

MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM PHẦN NGUYÊN

Lê Thị Anh Đoan
THPT chuyên Lê Quý Đôn, Khánh Hòa

Số học là một trong những chủ đề thú vị và đẹp đẽ của toán sơ cấp. Trong hầu hết các kỳ thi chọn học sinh giỏi thì bài toán số học thường xuyên xuất hiện và luôn là một thách thức lớn đối với học sinh. Toán về phần nguyên là một dạng toán hay, là một trong những nền tảng cơ bản. Sử dụng thành thạo toán về phần nguyên học sinh sẽ có thêm một kỹ năng hay một công cụ để giải toán, nhất là giải các bài toán liên quan đến số nguyên.

Bố cục của bài viết như sau:

Phần I. Khái niệm và các tính chất cơ bản của hàm phần nguyên.

Phần II. Một số dạng toán về hàm phần nguyên.

Phần III. Một số ứng dụng của hàm phần nguyên.

Phần IV. Hàm phần nguyên trong các đề thi chọn học sinh giỏi.

Trong phạm vi bài viết này, tôi không có tham vọng đưa ra những sáng kiến mới, chỉ muốn trao đổi cùng quý thầy cô đồng nghiệp về hàm phần nguyên, các tính chất cơ bản, một số ứng dụng và một số bài toán về phần nguyên trong các đề thi chọn học sinh giỏi mà tôi đã sưu tầm và tập hợp lại trong thời gian qua. Rất mong nhận được sự góp ý và xây dựng từ quý thầy cô. Xin chân thành cảm ơn quý thầy cô.

1 Khái niệm và các tính chất cơ bản của hàm phần nguyên

Định nghĩa 1. Với mỗi số thực x , phần nguyên (floor) của x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x và được kí hiệu là $\lfloor x \rfloor$.

Số thực $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ được gọi là phần lẻ (fractional part) của số thực x .

Trần (ceiling) của x là số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x và được kí hiệu là $\lceil x \rceil$.

Các hàm số $y = f(x) = \lfloor x \rfloor$, $y = g(x) = \lceil x \rceil$ và $y = h(x) = \{x\}$ được gọi là hàm phần nguyên, hàm trần và hàm phần lẻ.

Nhận xét 1. Định nghĩa về phần nguyên còn được hiểu theo một trong hai công thức sau:

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \text{ hoặc}$$

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

.

Mệnh đề 1. a) Nếu a và b là hai số nguyên với $b > 0$ và $a = bq + r$ thì $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ và $r = \{ \frac{a}{b} \} \cdot b$.

b) Với mọi số thực x và mọi số nguyên n , ta có $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ và $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$.

c) Nếu x là số nguyên thì $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$. Nếu x không là số nguyên thì $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

d) Hàm phần nguyên là một hàm không giảm, tức là: $x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

e) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

f) $\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor$, với mọi số thực không âm x, y .

g) Với mọi số thực x và mọi số nguyên n , ta có $\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$.

h) Với mọi số thực dương x và mọi số nguyên dương n thì số các số nguyên dương là bội của n và không vượt quá x là $\lfloor \frac{x}{n} \rfloor$.

Định lí 1 (Định lý Legendre). Số mũ của số nguyên tố p trong phân tích tiêu chuẩn của $n!$ được tính theo công thức: $e_p(n) = \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$

Định lí 2 (Định lý Hermite). Với mọi số nguyên dương n và mọi số thực x , ta có $\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{n} \rfloor + \dots + \lfloor x + \frac{n-1}{n} \rfloor$.

Định lí 3 (Định lý Beatty). α, β là các số vô tỷ dương sao cho $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Khi đó 2 tập (dãy) $\{A_n\}_1^\infty = \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \dots\}$ và $\{B_n\}_1^\infty = \{\lfloor \beta \rfloor, \lfloor 2\beta \rfloor, \dots\}$ lập thành hai phân hoạch trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$, tức là: $\{A_n\}_1^\infty \cap \{B_n\}_1^\infty = \emptyset$ và $\{A_n\}_1^\infty \cup \{B_n\}_1^\infty = \mathbb{N}^*$.

2 Một số dạng toán về hàm phần nguyên

Dạng 1: Chứng minh một biểu thức.

Bài toán 1. Với mọi số thực x và y , ta có $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor$.

Giải. Ta có $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ và $y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$. Khi đó $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor \{x\} \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 2\lfloor \{y\} \rfloor$ và $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$.

Ta chỉ cần chứng minh: $\lfloor 2\{x\} \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor \geq \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$.

Do tính đối xứng nên ta có thể giả sử $\{x\} \geq \{y\}$.

Vì $\{x\} \geq 0$ nên $\lfloor 2\{x\} \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor \geq \lfloor 2\{x\} \rfloor \geq \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2. (Gauss) Với hai số nguyên tố cùng nhau p và q , ta có $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Giải. Vì $(p, q) = 1$ nên $\frac{ip}{q}$ không là số nguyên. Khi đó $\left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(q-i)p}{q} \right\rfloor = p + \left\lfloor \frac{ip}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-ip}{q} \right\rfloor = p - 1, \quad 1 \leq i \leq q - 1$. Do đó

$$2 \left(\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor \right) = \left(\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor \right) + \dots + \left(\left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor \right) = (p-1)(q-1)$$

Bài toán 3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , hiệu $\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ luôn là một số chẵn.

Giải. Ta có $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \{s \in \mathbb{Z}^+ : ks \leq n\}$. nên $\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ là số các cặp (có tính thứ tự) (s, k) thỏa mãn $1 \leq s, k \leq n$ và $ks \leq n$. Dễ thấy $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ là số các cặp (k, k) thỏa mãn $1 \leq k \leq n$ và $k^2 \leq n$ nên hiệu $\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ là số các cặp (có tính thứ tự) (s, k) sao cho $1 \leq s \neq k \leq n$ và $sk \leq n$. Hiển nhiên, nếu cặp (s, k) thỏa mãn tính chất này thì cặp $(k, s) \neq (s, k)$ cũng thỏa mãn. Do đó số các cặp thỏa mãn tính chất trên phải là một số chẵn, tức là ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Giải. Đặt $k = \lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \rfloor$; $m = \lfloor \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \rfloor$. Ta có

$$k \leq \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor < k + 1 \Leftrightarrow k - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} < k + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k^2 - k + \frac{1}{4} \leq n < k^2 + k + \frac{1}{4}.$$

Vì n nguyên dương nên phải có $k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k$.

Tương tự

$$m \leq \left\lfloor \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor < m + 1 \Leftrightarrow m^2 - m + \frac{1}{4} \leq n - \frac{3}{4} < m^2 + m + \frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2 - m + 1 \leq n < m^2 + m.$$

Do đó ta phải có $k = m$. Ta có điều phải chứng minh.

Dạng 2: Giải phương trình.

Bài toán 5. Tìm các nghiệm thực của phương trình:

$$4x^2 - 40 \lfloor x \rfloor + 51 = 0. \quad (1)$$

Giải. Ta có

$$(2x - 3)(2x - 17) = 4x^2 - 40x + 51 \leq 4x^2 - 40 \lfloor x \rfloor + 51 = 0,$$

suy ra $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{17}{2}$ và $1 \leq \lfloor x \rfloor \leq 8$. Khi đó $x = \frac{\sqrt{40 \lfloor x \rfloor - 51}}{2}$ hay

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{40 \lfloor x \rfloor - 51}}{2} \right\rfloor \quad (2)$$

Lần lượt thay $\lfloor x \rfloor \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ vào phương trình (2). Ta thấy $\lfloor x \rfloor = 2, 6, 7, 8$ thỏa phương trình (2). Vậy các nghiệm của (1) là

$$\frac{\sqrt{29}}{2}; \frac{\sqrt{189}}{2}; \frac{\sqrt{229}}{2}; \frac{\sqrt{269}}{2}.$$

Bài toán 6. Giải phương trình:

$$\lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 1.$$

Giải. Ta có $1 \leq \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor < 2$.

* $x \geq 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor \geq 2 \Rightarrow \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor \geq 4 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* $1 \leq x < 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \leq \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor < 2 \Rightarrow$ phương trình nghiệm đúng mọi x .

* $0 \leq x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* $-1 < x < 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -1 \Rightarrow \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = -x < 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* $x = -1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -1 \Rightarrow \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 1 \Rightarrow$ phương trình nghiệm đúng.

* $x < -1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq -2 \Rightarrow \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor > 2 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Bài toán 7. Giải phương trình:

$$\left\lfloor \frac{2x - 1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4x + 1}{6} \right\rfloor = \frac{5x - 4}{3}.$$

Giải. Đặt

$$\frac{2x - 1}{3} = y \Rightarrow x = \frac{3y + 1}{2}.$$

Thay vào phương trình ta được

$$\lfloor y \rfloor + \left\lfloor y + \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{5y-1}{2} \Rightarrow \lfloor 2y \rfloor = \frac{5y-1}{2}.$$

Đặt

$$\frac{5y-1}{2} = t \ (t \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y = \frac{2t+1}{5} \Rightarrow \left\lfloor \frac{4t+2}{5} \right\rfloor = t \Rightarrow 0 \leq \frac{4t+2}{5} - t < 1.$$

Do $t \in \mathbb{Z}$ nên $t \in \{-2; -1; 0; 1; 2\} \Rightarrow y \in \{-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{3}{5}; 1\}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ -\frac{2}{5}; \frac{1}{5}; \frac{4}{5}; \frac{7}{5}; 2 \right\}.$$

Bài toán 8. Giải phương trình:

$$x^4 = 2x^2 + \lfloor x \rfloor \quad (3)$$

Giải. Ta có

$$(3) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = x^2(x^2 - 2)$$

$$x^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor \in \{-1; 0\}$$

$$+\lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$+\lfloor x \rfloor = -1 \Rightarrow x = -1$$

$$x^2 > 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor > 0 \Rightarrow x > \sqrt{2} \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1 \Rightarrow x^2 - 2 \leq \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow x < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} < x < \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

3 Một số ứng dụng của hàm phần nguyên

Dạng 1: Các bài toán liên quan chia hết.

Giải. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tập hợp $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ có số các số chia hết cho 3 bằng số các số chia hết cho 5 hoặc 7 hoặc 35.

Giải. Ta có số các số chia hết cho 3, 5, 7, 35 lần lượt là $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor, \lfloor \frac{n}{5} \rfloor, \lfloor \frac{n}{7} \rfloor, \lfloor \frac{n}{35} \rfloor$. Do đó ta cần tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{7} \rfloor - \lfloor \frac{n}{35} \rfloor$. Đặt $n = 35k + r$ với $0 \leq r < 35$ ta có đẳng thức trên tương đương với

$$\left\lfloor \frac{35k+r}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 7k + \frac{r}{5} \right\rfloor + \left\lfloor 5k + \frac{r}{7} \right\rfloor - \left\lfloor k + \frac{r}{35} \right\rfloor.$$

Vì $0 \leq r < 35$ nên $\lfloor \frac{r}{35} \rfloor = 0$ và đẳng thức trên trở thành

$$11k + \left\lfloor \frac{2k+r}{3} \right\rfloor = 11k + \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{7} \right\rfloor \text{ hay } \left\lfloor \frac{2k+r}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{7} \right\rfloor.$$

Bằng cách thay trực tiếp $r = 0, 1, 2, \dots, 34$ và tính vế phải ta tìm được các bộ số (k, r) như sau: $(0, 1), (0, 2), (0, 5), (0, 7), (0, 8), (0, 10), (0, 11), (0, 14), (0, 15), (0, 16), (0, 17), (0, 20), (0, 21), (0, 22), (0, 23), (0, 29), (0, 30), (0, 31), (0, 32), (1, 15), (1, 21), (1, 30)$.

Bài toán 9. Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho $2013!$ chia hết cho 5^n

Giải. Số n cần tìm là số mũ của 5 trong phân tích thành tích các thừa số nguyên tố. Theo định lý Legendre ta có

$$n = \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{2013}{5^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2013}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2013}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2013}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2013}{5^4} \right\rfloor = 402 + 80 + 16 + 3 = 501.$$

Vậy $n = 501$ là số cần tìm.

Bài toán 10. Giả sử k và n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$(k!)^{k^n + k^{n-1} + \dots + k + 1} \mid (k^{n+1})!.$$

Giải. Ta có

$$k! \mid k!, \quad k!(k!)^k \mid (k^2)!, \quad (k^2)!(k!)^{k^2} \mid (k^3)!, \quad \dots, \quad (k^n)!(k!)^{k^n} \mid (k^{n+1})!$$

Nhân vế theo vế ta được

$$k!k! (k^2!) (k^3!) \dots (k^n)!(k!)^{k+k^2+\dots+k^n} \mid k! (k^2!) (k^3!) \dots (k^{n+1})!.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 11. Giả sử n là hợp số. Chứng minh rằng các số $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}$ đều chia hết cho n .

Giải. Gọi p là một ước nguyên tố của n và s là một số nguyên sao cho $p^s \leq n < p^{s+1}$. Ta cần chứng minh n không là ước của $C_n^{p^s} = \frac{n!}{(p^s)!(n-p^s)!}$.

Vì $p \mid n$ nên chỉ cần chứng minh p không là ước của $C_n^{p^s}$. Giả sử $p^k \mid C_n^{p^s}$. Khi đó điều phải chứng minh tương đương với $k = 0$. Thật vậy, áp dụng định lý Legendre ta có

$$\begin{aligned} k &= \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{p^s}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n-p^s}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{p^s}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{n-p^s}{p^i} \right\rfloor \\ &= \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{p^s}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=1}^s \left\lfloor \frac{p^s}{p^i} \right\rfloor = 0, \end{aligned}$$

vì $\left\lfloor \frac{p^s}{p^i} \right\rfloor$ là các số nguyên với $1 \leq i \leq s$.

Dạng 2: Các bài toán số học khác.

Bài toán 12. Với n nguyên dương cho trước, phương trình $x + 2y = n$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

Giải. Ta có $2y = n - x \leq n - 1$. Do đó tương ứng mỗi giá trị của y ta có $x = n - 2y$ chính là một nghiệm của phương trình. Số nghiệm của phương trình chính là số các giá trị có thể có của y , là bộ số của 2 mà không vượt quá $\frac{n-1}{2}$. Vậy phương trình có $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ nghiệm nguyên.

Bài toán 13. Cho n là một số nguyên dương thỏa mãn $n!$ có đúng 2002 chữ số 0 đứng tận cùng. Chứng minh rằng $n \leq 8024$.

Giải. Giả sử $n! = 2^\alpha 5^\beta q$, trong đó $(q, 2) = (q, 5) = 1$. Áp dụng định lý Legendre ta có

$$\alpha = \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor > \beta = \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor.$$

Do đó $n! : 10^\beta$, $n! : 10^\beta$ nên số chữ số 0 đứng tận cùng trong biểu diễn thập phân của n là β . Vậy ta cần tìm n nhỏ nhất sao cho $\beta = \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor = 2002$. Với mỗi n đặt $p(n) = \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor$. Ta có $p(n) \leq p(n+1)$ với mọi $n \geq 1$ và

$$p(8024) = \left\lfloor \frac{8024}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8024}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8024}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8024}{5^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8024}{5^5} \right\rfloor = 1604 + 320 + 64 + 12 + 2 = 2002.$$

Do đó $n \leq 8024$ (đpcm).

Bài toán 14. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m và n ta có

$$(m, n) = 2 \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{kn}{m} \right\rfloor + m + n - mn$$

Giải. Đặt $d = (m, n)$, $m = dm'$, $n = dn'$, $m', n' \in \mathbb{Z}$, $(m', n') = 1$. Ta có

$$\left\lfloor \frac{kn}{m} \right\rfloor + \left\lfloor n - \frac{kn}{m} \right\rfloor = \begin{cases} n-1 & \text{nếu } \frac{kn}{m} \text{ không là một số nguyên} \\ n & \text{nếu } \frac{kn}{m} \text{ là một số nguyên} \end{cases}$$

Mặt khác $\frac{kn}{m} = \frac{kn'}{m'}$ là một số nguyên khi và chỉ khi $k:m'$. Do đó trong tập hợp $\{1, 2, \dots, m-1\}$ có

$$\left\lfloor \frac{m-1}{m'} \right\rfloor = \left\lfloor d - \frac{1}{m'} \right\rfloor = d-1$$

giá trị của k sao cho $\frac{kn}{m}$ là một số nguyên. Ta có

$$2 \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{kn}{m} \right\rfloor = 2 \sum_{k=1}^{m-1} \left\lfloor \frac{kn}{m} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{m-1} \left\lfloor \frac{kn}{m} \right\rfloor + \left\lfloor n - \frac{kn}{m} \right\rfloor = mn - m - n - d.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Dạng 3: Tìm số hạng tổng quát của dãy số. Tính tổng.

Bài toán 15. Cho (u_n) là dãy số “thứ tự tăng dần của các số tự nhiên lẻ không chia hết cho 3”. Tìm số hạng tổng quát của dãy số trên.

Giải. Xét theo số dư thì tất cả các số tự nhiên không chia hết cho 3 đều có dạng $3p-1$ hoặc $3p+1$, đây là hai số chẵn hoặc hai số lẻ liên tiếp tùy theo p chẵn hay lẻ. Khi p chẵn $p=2k$, thì hai số dạng $6k-1$ và $6k+1$ là hai số lẻ. Tất cả các số dạng này chính là các số hạng của dãy p cần tìm. Xếp thứ tự tăng dần ta sẽ có: $u_{2k} = 6k-1$ và $u_{2k+1} = 6k+1$. Như vậy với $n = 2k+r$, $r = \{0, 1\}$, ta có

$$u_n = 6 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \{-1, 1\} = 6 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\{0, 1\} - 1 = 6 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2r - 1 = 6 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \left(n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) - 1.$$

Vậy $u_n = 2n + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$.

Bài toán 16. Cho (u_n) là dãy số “thứ tự tăng dần của các số tự nhiên không chính phương”. Tìm số hạng tổng quát của dãy số trên.

Giải. Xét dãy các số tự nhiên (v_n) . Ta có $u_n = v_n + k$, trong đó k là số các số chính phương nhỏ hơn u_n (bị loại từ dãy (v_n)). Như vậy u_n phải nằm ở giữa hai số chính phương liên tiếp: $k^2 + 1 \leq u_n \leq (k+1)^2 - 1$. Trên mỗi đoạn $[i^2 + 1; (i+1)^2 - 1]$ (giữa hai số chính phương liên tiếp) có $2i$ số tự nhiên. Đếm các số hạng của dãy (u_n) có giá trị nhỏ hơn k^2 ta có $\sum_{i=1}^{k-1} 2i = k^2 - k$ số hạng. Như vậy chỉ số n sẽ thỏa mãn

$$k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k$$

hay

$$\sqrt{n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \leq k \leq \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}$$

vì

$$\sqrt{n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - 1 \leq \sqrt{n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \leq k \leq \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}$$

nên $k = \left\lfloor \sqrt{n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ hay $k = \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

$$\text{Vậy } u_n = n + \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Bài toán 17. Tính tổng $S_n = \sum_{k=1}^n \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Giải. Đặt $m = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$ suy ra $m^2 \leq n \leq (m+1)^2$. Xét các số hạng của S_n trên mỗi đoạn $i^2 \leq k \leq (i+1)^2$ có $2i+1$ số hạng, các số hạng này đều có giá trị là i . Như vậy ta có

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i^2}^{i^2+2i} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor + \sum_{k=m^2}^n \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{m-1} i(2i+1) + \sum_{k=m^2}^n \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \\ &= \frac{m(m-1)(2m-1)}{3} + \frac{m(m-1)}{2} + (n+1-m^2)m = nm - \frac{m(m-1)(2m+5)}{6} \end{aligned}$$

4 Hàm phần nguyên trong các đề thi chọn học sinh giỏi

Bài toán 18. (AIME 1985) Có bao nhiêu số trong 1000 số tự nhiên đầu tiên có thể biểu diễn dưới dạng

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Đặt hàm $f(x) = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor$.

Nếu n là một số nguyên dương thì $f(x+n) = f(x) + 20n$ (chứng minh bằng quy nạp).

Như vậy ta hạn chế lại, chỉ chứng minh cho 20 số nguyên dương đầu tiên với $x \in (0; 1]$. Ta có khi x thì giá trị $f(x)$ chỉ biến đổi khi $\lfloor 2x \rfloor, \lfloor 4x \rfloor, \lfloor 6x \rfloor, \lfloor 8x \rfloor$ đạt giá trị nguyên. Trong nửa khoảng $x \in (0; 1]$ mọi sự biến đổi khi $x = \frac{m}{n}, \quad l \leq m \leq n, \quad n = 2, 4, 6 \text{ hoặc } 8$. Ta thấy có 12 phân số (theo thứ tự tăng dần) là

$$\frac{1}{8}; \frac{1}{6}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{3}{8}; \frac{1}{2}; \frac{5}{8}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; \frac{7}{8} \text{ và } 1.$$

Vậy chỉ có 12 trong số 20 số nguyên dương đầu tiên có biểu diễn thỏa đề. Vì $1000 = 50 \cdot 20$ nên có $50 \cdot 12 = 600$ số nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Bài toán 19. (Canada 1998) Tìm số nghiệm thực của phương trình:

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor = a.$$

Giải. Vì về trái là một số nguyên nên cũng phải là một số nguyên. Đặt $a = 30q + r$, trong đó q, r là các số nguyên, $0 \leq r \leq 29$. Ta có phương trình đã cho tương đương với phương trình sau

$$31q + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor = 30q + r \Leftrightarrow q = r - \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor \right)$$

Như vậy, với mỗi giá trị của q sao cho $a = 30q + r$ thỏa mãn phương trình đã cho. Do r chỉ có thể nhận 30 giá trị nên phương trình đã cho có 30 nghiệm thực.

Bài toán 20. (Austrian - Polish 1998) Cho m, n là các số nguyên dương, $n \geq m$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^n \left\lfloor \sqrt[k^2]{k^m} \right\rfloor \leq n + m \left(2^{\frac{m}{4}} - 1 \right).$$

Giải. Với $k > m$ ta có $k < 2^k$ suy ra $k < 2^{\frac{k^2}{m}}$ tức là $k^m < 2^{k^2}$ hay $\sqrt[k^2]{k^m} < 2$. Vì vậy nếu $k > m$ thì

$$\left\lfloor \sqrt[k^2]{k^m} \right\rfloor = 1.$$

Từ đó để chứng minh bất đẳng thức đã cho ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{k=1}^m \left\lfloor \sqrt[k^2]{k^m} \right\rfloor \leq m 2^{\frac{m}{4}} - \sum_{k=1}^m 2^{\frac{k^2}{4}}.$$

Với $k = 1, 2, 3$ thì $2^{\frac{k^2}{4}} \geq k \Leftrightarrow \sqrt[k^2]{k^m} \leq 2^{\frac{m}{4}}$.

Với $k \geq 4$, $2^{\frac{k^2}{4}} > 2^k > k$, do đó $\sqrt[k^2]{k^m} \leq 2^{\frac{m}{4}}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 21. (Russia 1999) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 2$,

$$\sum_{k=1}^{n^2} \left\{ \sqrt{k} \right\} \leq \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Giải. (Chứng minh bằng phương pháp quy nạp). Với $n = 1$, hiển nhiên đúng. Giả sử đúng với n . Ta đi chứng minh khẳng định đúng với $n + 1$. Ta có

$$n < \sqrt{n^2 + 1} < \sqrt{n^2 + 2} < \dots < \sqrt{n^2 + 2n} < n + 1$$

nên với mọi $i = 1, 2, \dots, 2n$ ta có

$$\left\{ \sqrt{n^2 + i} \right\} = \sqrt{n^2 + i} - n < \sqrt{n^2 + i + \frac{i^2}{4n^2}} - n = \frac{i}{2n}.$$

Do đó

$$\sum_{k=1}^{(n+1)^2} \left\{ \sqrt{k} \right\} = \sum_{k=1}^{n^2} \left\{ \sqrt{k} \right\} + \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \left\{ \sqrt{k} \right\} < \frac{n^2 - 1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} i + 0 = \frac{n^2 - 1}{2} + \frac{2n + 1}{2} = \frac{(n + 1)^2 - 1}{2}$$

Vậy khẳng định đúng với, theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 22. (Australia 1999) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 200 \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor = 190, 1 \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z = 178, 8 \end{cases}$$

Giải. Cộng ba phương trình về theo về ta được $2x + 2y + 2z = 568,9 \Leftrightarrow x + y + z = 284,45$.
Trừ từng cặp phương trình ta có

$$\begin{cases} \{y\} + \lfloor z \rfloor = 84,45 \\ \lfloor x \rfloor + \{z\} = 94,35 \\ \{x\} + \lfloor y \rfloor = 105,65 \end{cases}$$

Ta có $84 = \lfloor 84,45 \rfloor = \lfloor \lfloor z \rfloor + \{y\} \rfloor = \lfloor z \rfloor \Rightarrow \lfloor z \rfloor = 84, \{y\} = 0,45$. Tương tự ta có $\lfloor y \rfloor = 105$, nên $y = 105,45$. Do đó $x = 94,65$ và $x = 84,35$.

Bài toán 23. (APMO 1999) Cho $a_1, a_2, \dots$ là dãy các số thực thỏa mãn

$$a_{i+j} \leq a_i + a_j, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} \geq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. (Sử dụng phương pháp quy nạp mạnh) Với $n = 1, n = 2$ khẳng định hiển nhiên đúng.
Bây giờ ta giả sử khẳng định đúng với $n \leq k$, với mọi số nguyên $k \geq 2$, tức là

$$\begin{aligned} a_1 &\geq a_1, \\ a_1 + \frac{a_2}{2} &\geq a_2, \\ &\vdots \\ a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_k}{k} &\geq a_k \end{aligned}$$

Cộng về theo về các bất đẳng thức trên ta có

$$ka_1 + (k-1)\frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_k}{k} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_k. \quad (4)$$

Cộng $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ vào hai vế của (5) ta có

$$(k+1) \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_k}{k} \right) \geq (a_1 + a_k) + (a_2 + a_{k-1}) + \dots + (a_k + a_1) \geq ka_{k+1}. \quad (5)$$

Chia 2 vế của (5) cho $k+1$ ta được

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_k}{k} \geq \frac{ka_{k+1}}{k+1} \Leftrightarrow a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_k}{k} + \frac{a_{k+1}}{k+1} \geq a_{k+1}.$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 24. (Korea 2000) Cho p là số nguyên tố, $p \equiv 1 \pmod{4}$. Tính giá trị của biểu thức

$$S = \left(\sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{2k^2}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{k^2}{p} \right\rfloor \right).$$

Giải. Ta có

$$\left\lfloor \frac{2k^2}{p} \right\rfloor = \frac{2k^2}{p} - \left\{ \frac{2k^2}{p} \right\}, \quad \left\lfloor \frac{k^2}{p} \right\rfloor = \frac{k^2}{p} - \left\{ \frac{k^2}{p} \right\}$$

nên

$$\left\lfloor \frac{2k^2}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k^2}{p} \right\rfloor = 2 \left\{ \frac{k^2}{p} \right\} - \left\{ \frac{2k^2}{p} \right\}.$$

Ta thấy: * Nếu $\{x\} < \frac{1}{2}$ thì $2\{x\} - \{2x\} = 2\{x\} - 2\{x\} = 0$.

* Nếu $\{x\} \geq \frac{1}{2}$ thì $2\{x\} - \{2x\} = 2\{x\} - (2\{x\} - 1) = 1$.

Do đó, S bằng các số $k \in [1, p-1]$ sao cho $\left\{ \frac{k^2}{p} \right\} \geq \frac{1}{2}$ hay số các lớp thặng dư k khác 0 sao cho k^2 đồng dư với một số nằm trong đoạn $\left[\frac{p+1}{2}; p-1 \right]$ modulo p .

Do $p \equiv 1 \pmod{4}$ nên tồn tại số nguyên d sao cho $d^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Chia $p-1$ lớp thặng dư khác 0 thành $\frac{p-1}{2}$ cặp có dạng (a, da) . Do $(da)^2 \equiv -a^2 \pmod{p}$ nên trong mỗi cặp có đúng một số thặng dư bình phương nằm trong đoạn $\left[\frac{p+1}{2}; p-1 \right]$. Từ đó suy ra có tất cả $\frac{p-1}{2}$ lớp thặng dư khác 0 sao cho k^2 đồng dư với một số nằm trong đoạn $\left[\frac{p+1}{2}; p-1 \right]$ modulo p , tức là $S = \frac{p-1}{2}$.

Bài toán 25. (CRMO 2001) Tìm số các số nguyên dương x thỏa

$$\left\lfloor \frac{x}{99} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{101} \right\rfloor. \quad (6)$$

Giải. Ta có $\left\lfloor \frac{x}{99} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{101} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, \dots, 98\} \Rightarrow 98$ số thỏa (6)

$\left\lfloor \frac{x}{99} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{101} \right\rfloor = 1 \Leftrightarrow x \in \{101, 102, \dots, 197\} \Rightarrow$ có 97 số thỏa (6)

Tổng quát, nếu

$$\left\lfloor \frac{x}{99} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{101} \right\rfloor = k, \quad k \geq 1$$

thì

$$x \in \{101k, 10k+1, \dots, 99(k+1)-1\} \quad (7)$$

$\Rightarrow$ có $99-2k$ số thỏa (6).

Tập (7) khác rỗng khi

$$99(k+1)-1 \geq 101k \Leftrightarrow k \leq 49.$$

Vậy số các số nguyên dương x thỏa đề là

Bài toán 26. (CRMO 2003) Nếu x là số nguyên dương lớn hơn 7 thì

$$C_n^7 - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor : 7. \quad (8)$$

Giải. Ta có

$\left\lfloor \frac{x}{99} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{101} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, \dots, 98\} \Rightarrow$ có 98 số thỏa (8).

$\left\lfloor \frac{x}{99} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{101} \right\rfloor = 1 \Leftrightarrow x \in \{101, 102, \dots, 197\} \Rightarrow$ có 97 số thỏa (8).

Tổng quát, nếu

$$\left\lfloor \frac{x}{99} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{101} \right\rfloor = k, \quad k \geq 1$$

thì

$$x \in \{101k, 10k+1, \dots, 99(k+1)-1\} \quad (9)$$

$\Rightarrow$ có $99-2k$ số thỏa (8).

Tập (9) khác rỗng khi

$$99(k+1)-1 \geq 101k \Leftrightarrow k \leq 49.$$

Vậy số các số nguyên dương x thỏa đề là

$$98 + \sum_{k=1}^{49} (99-2k) = 2499.$$

Bài toán 27. (INMO 2009) Tìm tất cả các số thực x sao cho $\lfloor x^2 + 2x \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor + 2 \lfloor x \rfloor$.

Giải. Cộng 1 vào hai vế của phương trình ta được $\lfloor (x+1)^2 \rfloor = (\lfloor x+1 \rfloor)^2$. Giả sử $x+1 \leq 0$. Khi đó $\lfloor x+1 \rfloor \leq x+1 \leq 0$. Do đó

$$(\lfloor x+1 \rfloor)^2 \geq (x+1)^2 \geq \lfloor (x+1)^2 \rfloor = (\lfloor x+1 \rfloor)^2.$$

Vì $x+1 \leq 0$ nên $x \in \{\dots, -3, -2, -1\}$.

Giả sử $x+1 > 0$. Ta có

$$(x+1)^2 \geq \lfloor (x+1)^2 \rfloor = (\lfloor x+1 \rfloor)^2.$$

Hơn nữa,

$$(x+1)^2 \leq 1 + \lfloor (x+1)^2 \rfloor = 1 + (\lfloor x+1 \rfloor)^2.$$

Do đó

$$\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor x+1 \rfloor \leq (x+1) < \sqrt{1 + \lfloor (x+1)^2 \rfloor} = \sqrt{1 + (\lfloor x \rfloor + 1)^2}.$$

Suy ra

$$x \in \left[n; \sqrt{1 + (n+1)^2} - 1 \right], \quad n \geq -1.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$\{x \in \mathbb{Z} | x \leq -1\} \cup \left(\bigcup_{n \geq -1} \left[n; \sqrt{1 + (n+1)^2} - 1 \right] \right).$$

ss