Phân tích.*** *Để chứng minh một tam giác cân ta có nhiều phương pháp. Tuy nhiên với cấu hình bài toán kết hợp với giả thiết ta hướng đến chứng minh được tam giác AMN cân bằng cách đi chứng minh* $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$. *Dễ thấy các góc* $\widehat{AMN}; \widehat{ANM}$ *lần lượt là góc ngoài của các tam giác BMH và CNH. Ta lại thấy được* $\widehat{FBH} = \widehat{CHE}$. *Như vậy phép chứng minh sẽ kết thúc nếu ta có được* $\widehat{MHB} = \widehat{NHC}$. *Tuy nhiên điều này ta dễ dàng có được do do HM và HN lần lượt là phân giác của góc* $\widehat{BHF}$ *và* $\widehat{CHE}$.

• **Lời giải.**

Theo tính chất góc ngoài của tam giác thì ta có $\widehat{AMN} = \widehat{ABH} + \widehat{MHB}$ và $\widehat{ANM} = \widehat{ACH} + \widehat{NHC}$. Do HM và HN lần lượt là phân giác của góc $\widehat{BHF}$ và $\widehat{CHE}$, mà ta lại có $\widehat{BHF} = \widehat{CHE}$ nên suy ra được $\widehat{MHB} = \widehat{NHC}$. Lại có tứ giác BFEC nội tiếp nên $\widehat{FBH} = \widehat{CHE}$. Từ đó ta được $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$ nên tam giác AMN cân tại A.

b) Xác định vị trí của điểm A để tam giác DEF có chu vi lớn nhất.

• ***Phân tích.*** *Dự đoán rằng tam giác DEF có chu vi lớn nhất khi M nằm chính giữa cung lớn AB. Khi đó ta thấy AD có dộ dài lớn nhất và tam giác ABC có diện tích lớn nhất. Như vậy ta cần biểu diễn được chu vi của tam giác DEF theo diện tích tam giác ABC. Ta thấy có các ý tưởng sau.*

+ Ta sẽ dựng một đoạn thẳng có dộ dài bằng chu vi tam giác DEF rồi chỉ ra đoạn thẳng đó dài nhất khi AD lớn nhất. Muốn vậy ta lấy P, Q lần lượt đối xứng với D qua AB và AC. Khi đó ta bốn điểm P, E, F, Q thẳng hàng. Khi đó ta có chu vi tam giác DEF là đoạn thẳng PQ. Lúc này ta thấy $AP = AD = AQ$ *nên tam giác APQ cân tại A, do đó*

$\widehat{PAQ} = 2\widehat{BAC}$ *không đổi. Như vậy PQ lớn nhất khi AP lớn nhất hay AD lớn nhất. Điều này có được khi A nằm chính giữa cung lớn BC.*

+ Ta sẽ tìm cách biểu diễn diện tích tam giác ABC theo chu vi của tam giác DEF. Nhận thấy AO vuông góc với EF do đó $S_{FOEA} = \frac{1}{2}AO.EF$. *Hoàn toàn tương tự như vậy ta tính được*

$$S_{ABC} = S_{FOEA} + S_{BDOF} + S_{CDOE} = \frac{1}{2}R\left(DE + EF + FD\right)$$

Mà ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AD.BC$ *nên* $DE + EF + FD = \frac{AD.BC}{R}$.

Do BC, R không đổi nên $DE + EF + FD = \frac{AD.BC}{R}$ *lớn nhất khi AD lớn nhất.*

+ Lời giải 1. Lấy P, Q lần lượt đối xứng với D qua AB và AC. Khi đó ta có $FP = FD$ và $ED = EQ$. Do đó ta có $p_{DEF} = DE + EF + FD = PQ$. Từ các tứ giác BDHF, BCEF và CDHE nội tiếp đường tròn nên ta có $\widehat{PFB} = \widehat{BFD} = \widehat{BHD} = \widehat{DCE} = \widehat{EFA}$. Từ đó suy ra ba điểm P, E, F thẳng hàng. Tương tự ta được bốn điểm P, E, F, Q thẳng hàng. Lại có $AP = AD = AQ$ nên tam giác APQ cân tại A, do đó ta có $\widehat{PAQ} = 2\widehat{BAC}$ không đổi. Như vậy PQ lớn nhất khi AP lớn nhất hay AD lớn nhất. Điều này có được khi A nằm chính giữa cung lớn BC. Vậy chu vi tam giác DEF lớn nhất khi A là điểm chính giữa cung lớn BC.

+ Lời giải 2. Trước hết ta chứng minh OA vuông góc với EF.

Thật vậy, từ A ta vẽ tiếp tuyến với đường tròn $\left(O\right)$. Khi đó ta có $\widehat{BAx} = \widehat{ACB}$. Mặt khác tứ giác BCEF nội tiếp nên ta có $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$. Do đó ta được $\widehat{AFE} = \widehat{xAB}$ nên Ax song song với EF mà ta lại có OA vuông góc với EF. Hoàn toàn tương tự ta cũng có OB vuông góc với DF và OC vuông góc với DE. Từ đó suy ra

$$S_{ABC} = S_{FOEA} + S_{BDOF} + S_{CDOE} = \frac{1}{2}R.AO + \frac{1}{2}R.OB + \frac{1}{2}R.OC = \frac{1}{2}R\left(DE + EF + FD\right)$$

Mà ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AD.BC$ nên $DE + EF + FD = \frac{AD.BC}{R}$.

Do BC và R không đổi nên $DE + EF + FD = \frac{AD.BC}{R}$ lớn nhất khi AD lớn nhất.

Vậy chu vi tam giác DEF lớn nhất khi A nằm chính giữa cung lớn BC.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ tại $K\left(K \ne A\right)$. Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

- ***Phân tích.*** *Từ hình vẽ ta dự đoán được HK đi qua trung điểm của BC cố định. Mặt khác cũng từ giải thiết và hình vẽ ta nhận thấy tứ tứ giác HIKJ là hình bình hành. Do đó HK đi qua trung điểm của IJ. Muốn chứng minh được HK đi qua trung điểm của BC thì ta cần chỉ ra được IJ song song với BC.*
- **Lời giải.** Gọi I là giao điểm của BH với KM, J là giao điểm của CH với KM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt tia phân giác của góc $\widehat{MAN}$ tại K nên AK là đường kính của đường tròn. Từ đó ta được $\widehat{KMA} = \widehat{KNA} = 90^0$. Từ đó dẫn đến KM song song với CH và KN song song với BH suy ra tứ giác HIKJ là hình bình hành, do đó suy ra HK đi qua trung điểm của IJ. Do IM song song với HF nên theo định lý Talets ta có $\frac{IH}{IB} = \frac{MF}{MB}$. Lại có HM là phân giác của

tam giác BHF nên ta có $\frac{MF}{MB}=\frac{HF}{HB}$. Từ đó ta được $\frac{IH}{IB}=\frac{HF}{HB}$. Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{HJ}{CJ}=\frac{HE}{HC}$. Mà tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn nên ta có $\frac{HF}{HB}=\frac{HE}{HC}$ do đó $\frac{IH}{IB}=\frac{HJ}{CJ}$. Từ đây suy ra IJ song song với BC. Vậy HK đi qua trung điểm của BC cố định hay HK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 10. Cho tam giác ABC có $(O),(I),(I_a)$ theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác với các tâm tương ứng là O, I, I_a. Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC, P là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn (O), PI_a cắt đường tròn (O) tại điểm K. Gọi M là giao điểm của PO và BC, N là điểm đối xứng với P qua O.

a) Chứng minh rằng IBI_aC là tứ giác nội tiếp.

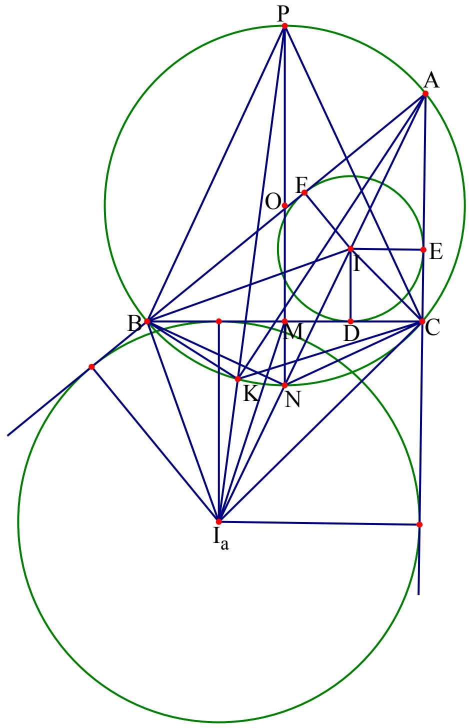
b) Chứng minh rằng NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP.

c) Chứng minh rằng $\widehat{DAI}=\widehat{KAI_a}$.

Trích đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 Tỉnh Thanh Hóa năm học 2017 – 2018

Phân tích và lời giải

a) Chứng minh tứ giác IBI_aC là tứ giác nội tiếp.



- ***Phân tích.*** *Theo tính chất đường phân giác của hai góc kề bù nên ta thấy ngay* $\widehat{IBI_a}+\widehat{ICI_a}=180^0$ *do đó tứ giác* IBI_aC *là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính* II_a.

- **Lời giải.** Do I_a là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, từ đó suy ra BI_a vuông góc với BI và CI_a vuông góc với CI (Phân giác trong và phân giác ngoài cùng một góc thì vuông góc với nhau). Trong tứ giác IBI_aC ta có $\widehat{IBI_a}+\widehat{ICI_a}=180^0$. Từ đó suy ra tứ giác IBI_aC là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính II_a.

b) Chứng minh NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP.

- ***Phân tích.*** *Trước hết ta nhận thấy bốn điểm* A, I, N, I_a *và theo hệ thức lượng cho tam giác vuông ta dễ thấy ngay* $NB^2=NM.NP$. *Như vậy để chứng minh* NI_a *là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác* I_aMP *ta đi chứng minh* $NI_a^2=NB^2=NM.NP$. *Điều này đồng nghĩa với chứng minh N là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác* IBI_aC. *Có thể thấy đây là một bài toán quen thuộc.*

• **Lời giải.** Nhận thấy bốn điểm A, I, N, I_a thẳng hàng (vì cùng thuộc tia phân giác của $\widehat{BAC}$). Do NP là đường kính của (O) nên $\widehat{NBP} = 90^0$ và M là trung điểm của BC nên PN vuông góc với BC tại M. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông PBN ta có $NB^2 = NM.NP$. Vì $\widehat{BIN}$ là góc ngoài tại đỉnh I của tam giác ABI nên $\widehat{BIN} = \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{BAC}\right)$. Trong đường tròn (O) có $\widehat{NBC} = \widehat{NAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ (cùng chắn cung NC). Từ đó ta được $\widehat{NBI} = \widehat{NBC} + \widehat{CBI} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right)$. Từ các kết quả trên ta có $\widehat{BIN} = \widehat{NBI}$ nên tam giác NIM cân tại N. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có tam giác NIC cân tại N. Từ đó suy ra N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC, cũng chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác IBI_aC. Do vậy ta được $NI_a^2 = NB^2 = NM.NP$ nên NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP.

c) Chứng minh $\widehat{DAI} = \widehat{KAI_a}$.

• ***Phân tích.*** *Ta có* $\widehat{KAI_a} = \widehat{KAN} = \widehat{KPN} = \widehat{I_aPN} = \widehat{NI_aM}$. *Như vậy để hoàn thành chứng minh thì ta cần chỉ ra được* $\widehat{NI_aM} = \widehat{DAI}$, *điều này đồng nghĩa với chứng minh tam giác* NMI_a *đồng dạng với tam giác IAD. Như vậy để kết thúc bài toán ta đi chứng minh* $\frac{MN}{ID} = \frac{NI_a}{IA}$. *Chú ý rằng ta có* $ID = IF$ *và* $NI_a = NB$. *Nên ta cần chỉ ra được* $\frac{MN}{ID} = \frac{NB}{IA}$. *Tuy nhiên điều này hoàn toàn xẩy ra do hai tam giác MNB và FIA đồng dạng với nhau.*

• **Lời giải.** Gọi F là tiếp điểm của đường tròn (I) với đường thẳng AB. Xét hai tam giác MNB và FIA có $\widehat{BMN} = \widehat{IFA} = 90^0$ và $\widehat{NBM} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{IAF}$ nên suy ra tam giác MNB đồng dạng với tam giác FIA. Điều này dẫn đến $\frac{MN}{ID} = \frac{NB}{IA}$. Mà ta có $ID = IF$ và $NI_a = NB$ nên ta được $\frac{MN}{ID} = \frac{NI_a}{IA}$. Lại do MN song song với ID nên ta lại có $\widehat{MNI_a} = \widehat{DIA}$, từ đó suy ra tam giác NMI_a đồng dạng với tam giác IAD. Do đó suy ra $\widehat{NI_aM} = \widehat{DAI}$. Do NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP nên $\widehat{KAI_a} = \widehat{KAN} = \widehat{KPN} = \widehat{I_aPN} = \widehat{NI_aM}$. Kết hợp các kết quả trên ta được $\widehat{DAI} = \widehat{KAI_a}$.

Bài 11. Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ của tam giác cắt cạnh BC tại D và cắt lại đường tròn (O) tại E. Gọi K là điểm nằm trong tam giác ABC thỏa mãn các điều kiện $KB = KC$ và $\widehat{BKC} + \widehat{BAC} = 180^0$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, O, K, D cùng thuộc một đường tròn, kí hiệu là (P).

b) Gọi L là giao điểm thứ hai của (P) và (O). Chứng minh rằng $\widehat{LAB} = \widehat{KAC}$

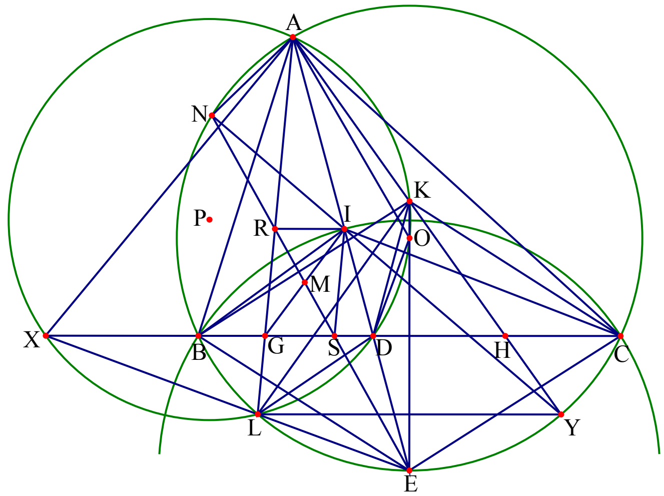
c) Gọi G là giao điểm của AL và BC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, M là trung điểm của đoạn GI, N là giao điểm thứ hai của đường thẳng EM và đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng NI, AK cắt nhau tại một điểm thuộc (O).

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Thành phố Đà Nẵng 2015 – 2016

Phân tích và lời giải

a) Chứng minh bốn điểm A, O, K, D cùng thuộc một đường tròn $\left(P\right)$.

• ***Phân tích.*** *Nhận thấy* $\widehat{BAC}+\widehat{BEC}=180^0$ *và* $\widehat{BKC}+\widehat{BAC}=180^0$ *nên* $\widehat{BKC}=\widehat{BEC}$. *Chú ý rằng điểm E nằm chính giữa cung nhỏ BC của đường tròn* $\left(O\right)$ *nên* $EB=EC$. *Mà tai có* $KB=KC$ *nên hai tam giác BEC và BKC cùng là tam giác cân. Từ đó suy ra tam giác BEC và tam giác BKC bằng nhau. Do vậy* $\widehat{OAD}=\widehat{OED}=\widehat{OKD}$ *nên tứ giác AKOD nội tiếp đường tròn.*



• **Lời giải.** Tứ giác ABEC nội tiếp đường tròn nên ta có $\widehat{BAC}+\widehat{BEC}=180^0$. Mặt khác ta lại có $\widehat{BKC}+\widehat{BAC}=180^0$ nên ta suy ra được $\widehat{BKC}=\widehat{BEC}$. Chú ý rằng AE là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên điểm E nằm chính giữa cung nhỏ BC của đường tròn $\left(O\right)$, do đó ta được $EB=EC$. Mà ta lại có $KB=KC$ nên hei tam giác BEC và BKC cùng là tam giác cân. Từ đó suy ra tam giác BEC và tam giác BKC bằng nhau. Do vậy K và E đối xứng với nhau qua BC. Khi đó $\widehat{OAD}=\widehat{OED}=\widehat{OKD}$ nên tứ giác AKOD nội tiếp đường tròn.

b) Gọi L là giao điểm thứ hai của $\left(P\right)$ và $\left(O\right)$. Chứng minh $\widehat{LAB}=\widehat{KAC}$

• ***Phân tích.*** *Dễ thấy* $\widehat{BAD}=\widehat{BAE}=\widehat{EAC}=\widehat{EBC}$ *nên suy ra tam giác EBD đồng dạng với tam giác EAB nên* $EB^2=ED.EA$. *Gọi X là giao điểm của EL với* $\left(P\right)$ *khi đó* $EL.EX=ED.EA=EB^2$ *nên ta có được* $\frac{EB}{EL}=\frac{EX}{EB}$ *nên tam giác EBL đồng dạng với tam giác EXB. Từ đó để ý đến các tứ giác nội tiếp ta có ba điểm X, B, D thẳng hàng. Từ đây ta có* $\widehat{KLE}=\widehat{XAK}=\widehat{DKC}=\frac{1}{2}\widehat{DKE}$. *Do K và E đối xứng với nhau qua BC nên ta có* $DK=DE$. *Lại thấy D là tâm của đường tròn ngoại tiếp KLE. Do đó tam giác DLK cân tại D. Mà tứ giác AKDL nội tiếp đường tròn* $\left(P\right)$ *ta có* $\widehat{AKD}=\widehat{KLD}=\widehat{LKD}=\widehat{LAD}$ *và do AD là phân giác của góc* $\widehat{BAC}$ *nên ta được* $\widehat{LAB}=\widehat{KAC}$.

• **Lời giải.** Do E là điểm chính giữa cung BC của đường tròn $\left(O\right)$ nên $\widehat{BAD}=\widehat{BAE}=\widehat{EAC}=\widehat{EBC}$ nên suy ra tam giác EBD đồng dạng với tam giác EAB nên ta được $EB^2=ED.EA$. Gọi X là giao điểm của EL với $\left(P\right)$ khi đó ta có $EL.EX=ED.EA=EB^2$ nên ta có $\frac{EB}{EL}=\frac{EX}{EB}$ nên tam giác EBL đồng dạng với tam giác EXB. Từ đó để ý đến các tứ giác nội tiếp ta có $\widehat{LXB}=\widehat{LBE}=\widehat{LAE}=\widehat{DXL}$, suy ra ba điểm X, B, D thẳng hàng, hay điểm X nằm trên BC. Từ đây $\widehat{KLE}=\widehat{XAK}=\widehat{DKC}=\frac{1}{2}\widehat{DKE}$. Do K và E đối xứng với nhau qua BC nên ta có $DK=DE$. Từ đó dẫn đến D là tâm của đường tròn ngoại tiếp KLE. Do đó tam giác DLK cân tại D. Đến đây chú ý đến tứ giác AKDL nội tiếp đường tròn (P) ta có $\widehat{AKD}=\widehat{KLD}=\widehat{LKD}=\widehat{LAD}$. Mà do ta đã có AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên ta được $\widehat{LAB}=\widehat{KAC}$.

c) Chứng minh các đường thẳng NI, AK cắt nhau tại một điểm thuộc (O).

• ***Phân tích.*** *Gọi R,S lần lượt là giao điểm của EN với AL, BC. Do E là điểm chính giữa cung nhỏ BC của đường tròn* (O) *nên NE là phân giác của góc* $\widehat{BNC}$. *Do đó ta có tam giác BNE đồng dạng với tam giác SBE nên* $BE^2=ES.EN$. *Để ý rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC, do đó ta được* $EB=EI$. *Điều này dẫn đến* $EI^2=ES.SE$ *hay* $\frac{EI}{ES}=\frac{ES}{EN}$ *nên tam giác SEI đồng dạng với tam giác IEN. Do vậy ta được* $\widehat{ENI}=\widehat{EIS}$. *Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AGI ba điểm R, M, E thẳng hàng ta được* $\frac{RG}{RA}.\frac{EA}{EI}.\frac{MI}{MG}=1$. *Chú ý rằng M là trung điểm của GI và BI là phân giác của góc* $\widehat{ABD}$, *lại có tam giác EBD đồng dạng với tam giác EAB nên ta có* $\frac{RA}{RG}=\frac{EA}{EI}=\frac{AB}{DB}=\frac{IA}{ID}$, *do đó theo định lí Talets ta có RI song song với GD. Từ đó suy ra hai tamn giác MIR và MGS bằng nhau nên suy ra RG song song với SI. Từ đó gọi Y là giao điểm thứ hai của AK với đường tròn* (O) *thì ta có ba điểm N, I, Y thẳng hàng.*

• **Lời giải.** Gọi R,S lần lượt là giao điểm của EN với AL, BC. Do E là điểm chính giữa cung nhỏ BC của đường tròn (O) nên NE là phân giác của góc $\widehat{BNC}$. Do đó ta có $\widehat{BNS}=\widehat{BNE}=\widehat{ENC}=\widehat{EBS}$ nên suy ra tam giác BNE đồng dạng với tam giác SBE, do đó suy ra $\frac{BE}{SE}=\frac{NE}{BE}$ hay $BE^2=ES.EN$. Để ý rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên bằng biến đổi góc ta suy ra được E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC, do đó ta được $EB=EI$. Từ đó suy ra $EI^2=ES.SE$ hay $\frac{EI}{ES}=\frac{ES}{EN}$ nên tam giác SEI đồng dạng với tam giác IEN. Do vậy ta được $\widehat{ENI}=\widehat{EIS}$. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AGI ba điểm R, M, E thẳng hàng ta được $\frac{RG}{RA}.\frac{EA}{EI}.\frac{MI}{MG}=1$. Chú ý rằng M là trung điểm của GI và BI là phân giác của góc $\widehat{ABD}$, lại có tam giác EBD đồng dạng với tam giác EAB nên ta có $\frac{RA}{RG}=\frac{EA}{EI}=\frac{AB}{DB}=\frac{IA}{ID}$, do đó theo định lí Talets ta có RI song song với GD. Từ đó suy ra hai tamn giác MIR và MGS bằng nhau nên suy ra RG song song với SI. Từ đó gọi Y là giao điểm thứ hai của AK với đường tròn (O) thì ta có biến đổi góc $\widehat{ENI}=\widehat{EIS}=\widehat{LAE}=\widehat{EKY}=\widehat{ENY}$ nên suy ra ba điểm N, I, Y thẳng hàng. Vậy hai đường thẳng NI và AK cắt nhau tại Y trên đường tròn (O)

Bài 12. Cho tam giác ABC nhọn và nội tiếp đường tròn (O), H là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A. P là điểm nằm trong tam giác ABC và nằm trên đường phân giác kẻ từ A. Đường tròn đường kính của AP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là G. L là hình chiếu của P lên AH.

a) Chứng minh rằng đường thẳng GL luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

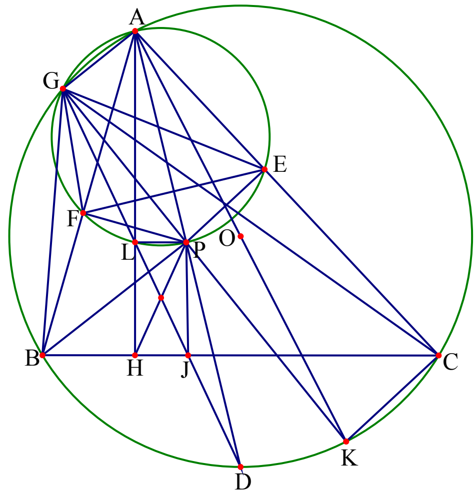
b) Chứng minh rằng nếu GL đi qua trung điểm của HP thì P là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Trích đề thi chọn học sinh dự thi HSGQG Tỉnh Quảng Ninh 2015 – 2016

Phân tích và lời giải

a) Chứng minh đường thẳng GL luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

• ***Phân tích.*** *Quan sát hình vẽ ta dự đoán được đường thẳng GL đi qua điểm cố định D. Để chứng minh điều này ta cần chỉ ra được ba điểm G, L, D thẳng hàng. Dễ dàng nhận ra ba điểm G, P, K thẳng hàng và AH đối xứng với AK qua AD. Lại do L là hình chiếu của P trên AH nên* $\widehat{LGP} = \widehat{LAP} = \widehat{HAD} = \widehat{DAK} = \widehat{DGK}$. *Điều này dẫn đến ba điểm G, L, D thẳng hàng.*



• **Lời giải.** Do G thuộc đường tròn đường kính AP nên ta có $\widehat{AGP} = 90^0$. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O), khi đó ta có $\widehat{AGK} = 90^0$.

Do đó ba điểm G, P, K thẳng hàng. Gọi D là giao điểm của AP với đường tròn (O), khi đó D là điểm cố định. Ta có $\widehat{BAH} = 90^0 - \widehat{ABC} = 90^0 - \widehat{AKC} = \widehat{CAK}$. Do AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên suy ra AP cũng là phân giác của góc $\widehat{HAK}$. Do L là hình chiếu của P trên AH nên suy ra L thuộc đường tròn đường kính AP. Từ đó ta có biến đổi góc $\widehat{LGP} = \widehat{LAP} = \widehat{HAD} = \widehat{DAK} = \widehat{DGK}$. Điều này dẫn đến ba điểm G, L, D thẳng hàng. Vậy đường thẳng GL luôn đi qua điểm D cố định.

b) Chứng minh nếu GL đi qua trung điểm của HP thì P là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

• ***Phân tích.*** *Ta có một tính chất khá quen thuộc là đường tròn tâm D bán kính DB đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Do đó để chứng minh P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta chỉ cần chứng minh được* $DB = DC = DP$.

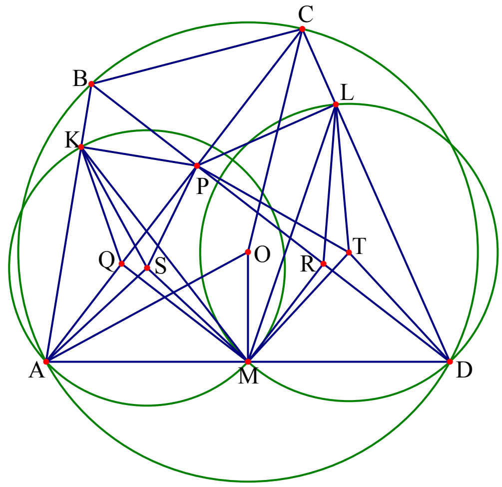
• Lời giải. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và J là giao điểm của GL với BC. Vì LJ đi qua trung điểm của PH và $\widehat{JHL} = \widehat{HLP} = 90^0$ nên tứ giác PLHJ là hình chữ nhật. Áp dụng định lý Thales ta có $\frac{DP}{DA} = \frac{PJ}{AL} = \frac{LH}{AL} = \frac{PJ}{PA}$ nên $\frac{DP}{DA} = 1 - \frac{AP}{DA} = 1 - \frac{PF}{DP} = \frac{DF}{DP}$ hay $DP^2 = DF.DA$. Mặt khác ta có $\widehat{DBF} = \widehat{DAC} = \widehat{BAF}$ suy ra BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF. Vì vậy ta có $DB^2 = DF.DA = DP^2$. Suy ra $DB = DC = DP$. Mà ta có D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCI, với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC suy ra P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 13. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) với P là giao điểm của hai đường chéo và M là trung điểm của AD. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu của P trên AB, CD. Gọi S, T lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác KMA và LMD.

a) Chứng minh rằng $MK = ML$.

b) Chứng minh rằng $KS.BT = CS.LT$

Lời giải



a) Gọi Q, R lần lượt là trung điểm của AP và DP. Trong tam giác APD có MQ và MR là các đường trung bình. Lại có KQ, LR là các đường trung tuyến của các tam giác vuông AKP và CLP.

Suy ra $AM = \frac{1}{2}PD = LR$ và $RM = \frac{1}{2}AP = KQ$.

Mặt khác dễ thấy tứ giác QPRM là hình bình hành nên $\widehat{PQM} = \widehat{PRM}$. Do vậy ta có

$$\widehat{KQM} = \widehat{KQP} + \widehat{PQM} = 2\widehat{BAC} + \widehat{PQM}$$
$$= 2\widehat{BDC} + \widehat{PRM} = \widehat{PRL} + \widehat{PRM} = \widehat{MRL}$$

Do vậy hai tam giác KQM và MRL bằng nhau, do đó ta được $MK = ML$.

b) Ta có tứ giác PQMR là hình bình hành nên $\widehat{QMR} = 180^0 - \widehat{PRM}$. Cũng do hai tam giác KQM và MRL bằng nhau nên ta được $\widehat{QMK} = \widehat{MLR}; \widehat{QKM} = \widehat{RML}$. Từ đó ta được

$$\widehat{KML} = \widehat{QMR} - \widehat{QMK} - \widehat{RMK} = 180^0 - \widehat{PRM} - \widehat{RLM} - \widehat{RML} = \widehat{PRL} = 2\widehat{PDL}$$

Do S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMK nên ta có $\widehat{KAS} = 90^0 - \widehat{KMA}$ và T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác LMD nên ta có $90^0 - \widehat{LMD} = \widehat{TDL}$. Do đó ta được

$$\widehat{CAS} = \widehat{KAS} - \widehat{KAC} = 90^0 - \widehat{KMA} - \widehat{PDL} = \widehat{KMO} - \widehat{PDL} = \widehat{KML} - \widehat{OML} - \widehat{PDL}$$
$$= 2\widehat{PDL} - \left(90^0 - \widehat{LMD}\right) - \widehat{PDL} = \widehat{PDL} - \widehat{TDL} = \widehat{TDB}$$

Mặt khác ta lại có $\widehat{AOC} = 2\widehat{ADC} = \widehat{MTL}$ nên hai tam giác cân OAC và TML đồng dạng với nhau.

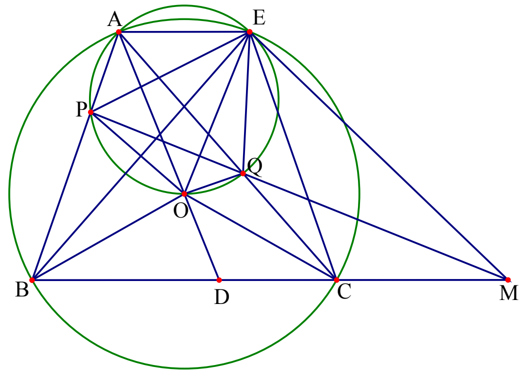
Từ đó suy ra $\frac{AC}{OC} = \frac{ML}{TL}$ hay $AC.TL = ML.OC$. Chứng minh tương tự ta có hai tam giác OBD và SMK đồng dạng với nhau nên ta cũng có $MK.OB = KS.BD$. Để ý rằng ta có $MK = ML$ nên ta được $TD.AC = TL.AC = ML.OC = MK.OB = KS.BD = SA.BD$. Điều này lại dẫn đến hai tam giác SAC và TDB đồng dạng với nhau. Do đó ta được $BT.SK = BT.AS = CS.TD = CS.TL$.

Bài 14. Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn tâm O. Lấy điểm P trên cạnh AB sao cho $\widehat{BOP} = \widehat{ABC}$ và lấy điểm Q trên cạnh AC sao cho $\widehat{COQ} = \widehat{ACB}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ cắt đường tròn (O) tại điểm E khác A.

a) Chứng minh rằng AE song song với BC và $AB.BP = AC.CQ$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng đối xứng với BC qua PQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AQP.

Lời giải



a) Giả sử đường thẳng AO cắt BC tại D. Do O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $OA = OB$. Từ đó ta được $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Mà theo giả thiết ta có $\widehat{BOP} = \widehat{ABC}$ nên suy ra hai tam giác ABD và BOP đồng dạng với nhau. Từ đó ta suy ra được $\frac{AB}{BO} = \frac{AD}{BP}$ nên $AB.BP = AD.BO$ và $\widehat{BPO} = \widehat{ADB}$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có hai tam giác ACD và COQ đồng dạng với nhau.

Từ đó ta cũng được $AC.CQ = AD.CO$ và $\widehat{CQO} = \widehat{ADC}$.

Để ý rằng $OB = OC$ nên ta suy ra được $AB.BP = AC.CQ$. Cũng từ các kết quả trên ta lại có

$$\widehat{APO} + \widehat{AQO} = 180^0 - \widehat{BPO} + 180^0 - \widehat{CQO} = 360^0 - \left(\widehat{ADB} + \widehat{ADC}\right) = 180^0$$

Suy ra tứ giác APOQ nội tiếp đường tròn hay điểm O nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác APQ. Do E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó ta có $OE = OA$ nên $\widehat{OAE} = \widehat{OEA}$ và tứ giác AEQO nội tiếp đường tròn nên $\widehat{AEO} = \widehat{AQO}$. Kết hợp với tứ giác AQOP nội tiếp đường tròn ta suy ra được $\widehat{AEO} = \widehat{AQO} = \widehat{BPO} = \widehat{ADB}$. Từ đó ta có $\widehat{EAO} = \widehat{ADB}$ nên AE song song với BC.

b) Không mất tính tổng quát ta giả sử $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$. Khi đó gọi M là giao điểm của PQ và BC là M thì điểm nằm trên tia đối của tia CB. Từ giác AEPQ nội tiếp đường tròn nên ta được $\widehat{PAE} + \widehat{PQE} = 180^0$, kết hợp với AE song song với BC nên $\widehat{PAE} + \widehat{ABC} = 180^0$. Từ đó $\widehat{EPQ} = \widehat{EAQ}$ và $\widehat{EAQ} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{EPQ} = \widehat{ACB}$. Suy ra hai tam giác EPQ và ACB đồng dạng với nhau. Điều này dẫn đến hai tam giác ABC và EBC bằng nhau nên ta được $\widehat{APE} = \widehat{APQ} - \widehat{EPQ} = \widehat{AOQ} - \widehat{EOQ} = \widehat{AOB}$. Mặt khác ta lại có $\widehat{OAC} = \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{AOC}\right) = 90^0 - \widehat{ABC}$ và $\widehat{EAC} = \widehat{ACB}$.

Từ đó suy ra $\widehat{AOB} = 180^0 - 2\widehat{OAE} = 180^0 - 2\left(90^0 - \widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) = 2\left(\widehat{ABC} - \widehat{ACB}\right)$

Do đó ta được $\widehat{APE} = 2\left(\widehat{ABC} - \widehat{ACB}\right)$.

Ta lại có $\widehat{ABE} = \widehat{ABC} - \widehat{EBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$ nên suy ra $\widehat{APE} = 2\widehat{ABE}$ hay $\widehat{PBE} = \widehat{PEB}$

Ta cũng có $\widehat{AQP} = \widehat{AEP} = 180^0 - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right) - \left(\widehat{ABC} - \widehat{ACB}\right) = 2\widehat{ACB} - \widehat{ABC}$

Nên ta được $\widehat{PMB} = \widehat{ACB} - \widehat{MQP} = \widehat{ACB} - \widehat{AQP} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$

Suy ra $\widehat{PMB} = \widehat{BEP} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$ nên tứ giác BPEM nội tiếp đường tròn. Kết hợp với $\widehat{PBE} = \widehat{PEB}$ ta được $\widehat{BMP} = \widehat{PME}$ nên MP là phân giác của góc $\widehat{BME}$ hay nói cách khác thì hai đường thẳng ME và BC đối xứng với nhau qua PQ. Lại có $\widehat{EQM} = 180^0 - \widehat{EQP} = 180^0 - \widehat{ABC}$ và $\widehat{PEM} = 180^0 - \widehat{ABC}$. Từ đó dẫn đến hai tam giác

MQE và MPE đồng dạng với nhau, do đó ta được $ME^2 = MP.MQ$. Suy ra ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.

Bài 15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn (K) tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại S. Các đường thẳng SE, SF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N khác S. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM, AFN cắt nhau tại P khác A. Gọi giao điểm của EN, FM với đường tròn (K) lần lượt là G, H.

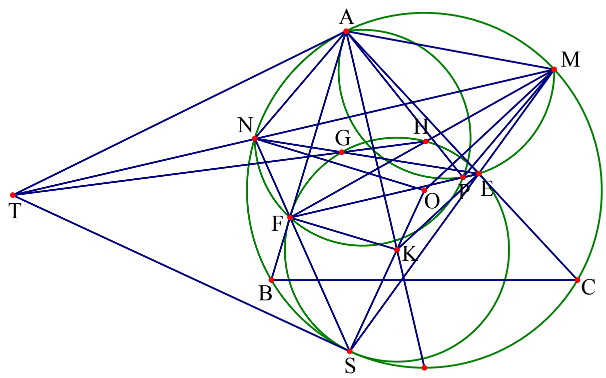
a) Chứng minh rằng trung điểm I của EF là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Gọi giao điểm của GH với MN là T. Chứng minh rằng tứ giác AMPN là hình bình hành và tam giác AST cân.

Lời giải

a) Đường tròn (K) tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại E, F và tiếp xúc với đường tròn (O) tại S nên ba điểm O, K, S thẳng hàng. Đường thẳng SE cắt đường tròn (O) tại M nên các tam giác OSM và SKE cân, do đó ta suy ra được $\widehat{KES} = \widehat{KSE} = \widehat{OSM} = \widehat{OMS}$ nên KE song song với OM.

Ta có KE vuông góc với AC nên OM vuông góc với AC, do đó M là điểm chính giữa cung nhỏ AC của đường tròn (O) nên BM là phân giác của $\widehat{ABC}$. Do đó ta suy ra được $\widehat{CSM} = \widehat{ACM}$ nên hai tam giác CME và SCM đồng dạng, suy ra $CM^2 = ME.MS$. Giả sử đường thẳng BM cắt EF tại I. Vẽ tiếp tuyến chung xy tại S của (O) và (K).



Khi đó ta có $\widehat{IFS} = \widehat{EFS} = \widehat{ESy} = \widehat{MSy}$ và $\widehat{MBS} = \widehat{MSy}$ nên ta được $\widehat{IFS} = \widehat{IBS}$ hay tứ giác IFBS nội tiếp đường tròn, do đó suy ra $\widehat{MFS} = \widehat{BIS}$. Mặt khác ta có $\widehat{FSx} = \widehat{SFB} = \widehat{FES}$ nên $\widehat{BIS} = \widehat{FES}$, do đó $\widehat{MIS} = \widehat{MEI}$ nên hai tam giác MEI và MIS đồng dạng với nhau, suy ra $MI^2 = ME.MS$.

Từ đó dẫn đến $MI = CM$ nên $MA = MC = MI$, suy ra tam giác MIC có $\widehat{IMC} = \widehat{BAC}$ nên ta suy ra được $\widehat{MIC} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Tương tự ta có $\widehat{MIA} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{ACB}$.

Từ đó dẫn đến $\widehat{AIC} = \widehat{AIM} + \widehat{MIC} = 180^0 - \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right)$ nên I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, do đó I là trung điểm của MN. Vậy trung điểm của MN là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Dễ thấy $\widehat{APF} = 180^0 - \widehat{ANS} = 180^0 - \widehat{APE}$ nên ba điểm E, P, F thẳng hàng.

Ta có $\widehat{APM} = \widehat{AEM}$ và $\widehat{AEM} = \widehat{SEC}$ kết hợp với $\widehat{SEC} = \widehat{EFS}$ nên ta được $\widehat{EFS} = \widehat{PAN}$. Điều này dẫn đến tứ giác ANFP nội tiếp đường tròn. Do đó $\widehat{APM} = \widehat{PAN}$ nên AN song song với PM. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được AM song song với PN. Do vậy tứ giác AMEN là hình bình hành. Dễ thấy các ta giác SKF và SON đồng dạng với nhau nên suy ra KF song song với ON. Tương tự ta cũng có KE song song với OM. Từ đó suy ra $\frac{SF}{SN} = \frac{SK}{SO} = \frac{SE}{SM}$ nên MN song song với EF. Từ đó ta được $\widehat{HGE} = \widehat{HFE} = \widehat{HMN}$ nên tứ giác MNGH nội tiếp. Giả sử TS cắt đường tròn (O) và (O) lần lượt tại L và J, khi đó $TS.TL = TM.TN = TH.TG = TS.TJ$. Từ đó suy ra ba điểm S, L, J trùng nhau nên TS là tiếp tyến của đường tròn (O). Tứ giác AMEN là hình bình hành nên AP và MN cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. Ta có $\widehat{IAM} = \widehat{PES} = \widehat{FST} = \widehat{NAS}$ và $\widehat{AMI} = \widehat{AMN} = \widehat{ASN}$ nên hai tam giác AIM và ANS đồng dạng với nhau, từ đó suy ra $AM.SN = AI.AS$. Hoàn toàn tương tự ta được $AN.SM = AI.SN = AM.SN$. Do TS là tiếp tuyến với đường tròn (O) nên $\frac{TM}{TN} = \frac{SM^2}{SN^2} = \frac{AM^2}{AN^2}$. Từ đó ta suy ra được TA là tiếp tuyến với đường tròn (O). Do đó tam giác AST cân tại T.

Trên đây là một số bài toán được soạn ra để ôn thi cho kì thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán của các Trường THPT Chuyên tôi xin chia sẻ với hi vọng sẽ bổ ích cho bạn đọc. Tuy nhiên đây chỉ là tài liệu của các nhân nên có gì sai sót mong được thông cảm và chia sẻ.

Chúc các bạn mọi điều tốt đẹp nhất!