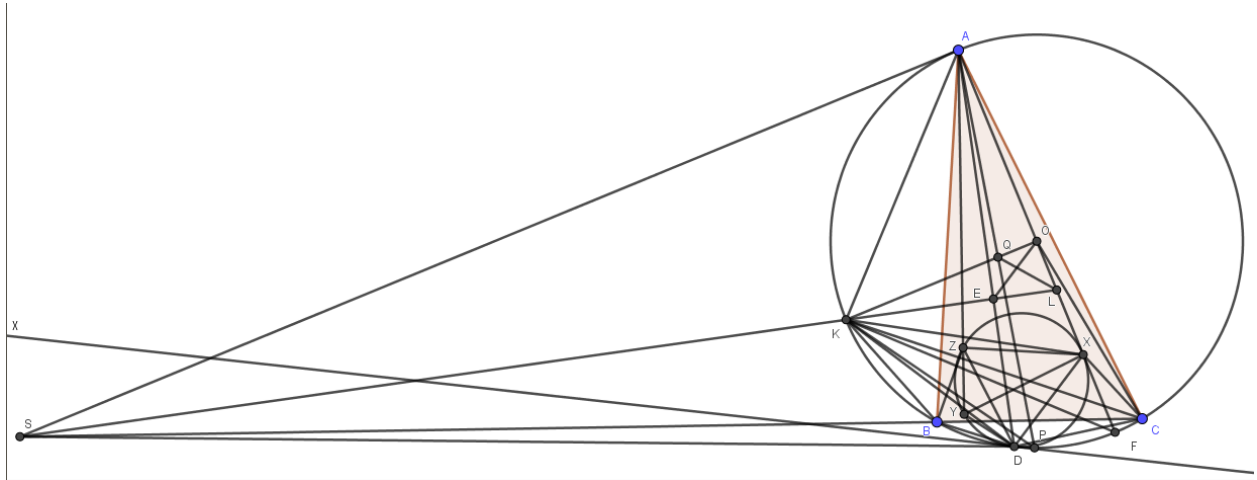


**Bài 2:** Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P trên (O) sao cho AP là đường đối trung. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại S. Đường thẳng qua O song song với SA cắt AP và (O) lần lượt tại Q, K. SK cắt AO tại L. X trên AO sao cho X, P, Q, L đồng viên. Các đường thẳng qua X vuông góc với AC và qua X vuông góc với AB lần lượt cắt đường cao đỉnh A tại Y, Z. Chứng minh (XYZ) tiếp xúc với (O).

**Bài giải**



Giả sử các điểm được bố trí như hình vẽ.

OA cắt (O) tại F. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với SL cắt (O), SL lần lượt tại D, E.

Ta có:  $OK \perp AF$  [do  $SA \perp AF$  (g/t)]  $\Rightarrow$  K là điểm chính giữa cung AF  $\Rightarrow$   
 $\widehat{AKQ} = \widehat{AFK} = 45^\circ = \widehat{APK} \Rightarrow \Delta AKQ \sim \Delta APK$  (g.g)  $\Rightarrow AK^2 = AQ \cdot AP =$   
 $AL \cdot AX$  (do PQLX nội tiếp)  $\Rightarrow \Delta AKL \sim \Delta AXK$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{AKL} = \widehat{AXK} \Leftrightarrow \widehat{AKE} =$   
 $\widehat{KXO}$ . Lại có  $\widehat{AEK} = \widehat{KOX} = 90^\circ$  (cmt)  $\Rightarrow \Delta AKE \sim \Delta KXO$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{AE}{OK} = \frac{EK}{OX}$ .

$\Leftrightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{OK}{OX}$ . Lại có  $\widehat{ADK} = \widehat{AFK} = 45^\circ \Rightarrow \Delta EKD$  vuông cân tại E  $\Rightarrow EK = ED$   
 $\Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{OA}{OX} \Rightarrow OE \parallel DX$  (định lý Thales đảo)

Ta có:  $\widehat{AEK} = \widehat{AOK} = 90^\circ \Rightarrow AKEO$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{AKO} = 45^\circ = \widehat{ADX}$  [2 góc so le trong do  $OE \parallel DX$  (cmt)].

$$\text{Ta có: } \widehat{ASC} = 180^\circ - \widehat{C} - \widehat{SAC} = 180^\circ - \widehat{C} - (180^\circ - \widehat{B}) = \widehat{B} - \widehat{C}$$

$$\widehat{ZAX} = \widehat{A} - 2 \cdot \widehat{OAC} = \widehat{A} - 180^\circ + \widehat{AOC} = \widehat{A} - 180^\circ + 2 \cdot \widehat{B} = (\widehat{A} + \widehat{B}) - 180^\circ + \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{C} + 180^\circ + \widehat{B} = \widehat{B} - \widehat{C}.$$

$$\Rightarrow \widehat{ASC} = \widehat{ZAX}. \text{ Lại có } \widehat{AXZ} = 90^\circ - \widehat{BAX} = 90^\circ - \widehat{ZAC} = \widehat{C} = \widehat{SCA} \Rightarrow$$

$$\Delta SAC \sim \Delta AZX \text{ (g.g)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AZ}{AX} = \frac{SA}{SC} \Rightarrow SA \cdot AX = AZ \cdot SC & (*) \\ \widehat{ZAX} = \widehat{BAS} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{SAK} = \widehat{ACK} = \widehat{ABK} = \widehat{ADK} = 45^\circ = \widehat{ADX} \text{ (cmt)}; \widehat{SKA} = 180^\circ - \widehat{AKE} = \widehat{AOE} \text{ [do tứ giác AKEO nội tiếp (cmt)]} = \widehat{AXD} \text{ [do } OE \parallel DX \text{ (cmt)]}$$

$$\Rightarrow \Delta SAK \sim \Delta ADX \text{ (g.g)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{SK}{AX} = \frac{SA}{AD} \\ \widehat{DAX} = \widehat{KAS} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} SA \cdot AX = SK \cdot AD \\ \widehat{ZAX} - \widehat{DAX} = \widehat{BAS} - \widehat{KAS} \end{cases} \text{ [theo (*)]} \Rightarrow \begin{cases} SK \cdot AD = AZ \cdot SC \\ \widehat{KSC} = \widehat{ZAD} \end{cases} \text{ [theo (*)]}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{SK}{AZ} = \frac{SC}{AD} \\ \widehat{KSC} = \widehat{ZAD} \end{cases} \Rightarrow \Delta SKC \sim \Delta AZD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{SCK} = \widehat{ADZ} = \widehat{KCB} = \widehat{KDB}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{ADZ} + \widehat{KDZ} = \widehat{KDB} + \widehat{KDZ} \Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{ZDB} = 45^\circ = \widehat{ADX} \Leftrightarrow \widehat{ZDB} + \widehat{ADZ} = \widehat{ADX} + \widehat{ADZ} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ZDX} = \widehat{C} = 90^\circ - \widehat{YAC} = \widehat{AYX} = \widehat{ZYX} \Rightarrow ZYDX \text{ nội tiếp.}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{AYX} = \widehat{AXZ} [= \widehat{C} \text{ (cmt)}] \Rightarrow \Delta AXZ \sim \Delta AYX \text{ (g.g)} \Rightarrow \widehat{AZX} = \widehat{AXY} = \widehat{SBA} \text{ [do } \Delta SAC \sim \Delta AZX \text{ (cmt)}] = 180^\circ - \widehat{B}.$$

$$\text{Ta có: } \widehat{ACD} - \widehat{YZD} = 180^\circ - \widehat{AKD} - (180^\circ - \widehat{AZD}) = \widehat{SKC} - \widehat{AKD} \text{ [do } \Delta SKC \sim \Delta AZD \text{ (cmt)}] = \widehat{SKD} + \widehat{AKC} = 180^\circ - \widehat{EKD} + \widehat{B} = 180^\circ - 45^\circ + \widehat{B} = 135^\circ + \widehat{B}.$$

$$\widehat{ADY} = \widehat{ZDY} + \widehat{ADZ} = \widehat{ZXY} + \widehat{KDB} \text{ (cmt)} = \widehat{AXY} - \widehat{AXZ} + \widehat{KAB} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} + \widehat{KAB} = \widehat{A} + \widehat{KAB} = \widehat{KAC} = 180^\circ - \widehat{KBC} = 180^\circ - (\widehat{ABK} - \widehat{B}) = 180^\circ - \widehat{ADK} + \widehat{B} = 180^\circ - 45^\circ + \widehat{B} = 135^\circ + \widehat{B}.$$

$$\Rightarrow \widehat{ADY} = \widehat{ACD} - \widehat{YZD} (**)$$

Từ D vẽ tiếp tuyến Dx của đường tròn (O)  $\Rightarrow \widehat{xDA} = \widehat{ACD}$ .

Từ (\*\*)  
 $\Leftrightarrow \widehat{xDA} - \widehat{xDY} = \widehat{xDA} - \widehat{YZD} \Rightarrow \widehat{xDY} = \widehat{YZD} \Rightarrow$  Dx là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta XYZ$ .

Vậy (XYZ) tiếp xúc với (O).