LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN IMO 2019

Trần Nam Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quang Hùng

1. Đề thi

1.1. Ngày thi thứ nhất (29/03/2019)

Bài 1 (7.0 *điểm*). Trong một quốc gia có $n \geq 2$ thành phố. Giữa hai thành phố bất kỳ có đường bay trực tiếp theo hai chiều. Người ta muốn cấp phép khai thác cho các đường bay trên cho một số hãng hàng không với các điều kiện sau đây:

i) Mỗi đường bay chỉ được cấp phép cho một hãng hàng không duy nhất.

ii) Di chuyển đường bay của một hãng hàng không tùy ý, người ta có thể đi từ một thành phố bất kỳ tới các thành phố còn lại.

Hỏi có thể cấp phép cho tối đa bao nhiêu hãng hàng không?

Bài 2 (7.0 *điểm*). Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng đa thức

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k} x^k (x-1)^{n-k}$$

có đúng n nghiệm thực phân biệt.

Bài 3 (7.0 *điểm*). Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp trong đường tròn (O) có M là trung điểm của cạnh BC, trực tâm H. Gọi D là điểm thuộc tia đối của tia HA sao cho $DM = \frac{1}{2}BC$ và D' là điểm đối xứng với D qua BC. Giả sử đường thẳng AO cắt đường thẳng MD tại X.

a) Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua trung điểm của đoạn $D'X$.

b) Định nghĩa các điểm E, F tương tự điểm D; định nghĩa các điểm Y, Z tương tự điểm X. Gọi S là giao điểm hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C, và G là hình chiếu của trung điểm đoạn AS lên đường thẳng AO. Chứng minh rằng tồn tại một điểm có cùng phương tích với cả bốn đường tròn (SGO), (BYE), (CFZ) và (O).

1.2. Ngày thi thứ hai (30/03/2019)

Bài 4 (7.0 *điểm*). Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn

$$2^x + 1 = 7^y + 2^z.$$

Bài 5 (7.0 *điểm*). Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Giả sử đường thẳng BI cắt đường thẳng AC ở E và đường thẳng CI cắt đường thẳng AB ở F. Đường tròn qua E, tiếp xúc với đường thẳng OB tại B cắt đường tròn (O) tại M. Đường tròn qua F tiếp xúc với đường thẳng OC tại C cắt đường tròn (O) tại N. Các đường thẳng ME, NF cắt lại đường tròn (O) lần lượt tại P, Q. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng EF và BC. Đường thẳng PQ cắt các các đường thẳng BC, EF lần lượt tại G, H. Chứng minh rằng đường trung tuyến qua G của tam giác GHK vuông góc với đường thẳng OI.

Bài 6 (7.0 *điểm*). Một con bọ ở vị trí có tọa độ $x = 1$ trên trục số thực. Ở mỗi bước, từ vị trí có tọa độ $x = a$, con bọ có thể nhảy đến các vị trí có tọa độ $x = a + 2$ hoặc $x = \frac{a}{2}$. Chứng minh rằng có tất cả $F_{n+4} - (n + 4)$ vị trí khác nhau (kể cả vị trí ban đầu) mà con bọ có thể nhảy đến với không quá n bước nhảy, trong đó (F_n) là dãy Fibonacci được xác định bởi $F_0 = F_1 = 1$ và $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ với mọi $n \geq 2$.

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (7.0 *điểm*). Trong một quốc gia có $n \geq 2$ thành phố. Giữa hai thành phố bất kỳ có đường bay trực tiếp theo hai chiều. Người ta muốn cấp phép khai thác cho các đường bay trên cho một số hãng hàng không với các điều kiện sau đây:

i) Mỗi đường bay chỉ được cấp phép cho một hãng hàng không duy nhất.

ii) Di chuyển đường bay của một hãng hàng không tùy ý, người ta có thể đi từ một thành phố bất kỳ tới các thành phố còn lại.

Hỏi có thể cấp phép cho tối đa bao nhiêu hãng hàng không?

Lời giải. Ta chứng minh số hãng tối đa mà ta có thể cấp phép là $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Trước hết ta chứng minh nhận xét sau.

Nhận xét. *Để thỏa mãn điều kiện* ii) (*ta gọi điều kiện này là điều kiện hãng hàng không kết nối n thành phố*), *hãng hàng không phải có ít nhất $n - 1$ đường bay.*

Chứng minh. Ta chứng minh nhận xét bằng quy nạp theo n. Với $n = 2$, điều này là hiển nhiên. Giả sử mệnh đề đã đúng đến $n - 1$. Xét n thành phố. Mỗi một thành phố hiển nhiên phải có ít nhất một đường bay. Nếu mỗi thành phố đều có hai đường bay trở lên thì số đường bay sẽ $\geq \frac{2n}{2} = n$. Nếu có một thành phố chỉ có một đường bay thì ta bỏ thành phố đó và đường bay đến nó đi. Còn lại $n - 1$ thành phố. Từ một thành phố bất kỳ trong $n - 1$ thành phố còn lại vẫn phải đi được đến tất cả các thành phố khác. Do đó theo giả thiết quy nạp, có ít nhất $n - 2$ đường bay. Quay trở lại n thành phố ban đầu, ta phải có ít nhất $n - 1$ đường bay. ■

Sử dụng nhận xét này, vì số đường bay của n thành phố là $\frac{n(n-1)}{2}$ nên số hãng hàng không tối đa có thể được cấp phép không vượt quá $\frac{n(n-1)}{2} \div (n - 1) = \frac{n}{2}$. Từ đó số hãng hàng không tối đa có thể được cấp phép không vượt quá $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Tiếp theo, ta chứng minh giá trị lớn nhất này có thể đạt được. Trước hết ta chứng minh với $n = 2k$ thì ta có thể cấp phép cho k hãng hàng không. Ta chứng minh bằng quy nạp theo k.

Với $k = 1$ bài toán là hiển nhiên. Giả sử ta đã có cách cấp phép cho k hãng hàng không kết nối $2k$ thành phố. Xét $2k + 2$ thành phố. Xét hai thành phố A, B và $2k$ thành phố còn lại. Theo giả thiết quy nạp, ta có thể cấp phép cho k hãng hàng không kết nối $2k$ thành phố. Ta chia $2k$ thành phố này thành hai nhóm, nhóm 1 gồm k thành phố, nhóm 2 gồm k thành phố. Ta cấp phép các đường bay từ A đến k thành phố nhóm 1 cho k hãng hàng đã được cấp phép, mỗi hãng 1 đường bay. Tương tự với các đường bay từ B đến k thành phố nhóm 2. Bằng cách này, A và B đã được kết nối với hệ thống cũ và các hãng cũ thỏa mãn điều kiện. Bây giờ ta cấp phép cho hãng hàng không mới tất cả các đường bay từ A đến các thành phố nhóm 2, từ B đến các thành phố nhóm 1 và từ A đến B thì hãng mới này cũng kết nối được đến tất cả các thành phố (nhờ "cầu" AB). Phép quy nạp hoàn tất và mệnh đề được chứng minh cho $n = 2k$.

Với $n = 2k + 1$, mệnh đề là khá hiển nhiên: ta cấp phép cho k hãng hàng không kết nối $2k$ thành phố. Sau đó ta cấp phép các đường bay nối từ thành phố thứ $2k + 1$ đến $2k$ thành phố cho k hãng hàng không này, mỗi hãng ít nhất một đường bay thì k hãng hàng không nói trên sẽ kết nối $2k + 1$ thành phố.

Vậy ta có thể cấp phép cho tối đa $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ hãng hàng không. □

Bình luận. Đây là một bài toán cực trị tổ hợp khá đơn giản. Ta có thể sử dụng ngôn ngữ đồ thị để trình bày lời giải gọn gàng và súc tích hơn. Khi đó thuật ngữ kết nối sẽ thành liên thông, bổ đề sẽ được phát biểu là một đồ thị khung liên thông n đỉnh có ít nhất $n - 1$ cạnh.

Ngoài cách xây dựng ví dụ bằng thuật toán như ở trên, chúng ta còn có thể có những cách xây dựng khác, chẳng hạn phân đồ thị đầy đủ K_n thành đường đi Hamilton (cách này khá khó, đặc biệt là trường hợp n chẵn). Bài toán này lúc đó sẽ có một cách phát biểu khác khá thú vị như sau: *Có $2k$ người thuê $2k$ phòng đánh số từ 1 đến $2k$. Sau mỗi một đêm họ lại đổi phòng sao cho hai người bất kỳ cạnh phòng nhau không quá một lần. Chứng minh rằng có cách sắp xếp để họ ở được k đêm.* Chẳng hạn với $k = 5$ ta có cách sắp xếp sau

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	10	4	9	3	8	2	7	1	6

Bài 2 (7.0 *điểm*). Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng đa thức

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k} x^k (x-1)^{n-k}$$

có đúng n nghiệm thực phân biệt.

Lời giải. Gọi x_0 là một nghiệm thực bất kỳ (nếu có) của $P_n(x)$. Nếu $x_0 \geq 1$ thì hiển nhiên $P_n(x_0) > 0$. Còn nếu $x_0 \leq 0$, đặt $x_0 = -y$ $(y \geq 0)$, ta có

$$P_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k} (-y)^k (-y-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} 2^k C_{2n}^{2k} y^k (y+1)^{n-k} \neq 0.$$

Do đó $x_0 \in (0, 1)$. Kết quả này chứng tỏ các nghiệm thực nếu có của $P_n(x)$ đều thuộc $(0, 1)$. Với $x \in (0, 1)$, ta có

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} \left(\sqrt{2x}\right)^{2k} \left(\mathrm{i}\sqrt{1-x}\right)^{2n-2k}.$$

Đặt

$$A = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} \left(\sqrt{2x}\right)^{2k} \left(\mathrm{i}\sqrt{1-x}\right)^{2n-2k},$$
$$B = \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1} \left(\sqrt{2x}\right)^{2k-1} \left(\mathrm{i}\sqrt{1-x}\right)^{2n-2k+1}.$$

Để ý rằng

$$A + B = \left(\sqrt{2x} + \mathrm{i}\sqrt{1-x}\right)^{2n}, \quad A - B = \left(\sqrt{2x} - \mathrm{i}\sqrt{1-x}\right)^{2n},$$

ta có

$$2P_n(x) = \left(\sqrt{2x} + \mathrm{i}\sqrt{1-x}\right)^{2n} + \left(\sqrt{2x} - \mathrm{i}\sqrt{1-x}\right)^{2n}.$$

Đặt $r = \sqrt{1+x}$, $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2x}{1+x}}$ và $\sin\varphi = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $\left(\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Chú ý rằng, với mỗi $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ta tìm được tương ứng duy nhất một giá trị $x \in (0, 1)$ thỏa mãn $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2x}{1+x}}$ và $\sin\varphi = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Sử dụng công thức De Moivre, ta có

$$\begin{aligned} 2P_n(x) &= r^{2n}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^{2n} + r^{2n}(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)^{2n} \\ &= r^{2n}\left[\cos(2n\varphi) + \mathrm{i}\sin(2n\varphi)\right] + r^{2n}\left[\cos(2n\varphi) - \mathrm{i}\sin(2n\varphi)\right] \\ &= 2r^{2n}\cos(2n\varphi). \end{aligned}$$

Do đó $P_n(x) = 0$ khi và chỉ khi $\cos(2n\varphi) = 0$, tức $\varphi = \frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}$ với $k \in \mathbb{Z}$. Do $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên $0 \le k \le n-1$. Từ đây, ta tìm được n giá trị φ phân biệt thỏa mãn $\cos(2n\varphi) = 0$. Vậy, đa thức $P_n(x)$ có đúng n nghiệm thực phân biệt. □

Bình luận. Dạng phát biểu của đa thức $P_n(x)$ gợi chúng ta nghĩ ngay đến khai triển nhị thức Newton $(a+b)^{2n}$ và $(a-b)^{2n}$. Tuy nhiên, để đưa được các số mũ về tương ứng với “chập” $2k$ trong C_{2n}^{2k}, ta cần đưa các số x và $x-1$ vào căn bậc hai. Đến đây, với nhận xét nghiệm nếu có của đa thức phải thuộc $(0, 1)$ có thể nghĩ ngay đến việc lợi dụng số phức để giúp thu gọn $P_n(x)$ như đã trình bày trong lời giải trên.

Ý tưởng ứng dụng số phức vào giải toán đã không còn mới và vẫn thường xuyên xuất hiện trong đã đề thi Olympic. Dưới đây là một số bài toán khác có thể sử dụng số phức như một công cụ đắc lực để tìm hướng giải.

Bài toán 1. *Tính tổng*

$$\sum_{k=0}^{3n-1} (-3)^k C_{6n}^{2k+1}.$$

Bài toán 2. (IMO, 1974) *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, tổng*

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k}$$

luôn không chia hết cho 5.

Bài toán 3. (Romanian IMO TST, 2013) *Cho số nguyên $n \geq 2$, gọi a_n, b_n và c_n là các số nguyên thỏa mãn*

$$\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)^n = a_n + b_n \sqrt[3]{2} + c_n \sqrt[3]{4}.$$

Chứng minh rằng $c_n \equiv 1 \pmod 3$ khi và chỉ khi $n \equiv 2 \pmod 3$.

Bài toán 4. (Trường Đông, 2015) *Cho dãy đa thức $\{P_n(x)\}$ được xác định bởi $P_0(x) = 2$, $P_1(x) = x$ và $P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x)$. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, đa thức $P_n(x)$ có đúng n nghiệm thực.*

Bài 3 (7.0 *điểm*). Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp trong đường tròn (O) có M là trung điểm của cạnh BC, trực tâm H. Gọi D là điểm thuộc tia đối của tia HA sao cho $DM = \frac{1}{2}BC$ và D' là điểm đối xứng với D qua BC. Giả sử đường thẳng AO cắt đường thẳng MD tại X.

a) Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua trung điểm của đoạn $D'X$.

b) Định nghĩa các điểm E, F tương tự điểm D; định nghĩa các điểm Y, Z tương tự điểm X. Gọi S là giao điểm hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C, và G là hình chiếu của trung điểm đoạn AS lên đường thẳng AO. Chứng minh rằng tồn tại một điểm có cùng phương tích với cả bốn đường tròn (SGO), (BYE), (CFZ) và (O).

Lời giải. a) Gọi AU là đường cao và H là trực tâm tam giác ABC. Ta có

$$UD'^2 = UD^2 = \overline{UB} \cdot \overline{UC} = \overline{UH} \cdot \overline{UA}.$$

Do đó $(DD', HA) = -1$. Suy ra

$$\overline{AH} \cdot \overline{AU} = \overline{AD'} \cdot \overline{AD} \Leftrightarrow \frac{\overline{OM}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD'}}{2\overline{AU}}. \qquad (1)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác $XD'D$, ta thấy AM chia đôi $D'X$ khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{MX}}{\overline{DX}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AD'} + \overline{AD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{MO}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD'}}{2\overline{AU}}.$$

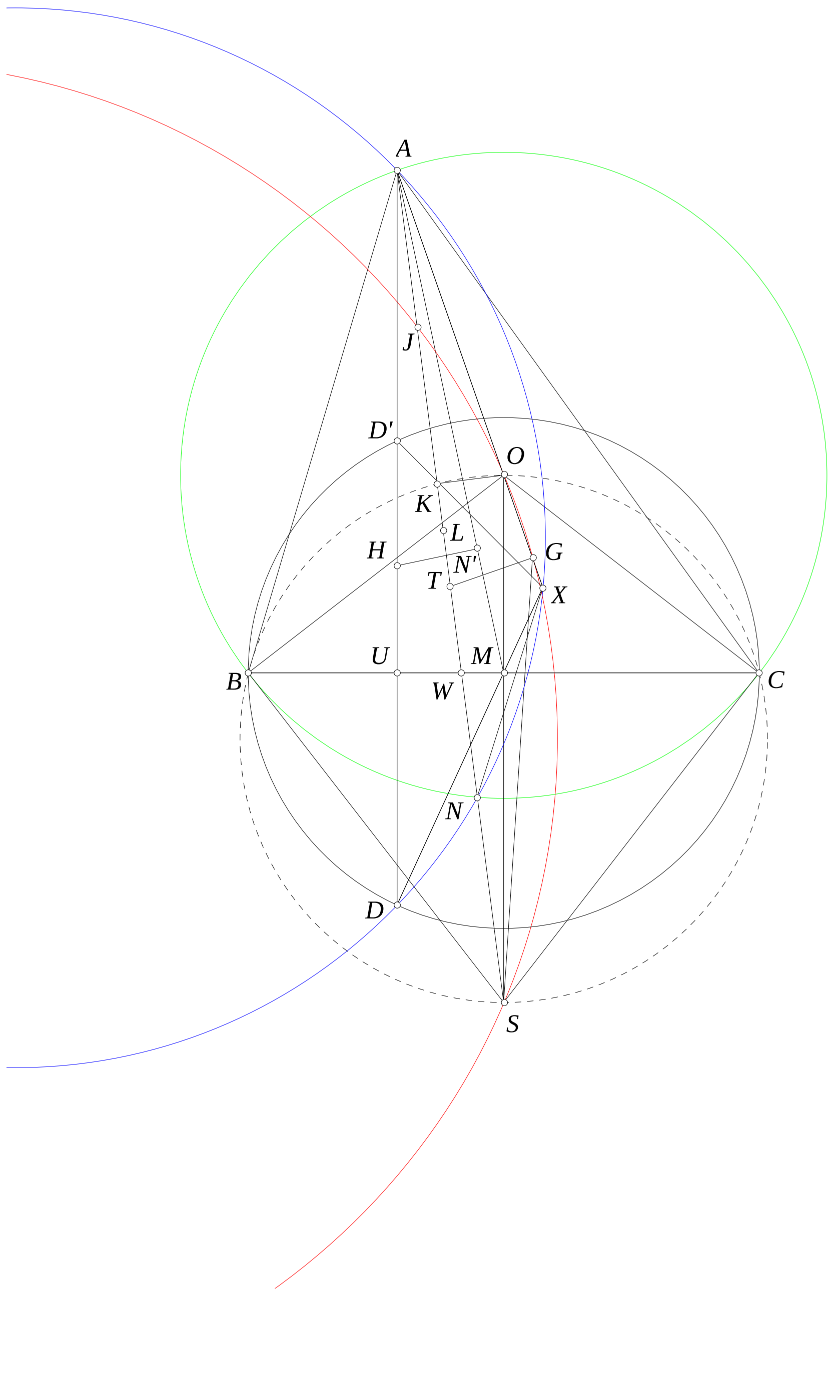
Đẳng thức cuối đúng theo (1).

b) Gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng AS với đường tròn (O) là N. Gọi N' là điểm đối xứng với N qua BC. Dễ thấy N' là hình chiếu của H lên đường đối trung AN. Từ đó

$$\overline{MN'} \cdot \overline{MA} = MB^2 = MD'^2.$$

Ta suy ra
$$\angle NAX = \angle MAD' = \angle MD'N' = \angle MDX.$$
Do đó đường tròn (ADX) đi qua N. Bây giờ, gọi L là điểm Lemoine, điểm đồng quy của ba đường đối trung thì hiển nhiên L thuộc đường thẳng AS là trục đẳng phương của hai đường (O) và (ADX). Tương tự L cũng nằm trên trục đẳng phương của (O) với (BEY) và (CFZ). Do đó L có cùng phương tích với ba đường tròn (BYE), (CYF) và (O).

Để kết thúc phép chứng minh, ta sẽ chứng minh L cũng nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (OGS) và (O). Thật vậy, gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng AS và đường tròn (OGS) là J. Gọi K là hình chiếu của O lên đường thẳng AS thì K là trung điểm của đoạn AN. Dễ thấy $OGTK$ nội tiếp, do đó
$$\overline{AJ} \cdot \overline{AS} = \overline{AO} \cdot \overline{AG} = \overline{AK} \cdot \overline{AT}.$$
Từ đây, ta thu được $\overline{AJ} = \frac{1}{2}\overline{AK}$ hay J là trung điểm AK.



Sử dụng chứng minh tương tự trong https://diendantoanhoc.net/topic/159439-vmfs-marathon-hinh-hoc-olympic/page-13. Gọi W là giao điểm của các đường thẳng AS và BC. Ta có $(AW, SL) = -1$, suy ra $(AS, WL) = 2$ hay

$$\frac{\overline{WA}}{\overline{WS}} = 2 \cdot \frac{\overline{LA}}{\overline{LS}}. \tag{2}$$

Mặt khác, ta cũng có $(AN, SW) = -1$ nên $(AS, NW) = 2$. Do đó

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NS}} = 2 \cdot \frac{\overline{WA}}{\overline{WS}}. \tag{3}$$

Từ (2) và (3), ta thu được

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NS}} = 4 \cdot \frac{\overline{LA}}{\overline{LS}}$$

hay $(AS, NL) = 4$. Từ đó, ta có $(AN, SL) = -3$. (4)

Mặt khác, chú ý rằng L có cùng phương tích với hai đường tròn (OGS) và (O) khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
\overline{LS} \cdot \overline{LJ} = \overline{LA} \cdot \overline{LN} &\Leftrightarrow \overline{LS} \cdot \frac{\overline{LA} + \overline{LK}}{2} = \overline{LA} \cdot \overline{LN} \\
&\Leftrightarrow \overline{LS} \cdot \left(\overline{LA} + \frac{\overline{LA} + \overline{LN}}{2}\right) = 2\overline{LA} \cdot \overline{LN} \\
&\Leftrightarrow \overline{LS} \cdot \left(3\overline{LA} + \overline{LN}\right) = 4\overline{LA} \cdot \overline{LN} \\
&\Leftrightarrow 3\overline{LA} \cdot \overline{LS} - 3\overline{LA} \cdot \overline{LN} = \overline{LA} \cdot \overline{LN} - \overline{LN} \cdot \overline{LS} \\
&\Leftrightarrow 3\overline{LA} \cdot \overline{NS} = \overline{LN} \cdot \overline{SA} \\
&\Leftrightarrow \frac{\overline{AS}}{\overline{AL}} \div \frac{\overline{NS}}{\overline{NL}} = -3.
\end{aligned}$$

Đẳng thức cuối đúng theo (4). Phép chứng minh được hoàn tất. □

Bình luận. Có thể giải bài toán gốc mà không cần dựng chi tiết các đường tròn (BEY) và (CFZ) để đỡ gây rối hình. Bài toán này hai ý đều đẹp, tuy nhiên khi bình tĩnh để ý thì ý **b)** chỉ khó vẽ hình còn lời giải như trên khá tự nhiên.

Với cách chứng minh trên, ta có thể mở rộng cả hai ý của bài toán và lời giải các bài toán tổng quát gần như tương tự.

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC. Đường tròn (ω) đi qua hai điểm B, C cắt lại đường thẳng CA, AB tại E, F. Gọi H là giao điểm của các đường thẳng BE và CF. Đường thẳng AH cắt đường tròn (ω) lần lượt tại P, Q với P và A khác phía so với BC. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Trên đường thẳng PM, lấy điểm R sao cho AP và AR đẳng giác trong $\angle BAC$. Chứng minh rằng*

a) *Đường thẳng AM chia đôi đoạn QR.*

b) *Đường tròn (APR) luôn đi qua một điểm cố định khác A khi (ω) thay đổi.*

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC với P là điểm bất kỳ. PQ là đường kính của đường tròn (PBC). Đường thẳng AQ cắt đường thẳng BC tại D. Gọi R là hình chiếu của trung điểm AQ lên đường thẳng AP. Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn (ABC) và (PQR) đi qua điểm liên hợp điều hòa của Q đối với AD.*

Trong đó, kết quả bài toán tổng quát thứ hai có thể dẫn tới việc mở rộng đường thẳng Schwatt rất nổi tiếng (tham khảo thêm tại https://artofproblemsolving.com/community/c6h621222p3712825).

Bài 4 (7.0 *điểm*)**.** Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn

$$2^x + 1 = 7^y + 2^z.$$

Lời giải. Từ phương trình đã cho, dễ thấy $x > z$. Khi đó, phương trình được viết lại thành

$$2^z(2^{x-z} - 1) = 7^y - 1.$$

Xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1: y lẻ.** Khi đó, $7^y - 1 \equiv 2 \pmod 4$, do đó $2^z = 2$, tức $z = 1$. Thay trở lại phương trình, ta được
$$2^x = 7^y + 1.$$
Mặt khác, ta lại có $7^y + 1 = 8(7^{y-1} - 7^{y-2} + \cdots - 7 + 1)$ và $7^{y-1} - 7^{y-2} + \cdots - 7 + 1$ lẻ (do y lẻ) nên $2^x = 8$, tức $x = 3$. Từ đó ta có $y = 1$.

- **Trường hợp 2: y chẵn nhưng không chia hết cho 4.** Đặt $y = 4k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$. Ta có
$$7^y - 1 = 7^{4k+2} - 1 = (7^{2k+1} - 1)(7^{2k+1} + 1).$$
Lý luận tương tự trường hợp trên, ta thấy $7^{2k+1} - 1$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4, $7^{2k+1} + 1$ chia hết cho 8 nhưng không chia hết cho 16. Do đó $7^y - 1$ chia hết cho 16 nhưng không chia hết cho 32. Suy ra $z = 4$. Thay trở lại phương trình, ta được
$$2^x = 7^{4k+2} + 15.$$
Do $7^{4k+2} + 15 \equiv 1 \pmod 3$ nên $2^x \equiv 1 \pmod 3$, suy ra x chẵn. Đặt $x = 2\ell$ với $\ell \in \mathbb{Z}^+$, $\ell > 2$ (do $x > z = 4$), ta được
$$15 = 2^{2\ell} - 7^{4k+2} = (2^\ell - 7^{2k+1})(2^\ell + 7^{2k+1}).$$
Từ đó, dễ dàng tìm được $\ell = 3$ và $k = 0$, tức $x = 6$ và $y = 2$.

- **Trường hợp 3: y chia hết cho 4.** Khi đó, ta có $7^y - 1$ chia hết cho $7^4 - 1 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$. Suy ra $2^{x-z} - 1$ chia hết cho 25, tức $x - z$ chia hết cho 20 (vì $\mathrm{ord}_{25}(2) = 20$). Từ đây, ta có $2^{x-z} - 1$ chia hết cho $2^{10} - 1 = 3 \times 11 \times 31$, suy ra $7^y \equiv 1 \pmod{31}$.

  Chú ý rằng $\mathrm{ord}_{31}(7) = 15$ nên ta có y chia hết cho 15. Suy ra y chia hết cho 60. Từ đây, với chú ý rằng $7^6 \equiv 1 \pmod 9$, ta suy ra $7^y - 1$ chia hết cho 9. Do đó $2^{x-z} - 1$ chia hết cho 9, suy ra $x - z$ chia hết cho 6 (do $\mathrm{ord}_9(2) = 6$). Tuy nhiên, điều này dẫn đến $2^{x-z} - 1$ chia hết cho 7 (do $2^6 \equiv 1 \pmod 7$), mâu thuẫn vì $7^y - 1$ không chia hết cho 7.

Vậy có hai bộ số (x, y, z) thỏa mãn yêu cầu là $(3, 1, 1)$ và $(6, 2, 4)$. □

Bình luận. Để giải bài toán này, ta chỉ cần chia trường hợp để xét đồng dư thích hợp. Dưới đây là một số bài toán tương tự.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn*

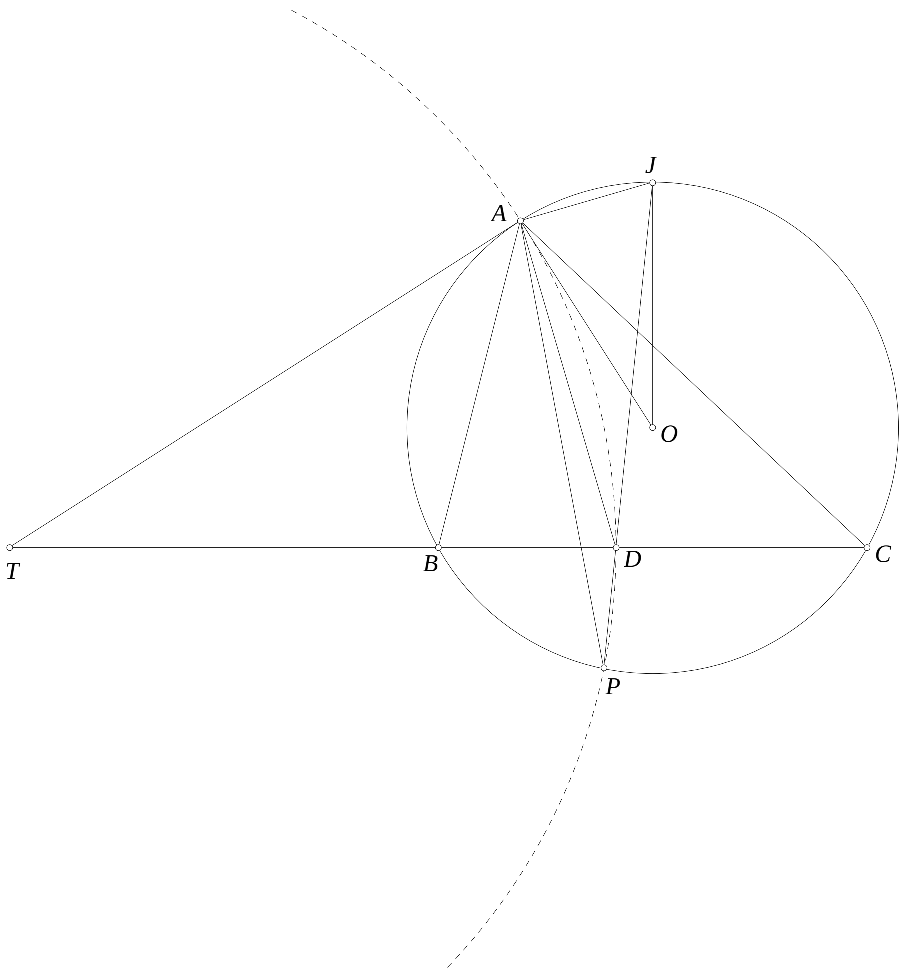
$$7^x + 13^y = 2^z.$$

Bài toán 2. (Vietnam TST, 2011) *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho biểu thức $A = 2^{n+2}(2^n - 1) - 8 \cdot 3^n + 1$ có giá trị là số chính phương.*

Bài 5 (7.0 *điểm*). Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Giả sử đường thẳng BI cắt đường thẳng AC ở E và đường thẳng CI cắt đường thẳng AB ở F. Đường tròn qua E, tiếp xúc với đường thẳng OB tại B cắt đường tròn (O) tại M. Đường tròn qua F tiếp xúc với đường thẳng OC tại C cắt đường tròn (O) tại N. Các đường thẳng ME, NF cắt lại đường tròn (O) lần lượt tại P, Q. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng EF và BC. Đường thẳng PQ cắt các các đường thẳng BC, EF lần lượt tại G, H. Chứng minh rằng đường trung tuyến qua G của tam giác GHK vuông góc với đường thẳng OI.

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh các bổ đề sau

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O), phân giác AD. Đường tròn qua A, D và tiếp xúc với đường thẳng OA cắt lại đường tròn (O) tại P. Khi đó đường thẳng PD đi qua trung điểm cung BC chứa A của đường tròn (O).*



Chứng minh. Gọi giao điểm của tiếp tuyến qua A của đường tròn (O) với đường thẳng BC là T. Dễ thấy T là tâm đường tròn đi qua A, D và tiếp xúc với đường thẳng AO. Gọi J là giao điểm thứ hai của đường thẳng PD với đường tròn (O). Khi đó, ta có

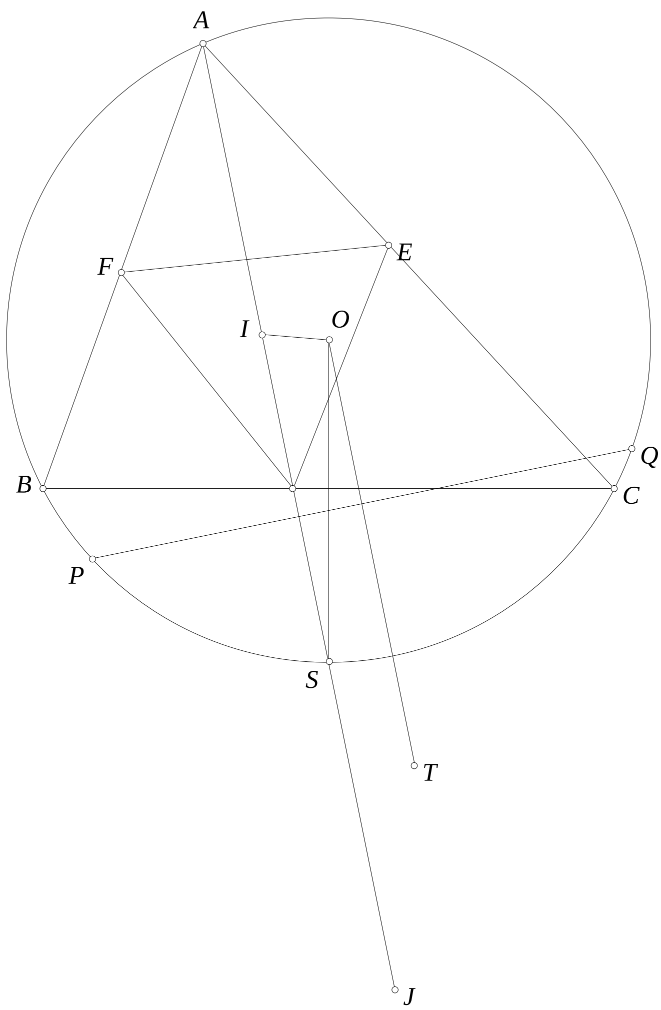
$$\angle T = 2\angle APD = \angle O.$$

Từ đó suy ra hai tam giác cân OAJ và TAD đồng dạng. Lại có $TA \perp OA$ nên $OJ \perp TD$, suy ra $OJ \perp BC$. Vậy J là trung điểm cung BC chứa A của đường tròn (O). ■

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC có phân giác BE, CF, tâm ngoại tiếp O, tâm đường tròn bàng tiếp góc A là J. Khi đó $OJ \perp EF$.*

Chứng minh. Có thể tham khảo trong: Trần Quang Hùng, *Một số bổ đề quen thuộc trong các kỳ thi Olympic*, bài giảng trường hè cho giáo viên năm 2016. ■

Trở lại bài toán. Theo bổ đề 1, ta có P, Q lần lượt là trung điểm các cung AB, AC lần lượt chứa C và B. Gọi S là giao điểm thứ hai của đường thẳng AI và (O).



Ta cần chứng minh đường thẳng qua GU vuông góc OI chia đôi đoạn HK. Qua G dựng đường thẳng GV song song với HK thì điều phải chứng minh tương đương

$$G(HK, UV) = -1.$$

Dựng chùm trực giao tâm O thì

$$OT \perp PQ \equiv GH, \quad OS \perp BC \equiv GK, \quad OI \perp GU, \quad OJ \perp EF \equiv HK \parallel GV.$$

Do S là trung điểm của đoạn IJ nên

$$G(HK, UV) = O(JI, ST) = -1.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Bình luận. Bài toán này vẫn là ý tưởng sử dụng hàng điểm điều hòa như ở ngày 1. Có lẽ tác giả bài toán nãy đã xuất phát từ chùm điều hòa cơ bản $O(JI, ST) = -1$, sau đó trực giao hóa chùm này thông qua bổ đề $OJ \perp EF$, ta thu được bài toán trên. Với cách làm này bài toán có thể mở rộng nhiều kiểu khác nhau nên việc mở rộng bài toán cũng không cần thiết.

Bài 6 (7.0 *điểm*). Một con bọ ở vị trí có tọa độ $x = 1$ trên trục số thực. Ở mỗi bước, từ vị trí có tọa độ $x = a$, con bọ có thể nhảy đến các vị trí có tọa độ $x = a + 2$ hoặc $x = \frac{a}{2}$. Chứng minh rằng có tất cả $F_{n+4} - (n + 4)$ vị trí khác nhau (kể cả vị trí ban đầu) mà con bọ có thể nhảy đến với không quá n bước nhảy, trong đó (F_n) là dãy Fibonacci được xác định bởi $F_0 = F_1 = 1$ và $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ với mọi $n \geq 2$.

Lời giải. Ta chứng minh rằng với đúng n bước nhảy, ta có thể đến được $F_{n+2} - 1$ điểm khác nhau mà trước đó con bọ chưa hề nhảy tới với số bước nhảy ít hơn (điểm mới).

Mỗi bước nhảy $a \to a + 2$, ta ký hiệu là P; mỗi bước nhảy $a \to \frac{a}{2}$, ta ký hiệu là D. Một dãy các bước nhảy được ghi lại thành một bộ lệnh gồm các lệnh D và P. Vì $\frac{a+2+2}{2} = \frac{a}{2} + 2$ nên ta có thể thay bộ lệnh PPD bằng bộ lệnh DP. Sau các lần thay như vậy, các bộ lệnh chỉ còn có thể có dạng $PP\ldots P$ (toàn P) hoặc $***DPP\ldots P$, trong đó trong $***$ không có hai chữ P liền nhau.

Ta chứng minh hai lệnh khác nhau ở dạng "rút gọn" này sẽ dẫn ta đến hai điểm khác nhau trên trục số. Xét bộ lệnh có n lệnh, trong đó có k lệnh D và $n - k$ lệnh P. Gọi i_1 là số các lệnh P từ đầu cho đến lệnh D đầu tiên, i_2 là số các lệnh P từ lệnh D thứ nhất đến lệnh D thứ hai, $\ldots$, i_{k+1} là số các lệnh P từ lệnh D thứ k đến cuối. Khi thực hiện các lệnh này, con bọ sẽ nhảy đến điểm

$$x = \frac{1}{2^k} + \frac{2i_1}{2^k} + \frac{2i_2}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{2i_k}{2} + 2i_{k+1} = \frac{1}{2^k} + \frac{i_1}{2^{k-1}} + \frac{i_2}{2^{k-2}} + \cdots + i_k + 2i_{k+1}.$$

Vì $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{0, 1\}$ nên theo tính chất hệ nhị phân, hai bộ lệnh khác nhau sẽ dẫn con bọ đến hai điểm khác nhau.

Tiếp theo, ta chứng minh với mọi n nguyên dương, có đúng $F_{n+2} - 1$ bộ lệnh độ dài n ở dạng rút gọn. Ta sử dụng bổ đề sau

Bổ đề. *Số xâu nhị phân độ dài n không chứa hai bit* 1 *đứng cạnh nhau bằng* F_{n+1}.

Chứng minh. Khi $n = 1$, mệnh đề đúng. Có hai xâu nhị phân độ dài 1 là xâu "0" và xâu "1". Xét xâu nhị phân độ dài $n + 1$ không chứa hai bit 1 cạnh nhau. Xâu đó có thể được bắt đầu bằng 0, sau đó là một xâu độ dài n không chứa hai bit 1 cạnh nhau, hoặc bắt đầu bằng 10 sau đó là một xâu độ dài $n - 1$ không chứa hai bit 1 cạnh nhau. Do đó, nếu gọi G_n là số xâu nhị phân độ dài n không chứa hai bit 1 đứng cạnh nhau thì ta có $G_1 = 2$, $G_2 = 3$ và $G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$. Từ đó so sánh với dãy Fibonacci suy ra $G_n = F_{n+1}$. ■

Quay trở lại bài toán, bộ lệnh độ dài n ở dạng rút gọn có các loại:

- $PP\ldots P$ (toàn P): 1.
- $DPP\ldots P$ (một lệnh D và $n-1$ lệnh P): 1.
- $***DPP\ldots P$ ($***$ là xâu nhị phân độ dài k, $1 \le k \le n-1$, không chứa hai bit 1 cạnh nhau): $F_2 + F_3 + \cdots + F_n$.

Vậy số bộ lệnh độ dài n ở dạng rút gọn bằng

$$1 + 1 + F_2 + \cdots + F_n = F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Cuối cùng, với không quá n nước đi, số điểm khác nhau mà con bọ có thể đi đến bằng

$$\begin{aligned} N &= 1 + F_3 - 1 + F_4 - 1 + \cdots + F_{n+2} - 1 \\ &= F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{n+2} - n - F_1 - F_2 \\ &= F_{n+4} - (n+4). \end{aligned}$$

Đó chính là điều phải chứng minh. □

Bình luận. Đây là một bài toán khá kỹ thuật. Ý tưởng sử dụng bộ lệnh để mô tả các bước đi của con bọ là khá tự nhiên, tuy nhiên bước chứng minh các bộ lệnh khác nhau (ở dạng rút gọn) dẫn đến các điểm khác nhau là không đơn giản. Nếu ta giới hạn trong các bộ lệnh gồm n lệnh thì cũng có thể chứng minh được, nhưng khó và quan trọng là tiếp theo vẫn chưa áp dụng được (vì có thể trùng với kết quả của các bộ lệnh ngắn hơn).

Bài này rõ ràng liên quan đến hệ nhị phân, do đó cũng có hướng giải sử dụng cách viết nhị nhân của số thực. Cụ thể có thể đặt $y = \frac{x}{2}$ và sử dụng cách viết nhị phân. Như thế ta bắt đầu từ số 0, 1 và có hai phép toán: $+1$ và chia 2 (dịch dấu phẩy sang phải). Tuy nhiên, đó không phải là điểm mấu chốt. Lời giải trên đây không cần chuyển về hệ nhị phân nhưng có dùng đến tính duy nhất của khai triển nhị phân.

Ý tưởng sử dụng hệ đếm cơ số đã được dùng ở bài 4 của Vietnam TST 2018 với các tính toán kỹ thuật không kém phần phức tạp.