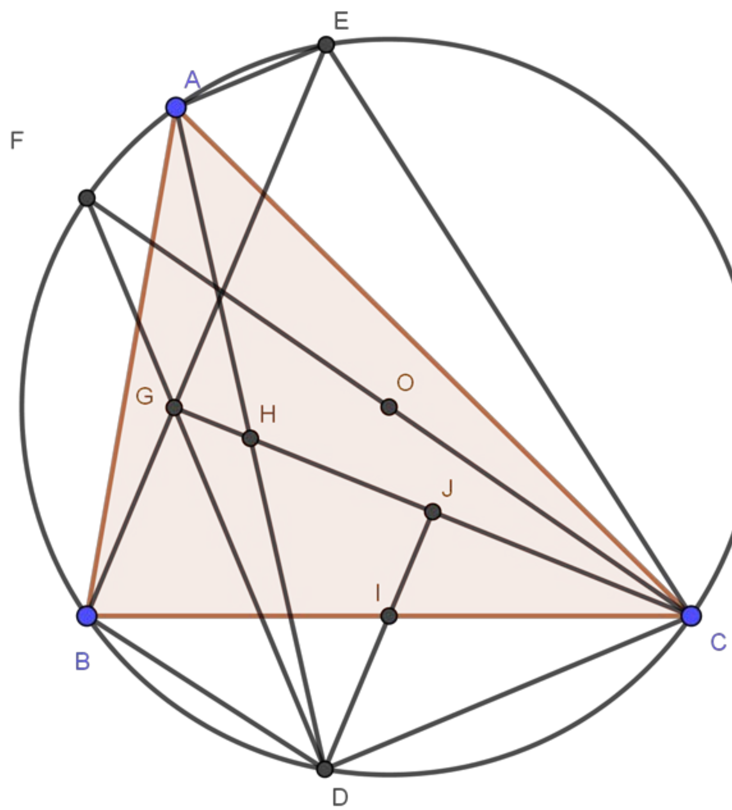
<u>Bài 1:</u> Cho tứ giác điều hòa ABDC, đường thẳng qua A song song CD cắt (ABC) tại E. Đường kính CF, gọi $G = BE \cap DF$. Chứng minh rằng CG chia đôi AD.

<u>Bài giải</u>



Gọi I là trung điểm BC. Gọi H là giao điểm của CG và AD.

Vì tứ giác ABDC điều hòa nên $AB.\,CD = AC.\,BD$. Áp dụng định lý Ptoleme, ta có: $AB.\,CD + AC.\,BD = AD.\,BC \Leftrightarrow 2.AB.DC = 2.AD.IC \Leftrightarrow AB.\,DC = AD.\,IC \Leftrightarrow \frac{IC}{AB} = \frac{DC}{AD}$. Lại có $\widehat{ICD} = \widehat{BCD} = \widehat{BAD}$ nên ta suy ra $\Delta CID \sim \Delta ABD$ (c. g. c) => $\widehat{CDI} = \widehat{ADB} = \hat{C}$ => $\widehat{IDB} = \widehat{BDC} - \widehat{IDC} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = \hat{B} = 180° - \widehat{AEC} = 180° - \widehat{DAE}$ (do AECD là hình thang cân) $= 180° - \widehat{EBD}$ => $\widehat{IDB} + \widehat{EBD} = 180°$. Mà 2 góc này nằm ở vị trí trong cùng phía nên ta suy ra BE // ID (dhnb).

Gọi J là giao điểm của DI và CG. Do IJ // BG (cmt) và I là trung điểm BC nên ta suy ra J là trung điểm CG. Lại có ΔGDC vuông tại D [do CF là đường kính (O) và

D, G, F thẳng hàng] nên ta suy ra $JD = \frac{1}{2}.GC = JC$ => ΔJDC cân tại J =>

$\widehat{JCD} = \widehat{JDC} \Leftrightarrow \widehat{GCD} = \widehat{IDC} = \hat{C}$ (cmt) => $\widehat{ACH} = \widehat{BCD}$. Lại có $\widehat{HAC} = \widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ nên ta suy ra $\Delta CAH \sim \Delta DBC$ (g. g) => $\frac{AH}{BD} = \frac{AC}{BC}$ => $AH = \frac{AC.BD}{BC} = \frac{AD.BC}{2BC}$ (cmt) $= \frac{AD}{2} \Leftrightarrow 2AH = AD \Leftrightarrow 2AH = AH + HD \Leftrightarrow AH = HD$ => H là trung điểm AD (đpcm).

Vậy CG chia đôi AD.