ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9 TỈNH NAM ĐỊNH

Năm học 2018 – 2019

Câu 1 (3.0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}} - \dfrac{1-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}{7+\sqrt{89-28\sqrt{10}}}$.

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{xz}{z+\sqrt{z^2+1}} + \dfrac{z}{y} = \dfrac{\sqrt{z^2+1}}{y}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}+1} + \frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1} = 1$$

Câu 2 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $x^3 + x^2 + 2x = \dfrac{4\sqrt{5}}{15}\left(x^2+2\right)\sqrt{x^4+4}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{\left(x-y\right)^2-1}{xy} - \dfrac{2\left(x+y-1\right)}{x+y} = -4 \\ 4x^2+5y+\sqrt{x+y-1}+6\sqrt{x} = 13 \end{cases}$

Câu 3 (3.0 điểm).

a) Cho các đa thức $P\left(x\right)$ và $Q\left(x\right)$ thỏa mãn $P\left(x\right) = \dfrac{1}{2}\left(Q\left(x\right)+Q\left(1-x\right)\right)$ với mọi x. Biết rằng hệ số của $P\left(x\right)$ là các số nguyên không âm và $P\left(0\right)=0$. Tính $P\left(3P\left(3\right)-P\left(2\right)\right)$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn phương trình

$$\left(x-y-1\right)\left(x+1-y\right)+6xy+y^2\left(2-x-y\right) = 2\left(x+1\right)\left(y+1\right)$$

Câu 4 (7.0 điểm).

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$, vẽ đường tròn $\left(O';R'\right)$ với $R' < R$ tiếp xúc với cạnh AD tại H, tiếp xúc với cạnh BC tại G và tiếp xúc trong với đường tròn $\left(O\right)$ tại M (M thuộc cung $\overset{\frown}{CD}$ không chứa điểm A). Vẽ đường thẳng tt' là tiếp tuyến chung tại M của hai đường tròn $\left(O;R\right)$ và $\left(O';R'\right)$ (tia Mt nằm trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng MA chứa điểm D).

a) Chứng minh rằng $\widehat{DHM} = \widehat{DMt} + \widehat{AMH}$ và MH, MG lần lượt là tia phân giác của các góc $\widehat{AMD}, \widehat{BMC}$.

b) Đường thẳng MH cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại E khác M. Hai đường thẳng HG và CE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng $\widehat{EHI} = \widehat{EIM}$.

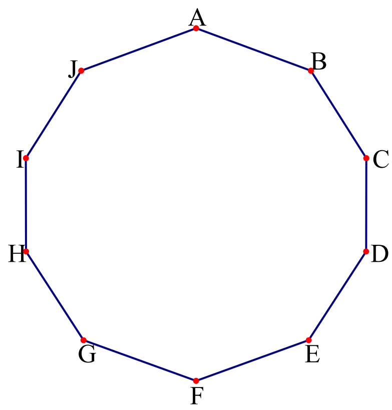
c) Chứng minh rằng MH đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD.

Câu 5 (2.0 điểm).

a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{c\left(c+a+3b\right)+c^2}+\frac{1}{a\left(a+b+3c\right)+a^2}+\frac{1}{b\left(b+c+3a\right)+b^2}\le\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

b) Cho một đa giác có 10 đỉnh như hình vẽ ở bên (bốn đỉnh A, B, C, D hoặc B, C, D, E hoặc C, D, E, F hoặc … hoặc J, A, B, C được gọi là bốn đỉnh liên tiếp của đa giác). Các đỉnh của đa giác được đánh số một cách tùy ý bởi các số nguyên thuộc tập hợp $\left\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\right\}$ (biết rằng mỗi đỉnh được đánh bởi một số và các số được đánh ở các đỉnh là khác nhau). Chứng minh rằng luôn tìm được bốn đỉnh liên tiếp của đa giác được đánh số mà tổng các số đó lớn hơn 21.



ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Câu 1 (3.0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}} - \dfrac{1-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}{7+\sqrt{89-28\sqrt{10}}}$.

• **Lời giải.** Ta có

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}.\sqrt{2}+2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{9+4\sqrt{2}} = \sqrt{8-2.2\sqrt{2}.1+1} = \sqrt{\left(\sqrt{8}-1\right)^2} = \sqrt{8}-1$$

$$\sqrt{89-28\sqrt{10}} = \sqrt{49-2.7.2\sqrt{10}+40} = \sqrt{\left(7-2\sqrt{10}\right)^2} = 7-2\sqrt{10}$$

Thay các kết quả trên vào biểu thức P thì ta thu được

$$P = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}} - \frac{1-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}{7-\sqrt{89-28\sqrt{10}}} = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{1-\left(\sqrt{8}-1\right)}{7-\left(7-2\sqrt{10}\right)}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{xz}{z+\sqrt{z^2+1}} + \dfrac{z}{y} = \dfrac{\sqrt{z^2+1}}{y}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}+1} + \frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1} = 1$$

• **Lời giải.** Biến đổi giả thiết của bài toán ta được

$$\frac{xz}{z+\sqrt{z^2+1}} = \frac{\sqrt{z^2+1}-z}{y} \Leftrightarrow \left(\sqrt{z^2+1}-z\right)\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) = xyz \Leftrightarrow xyz = 1$$

Khi đó ta có $\sqrt{xyz} = 1$ nên ta có biến đổi biểu thức vế trái như sau

$$\frac{1}{\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}+1} + \frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}+\sqrt{xyz}} + \frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+\sqrt{xyz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{xy}\left(1+\sqrt{zx}+\sqrt{z}\right)} + \frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{y}\left(\sqrt{z}+1+\sqrt{xz}\right)} + \frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1} + \frac{\sqrt{zx}}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1} + \frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1} = \frac{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1} = 1$$

Câu 2 (5.0 điểm).

a) Giải phương trình $x^3+x^2+2x = \dfrac{4\sqrt{5}}{15}\left(x^2+2\right)\sqrt{x^4+4}$

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình là $x \in R$. Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Xét $x \neq 0$, khi đó biến đổi tương đương phương trình đã cho ta được

$$x^3+x^2+2x=\frac{4\sqrt{5}}{15}\left(x^2+2\right)\sqrt{x^4+4}\Leftrightarrow\frac{x^3+x^2+2x}{x^2}=\frac{4\sqrt{5}}{15}.\frac{x^2+2}{x}\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}$$
$$\Leftrightarrow x+\frac{2}{x}+1=\frac{4\sqrt{5}}{15}.\left(x+\frac{2}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}\Leftrightarrow x+\frac{2}{x}+1=\frac{4\sqrt{5}}{15}.\left(x+\frac{2}{x}\right)\sqrt{\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-4}$$

Đặt $t=x+\frac{2}{x}\left(\left|t\right|\ge 2\sqrt{2}\right)$, khi đó phương trình trên được viết lại thành $t+1=\frac{4\sqrt{5}}{15}.t\sqrt{t^2-4}$.

Điều kiện xác định của phương trình trên là $\left|t\right|\ge 2\sqrt{2}$. Biến đổi phương trình trên ta được

$$t+1=\frac{4\sqrt{5}}{15}.t\sqrt{t^2-4}\Rightarrow 225\left(t+1\right)^2=80t^2\left(t^2-4\right)\Leftrightarrow 16t^4-64t^2=45\left(t^2+2t+1\right)$$
$$\Leftrightarrow 16t^4-109t^2-90t-45=0\Leftrightarrow\left(t-3\right)\left(16t^3+48t^2+35t+15\right)=0$$

+ Với $t\ge 2\sqrt{2}$ thì ta có $16t^3+48t^2+35t+15>0$.

+ Với $t\le -2\sqrt{2}$ thì ta có $16t^3+48t^2+35t+15<0$.

$$\left(-4t^3\right)+\left(-32t\right)\ge 2\sqrt{4.32t^4}=16t^2\sqrt{2}>22t^2;-12t^3\ge 12.2\sqrt{2}t^2=24t^2\sqrt{2}>33t^2$$

Do đó ta có $-16t^3-32t>55t^2$. Lại có $7t^2+3t+15>0$ nên $-16t^3-32t>55t^2>48t^2+3t+15$

Suy ra $16t^3+48t^2+35t+15<0$. Do vậy từ phương trình trên ta được $t=3$ hay ta có phương trình

$$x+\frac{2}{x}=3\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x\in\left\{1;2\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{1;2\right\}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\frac{\left(x-y\right)^2-1}{xy}-\frac{2\left(x+y-1\right)}{x+y}=-4\\ 4x^2+5y+\sqrt{x+y-1}+6\sqrt{x}=13\end{cases}$

- **Lời giải.** Điều kiện xác định của hệ phương trình là $xy\ne 0;x+y\ge 1$.

$$\frac{\left(x-y\right)^2-1}{xy}-\frac{2\left(x+y-1\right)}{x+y}=-4\Leftrightarrow\frac{\left(x-y\right)^2-1}{xy}+4-\frac{2\left(x+y-1\right)}{x+y}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{\left(x-y\right)^2-1+4xy}{xy}-\frac{2\left(x+y-1\right)}{x+y}=0\Leftrightarrow\frac{\left(x+y\right)^2-1}{xy}-\frac{2\left(x+y-1\right)}{x+y}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{\left(x+y-1\right)\left(x+y+1\right)}{xy}-\frac{2\left(x+y-1\right)}{x+y}=0\Leftrightarrow\left(x+y-1\right)\left(\frac{x+y+1}{xy}-\frac{2}{x+y}\right)=0$$

Đến đây ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Với $x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$, thế vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được

$$.4x^2+5\left(1-x\right)+6\sqrt{x}=13\Leftrightarrow 4x^2-5x+6\sqrt{x}-8=0$$

Đặt $t=\sqrt{x}>0$, khi đó phương trình trên được viết lại thành

$$4t^4-5t^2+6t-8=0\Leftrightarrow\left(4t^4-4t^2+1\right)-\left(t^2-6t+9\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(2t^2-1\right)^2-\left(t-3\right)^2=0\Leftrightarrow\left(2t^2-t+2\right)\left(2t^2+t-4\right)=0$$

Để ý rằng $t>0$ nên dễ thấy $2t^2-t+2>0$. Do đó từ phương trình trên ta được

$$2t^2+t-4=0\Leftrightarrow t\in\left\{\frac{-1-\sqrt{33}}{4};\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\right\}=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$$

Do $t>0$ nên ta được $t=\frac{\sqrt{33}-1}{4}$ là nghiệm của phương trình.

Đến đây cũng do $x^2=\frac{\sqrt{33}-1}{4}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{4}}=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{33}-1}}{2}$.

Đến đây ta được $\left(x;y\right)=\left(\frac{-\sqrt{\sqrt{33}-1}}{2};\frac{2+\sqrt{\sqrt{33}-1}}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{\sqrt{33}-1}}{2};\frac{2-\sqrt{\sqrt{33}-1}}{2}\right)$

+ Trường hợp 2. Với $\frac{x+y+1}{xy}-\frac{2}{x+y}=0\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2+x+y-2xy=0\Leftrightarrow x^2+y^2+x+y=0$.

Do $x+y\ge 1$ nên dễ thấy phương trình trên vô nghiệm.

Thay vào hệ phương trình ta được $\left(x;y\right)=\left(\frac{-\sqrt{\sqrt{33}-1}}{2};\frac{2+\sqrt{\sqrt{33}-1}}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{\sqrt{33}-1}}{2};\frac{2-\sqrt{\sqrt{33}-1}}{2}\right)$ là các nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Câu 3 (3.0 điểm).

a) Cho các đa thức $P\left(x\right)$ và $Q\left(x\right)$ thỏa mãn $P\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(Q\left(x\right)+Q\left(1-x\right)\right)$ với mọi x. Biết rằng hệ số của $P\left(x\right)$ là các số nguyên không âm và $P\left(0\right)=0$. Tính $P\left(3P\left(3\right)-P\left(2\right)\right)$.

- **Lời giải.**

Xét $x=0$ thì ta có $P\left(0\right)=0$, do đó suy ra $P\left(0\right)=\frac{1}{2}\left(Q\left(0\right)+Q\left(1\right)\right)=0$ hay $Q\left(0\right)+Q\left(1\right)=0$.

Xét $x=1$ thì ta có $P\left(1\right)=\frac{1}{2}\left(Q\left(1\right)+Q\left(0\right)\right)=0$.

Giả sử đa thức $P\left(x\right)$ có dạng $P\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$.

Là có $P\left(1\right)=a_n.1^n+a_{n-1}.1^{n-1}+a_{n-2}.1^{n-2}+...+a_1.1+a_0=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_1+a_0$.

Mà ta có $P\left(1\right)=0$ nên suy ra $a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_1+a_0=0$.

Do đa thức $P\left(x\right)$ có hệ số là các số nguyên không âm nên từ hệ thức trên ta suy ra được

$$a_n=a_{n-1}=a_{n-2}=...=a_1=a_0=0$$

Từ đó suy ra $P\left(x\right)=0$ với mọi x. Điều này dẫn đến $P\left(3P\left(3\right)-P\left(2\right)\right)=0$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn phương trình:

$$\left(x-y-1\right)\left(x+1-y\right)+6xy+y^2\left(2-x-y\right)=2\left(x+1\right)\left(y+1\right)$$

- **Lời giải.** Biến đổi tương đương phương trình đã cho ta được

$$\left(x-y-1\right)\left(x+1-y\right)+6xy+y^2\left(2-x-y\right)=2\left(x+1\right)\left(y+1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)^2-1+6xy+y^2\left(2-x-y\right)=2xy+2\left(x+y\right)+2$$
$$\Leftrightarrow \left(x+y\right)^2+y^2\left(2-x-y\right)=2\left(x+y\right)+3 \Leftrightarrow y^2\left(x+y-2\right)=\left(x+y\right)^2-2\left(x+y\right)-3$$

Đặt $a=x+y; b=y^2\left(a,b\in Z; b\ge 0\right)$. Khi đó phương trình trên được viết lại thành $b\left(a-2\right)=a^2-2a-3$.

+ Trường hợp 1. Với $a=2$, khi đó phương trình $b\left(a-2\right)=a^2-2a-3$ vô nghiệm.

+ Trường hợp 2. Với $a\ne 0$, khi đó phương trình được viết lại thành $b=\dfrac{a^2-2a-3}{a-2}=a-\dfrac{3}{a-2}$.

Do a và b là các số nguyên nên ta được $a-2\in\left\{-3;-1;1;3\right\}\Leftrightarrow a\in\left\{-1;1;3;5\right\}$.

Để ý rằng b là số chính phương nên ta được $\left(a;b\right)=\left(-1;0\right),\left(1;4\right),\left(3;0\right),\left(5;4\right)$.

Từ đó ta được các nghiệm của phương trình là $\left(x;y\right)=\left(-1;0\right),\left(-1;2\right)\left(3;-2\right),\left(3;0\right),\left(3;2\right),\left(7;-2\right)$.

Câu 4 (7.0 điểm). Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$, vẽ đường tròn $\left(O';R'\right)$ với $R'<R$ tiếp xúc với cạnh AD tại H, tiếp xúc với cạnh BC tại G và tiếp xúc trong với đường tròn $\left(O\right)$ tại M (M thuộc cung $\overset{\frown}{CD}$ không chứa điểm A). Vẽ đường thẳng tt' là tiếp tuyến chung tại M của hai đường tròn $\left(O;R\right)$ và $\left(O';R'\right)$ (tia Mt nằm trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng MA chứa điểm D).

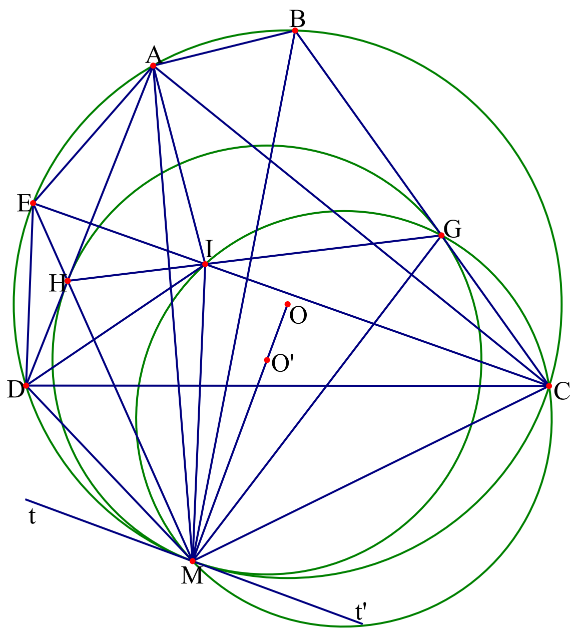
a) Chứng minh $\widehat{DHM}=\widehat{DMt}+\widehat{AMH}$ và MH, MG lần lượt là tia phân giác của các góc $\widehat{AMD},\widehat{BMC}$.

b) Đường thẳng MH cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại E khác M. Hai đường thẳng HG và CE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng $\widehat{EHI}=\widehat{EIM}$.

c) Chứng minh rằng MH đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD.

- **Lời giải.**

a) Chứng minh $\widehat{DHM}=\widehat{DMt}+\widehat{AMH}$ và MH, MG lần lượt là tia phân giác của các góc $\widehat{AMD},\widehat{BMC}$.



+ Do Mt là tiếp tuyến chung tại M của hai đường tròn $\left(O\right)$ và $\left(O'\right)$, lại do $\widehat{DHM}$ là góc ngoài tại H của tam giác AMH nên ta có

$$\begin{aligned}\widehat{DHM}&=\widehat{HAM}+\widehat{AMH}=\widehat{DAH}+\widehat{AMH}\\&=\widehat{DMt}+\widehat{AMH}\end{aligned}.$$

+ Theo trên ta có $\widehat{DHM}=\widehat{DMt}+\widehat{AMH}$ nên suy ra $\widehat{AMH}=\widehat{DHM}-\widehat{DMt}$. Mặt khác có AD tiếp xúc với đường tròn $\left(O'\right)$ tại H nên AD là tiếp tuyến với đường tròn $\left(O'\right)$ nên ta lại có

$$\widehat{DMH}=\widehat{HMt}-\widehat{DMt}=\widehat{HMG}-\widehat{DMt}=\widehat{DHM}-\widehat{DMt}$$

Kết hợp hai kết quả trên ta được $\widehat{AMH}=\widehat{DMH}$ nên MH là tia phân giác của góc $\widehat{AMD}$. Chứng minh hoàn toàn tương tự thì ta được MG là phân giác của góc $\widehat{BMC}$.

b) Chứng minh $\widehat{EHI}=\widehat{EIM}$.

Do tt' là tiếp tuyến chung tại M của (O) và (O') nên ta có $\widehat{ICM}=\widehat{ECM}=\widehat{EMt}=\widehat{HMt}=\widehat{HGM}=\widehat{IGM}$.
Suy ra tứ giác CGIM nội tiếp đường tròn.
Mà BC là tiếp tuyến với đường tròn (O') nên ta lại có $\widehat{MIC}=\widehat{MGC}=\widehat{MHG}$. Do vậy ta được $\widehat{EHI}=\widehat{EIM}$.

c) Chứng minh MH đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD.

Theo trên ta có $\widehat{EHI}=\widehat{EIM}$ nên hai tam giác EHI và EIM đồng dạng với nhau, suy ra ta được $\frac{EH}{EI}=\frac{EI}{EM}$ hay ta được $EI^2=EH.EM$. Do ME là phân giác của góc $\widehat{AMD}$ nên điểm E nằm chính giã cung nhỏ $\overset{\frown}{AD}$ của đường tròn (O), từ đó ta lại có $\widehat{EDH}=\widehat{EDA}=\widehat{DME}$ nên hai tam giác EHD và EDM đồng dạng với nhau, từ đó ta được $\frac{EH}{ED}=\frac{ED}{EM}$ hay $ED^2=EH.EM$. Đến đây ta suy ra được $EA=ED=EI$. Để ý đến tứ giác ACDE nội tiếp đường tròn ta có biến đổi góc

$$\begin{aligned}\widehat{AID}&=\widehat{AIE}+\widehat{EID}=\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{AEI}\right)+\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{DEI}\right)=180^0-\frac{1}{2}\left(\widehat{AEI}+\widehat{AEI}\right)\\&=180^0-\frac{1}{2}\widehat{AED}=180^0-\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{ACD}\right)=90^0+\frac{1}{2}\widehat{ACD}\end{aligned}$$

Mà lại có AE là đường phân giác của tam giác ACD, do đó I là giao điểm ba đường phân giác của tam giác ACD, suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD. Vậy MH đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD.

Câu 5 (2.0 điểm).

a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{c\left(c+a+3b\right)+c^2}+\frac{1}{a\left(a+b+3c\right)+a^2}+\frac{1}{b\left(b+c+3a\right)+b^2}\le\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

- **Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{1}{c\left(c+a+3b\right)+c^2}=\frac{1}{ac+2c^2+3bc}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2c^2}+\frac{1}{bc+ca}+\frac{1}{2bc}\right)\le\frac{1}{9}\left[\frac{1}{2c^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{1}{2bc}\right]$$

Để ý rằng $\frac{1}{ca}=\frac{1}{2}.2.\frac{1}{a}.\frac{1}{c}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)$ và $\frac{1}{bc}=\frac{1}{2}.2.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$ nên ta lại có

$$\frac{1}{18}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{2ac}+\frac{3}{2bc}\right)\le\frac{1}{18}\left[\frac{1}{c^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]=\frac{1}{18}\left(\frac{2}{c^2}+\frac{1}{4a^2}+\frac{3}{4b^2}\right)$$

Từ đó ta được $\frac{1}{c\left(c+a+3b\right)+c^2}\le\frac{1}{18}\left(\frac{2}{c^2}+\frac{1}{4a^2}+\frac{3}{4b^2}\right)$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{a\left(a+b+3c\right)+a^2} \le \frac{1}{18}\left(\frac{2}{a^2}+\frac{1}{4b^2}+\frac{3}{4c^2}\right);\frac{1}{b\left(b+c+3a\right)+b^2} \le \frac{1}{18}\left(\frac{2}{b^2}+\frac{1}{4c^2}+\frac{3}{4a^2}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều trên thì ta được

$$\frac{1}{c\left(c+a+3b\right)+c^2}+\frac{1}{a\left(a+b+3c\right)+a^2}+\frac{1}{b\left(b+c+3a\right)+b^2} \le \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

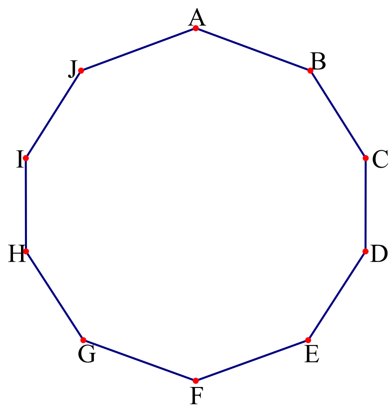
Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Cho một đa giác có 10 đỉnh như hình vẽ ở bên (bốn đỉnh A, B, C, D hoặc B, C, D, E hoặc C, D, E, F hoặc … hoặc J, A, B, C được gọi là bốn đỉnh liên tiếp của đa giác). Các đỉnh của đa giác được đánh số một cách tùy ý bởi các số nguyên thuộc tập hợp $\left\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\right\}$ (biết rằng mỗi đỉnh được đánh bởi một số và các số được đánh ở các đỉnh là khác nhau). Chứng minh rằng luôn tìm được bốn đỉnh liên tiếp của đa giác được đánh số mà tổng các số đó lớn hơn 21.

- **Lời giải.**

Với giải thiết của bài toán ta có các bộ bốn đỉnh liên tiếp của đa giác là

$$\left(A;B;C;D\right),\left(B;C;D;E\right),\left(C;D;E;F\right),\left(D;E;F;G\right),\left(E;F;G;H\right)$$
$$\left(F;G;H;I\right),\left(G;H;I;J\right),\left(H;I;J;A\right),\left(I;J;A;B\right),\left(J;A;B;C\right)$$



Trong 10 bộ bốn đỉnh liên tiếp trên thì mỗi đỉnh xuất hiện bốn lần.

Giả sử các số được điền vào các đỉnh A, B, C, …, I, J của đa giác lần lượt là $x_A;x_B;x_C;x_D;x_E;x_F;x_G;x_H;x_I;x_J$.

Đặt $T_1;T_2;T_3;T_4;T_5;T_6;T_7;T_8;T_9;T_{10}$ theo thứ tự là tổng các bốn số được ghi trên các đỉnh tương ứng với 10 bộ bốn đỉnh liên tiếp trên. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}&T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T_7+T_8+T_9+T_{10}\\&=4\left(x_A+x_B+x_C+x_D+x_E+x_F+x_G+x_H+x_I+x_J\right)=4\left(1+2+...+10\right)=4.55=210\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $T_1 \le T_2 \le T_3 \le T_4 \le T_5 \le T_6 \le T_7 \le T_8 \le T_9 \le T_{10}$.

Giả sử không tồn tại tổng nào trong các tổng $T_1;T_2;T_3;T_4;T_5;T_6;T_7;T_8;T_9;T_{10}$ lớn hơn 21.

Khi đó ta có $T_1 \le T_2 \le T_3 \le T_4 \le T_5 \le T_6 \le T_7 \le T_8 \le T_9 \le T_{10} \le 21$.

+ Nếu $T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5 < T_6 < T_7 < T_8 < T_9 < T_{10} < 21$ khi đó ta có

$$T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T_7+T_8+T_9+T_{10} < 10.21 = 210$$

Điều này mâu thuẫn với $T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T_7+T_8+T_9+T_{10} = 210$.

+ Nếu trong dãy bất đẳng thức trên tồn tại hai tổng bằng nhau, chẳng hạn $T_1 = T_2$ thì dễ thấy $x_A = x_E$, điều này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Như vậy điều giả sử trên là sai, tức là tồn tại ít nhất một tổng lớn hơn 21. Bài toán được chứng minh.

Lời giải trên chỉ mang tính tham khảo, không phải là đáp án chính của đề thi. Nếu có gì sai sót mong được thông cảm và góp ý. Nếu bạn đọc có những góp ý xin được chia sẻ về email:

nguyenkhanhdatchi@gmail.com