

3. Đa thức bất khả quy

3.1. Đa thức với hệ số nguyên

Đa thức với hệ số nguyên là đa thức có dạng $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với a_i là các số nguyên. Ta ký hiệu tập hợp tất cả các đa thức với hệ số nguyên là $\mathbb{Z}[x]$.

Ta có các kết quả cơ bản sau đây về đa thức với hệ số nguyên.

- (1) Nếu $P(x)$ có nghiệm nguyên $x = a$ thì phân tích được $P(x) = (x-a)Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức với hệ số nguyên.
- (2) Nếu a, b nguyên và $a \neq b$ thì $P(a) - P(b)$ chia hết cho $a - b$.
- (3) Nếu $x = p/q$ là một nghiệm của $P(x)$ (với $(p, q) = 1$) thì p là ước của a_0 và q là ước của a_n . Đặc biệt nếu $a_n = \pm 1$ thì nghiệm hữu tỷ là nghiệm nguyên.
- (4) Nếu $x = m + \sqrt{n}$ là nghiệm của $P(x)$ với m, n nguyên, n không chính phương thì $x' = m - \sqrt{n}$ cũng là nghiệm của $P(x)$.
- (5) Nếu $x = m + \sqrt{n}$ với m, n nguyên, n không chính phương thì $P(x) = M' + N' \sqrt{n}$ với M', N' nguyên.

Đa thức với hệ số nguyên sẽ nhận giá trị nguyên với mọi giá trị x nguyên. Điều ngược lại không đúng, có những đa thức nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên nhưng các hệ số của nó không nguyên.

Ví dụ. Các đa thức $(x^2-x)/2, (x^3-x)/6$ nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên.

Đa thức với hệ số hữu tỷ nhưng nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên được gọi là đa thức nguyên.

Một đa thức với hệ số hữu tỷ $P(x)$ bất kỳ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\frac{a}{b} Q(x) \text{ với } a, b \text{ là các số nguyên và } Q(x) \text{ là đa thức với hệ số nguyên.}$$

3.2. Đa thức bất khả quy

Định nghĩa. Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Ta gọi $P(x)$ là bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ nếu $P(x)$ không phân tích được thành tích hai đa thức thuộc $\mathbb{Z}[x]$ với bậc lớn hơn hay bằng 1.

Tương tự định nghĩa đa thức bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$.

Định lý 3.1 (Tiêu chuẩn Eisenstein)

Cho $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Nếu tồn tại số nguyên tố p sao cho

- i) a_n không chia hết cho p
- ii) $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ chia hết cho p
- iii) a_0 không chia hết cho p^2

thì đa thức $P(x)$ bất khả quy.

Định lý 3.2 (Quan hệ bất khả quy trên $Z[x]$ và $Q[x]$)

Nếu đa thức $P(x) \in Z[x]$ bất khả quy trên $Z[x]$ thì cũng bất khả quy trên $Q[x]$.

Bổ đề Gauss. Ta gọi đa thức $P \in Z[x]$ là nguyên bản nếu các hệ số của nó nguyên tố cùng nhau. Ta có bổ đề Gauss: Tích của hai đa thức nguyên bản là nguyên bản.

Chứng minh bổ đề. Cho hai đa thức nguyên bản

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

thì

$$P(x).Q(x) = c_{m+n} x^{m+n} + c_{m+n-1} x^{m+n-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

Giả sử tích trên không nguyên bản thì tồn tại một số nguyên tố p là ước chung của các hệ số $c_0, c_1, \dots, c_{m+n}$. Vì P nguyên bản nên gọi i là số nhỏ nhất mà a_i không chia hết cho p và j là số nhỏ nhất sao cho b_j không chia hết cho p . Khi đó xét x_{i+j} ta thấy hệ số tương ứng không chia hết cho p , vô lý. Vậy tích trên nguyên bản.

Chứng minh định lý. Cho $P(x)$ bất khả quy trên $Z[x]$. Giả sử $P(x)$ khả quy trên $Q[x]$: $P(x) = P_1(x).P_2(x)$ với P_1, P_2 là các đa thức bậc nhỏ hơn bậc của P và có hệ số hữu tỷ.

$$\text{Đặt } P_1(x) = \frac{a_1}{b_1} Q_1(x), P_2(x) = \frac{a_2}{b_2} Q_2(x) \text{ với } (a_i, b_i) = 1 \text{ và } Q_i \text{ nguyên bản (} i=1,$$

2).

$$\text{Khi đó } P(x) = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} Q_1(x) Q_2(x) = \frac{p}{q} Q_1(x) Q_2(x) \text{ với } (p, q) = 1. \text{ Do } P(x) \in Z[x] \text{ nên}$$

từ đây suy ra các hệ số của $Q_1(x)Q_2(x)$ đều chia hết cho q , suy ra $Q_1(x)Q_2(x)$ không nguyên bản, trái với bổ đề Gauss. Mâu thuẫn. Vậy $P(x)$ bất khả quy trên $Q[x]$.

3.3. Một số tính chất của đa thức bất khả quy

3.4. Một số bài tập có lời giải

Bài 1. Cho tam thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Chứng minh rằng $P(x)$ nguyên với mọi x nguyên khi và chỉ khi $c, a + b$ và $2a$ nguyên.

Bài 2. a) Tìm tất cả các số nguyên a sao cho $(x-a)(x-10) + 1$ có thể phân tích được thành tích dạng $(x+b)(x+c)$ với b, c là các số nguyên.

b) Tìm tất cả các số nguyên khác 0 và đôi một khác nhau a, b, c sao cho đa thức $x(x-a)(x-b)(x-c) + 1$ có thể biểu diễn dưới dạng tích của hai đa thức với hệ số nguyên.

Bài 3. Chứng minh các đa thức sau là bất khả quy

a) $x^3 + 5x^2 + 35$

b) $x^4 - x^3 + 2x + 1$

Bài 4. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng đa thức $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ bất khả quy.

Bài 5. Cho n số a_i thuộc $\mathbb{Z}$. Chứng minh

a) $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) - 1$ bất khả quy

b) $(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2 + 1$ bất khả quy

3.4. Bài tập

Bài 1. Đa thức $P(x)$ bậc n có hệ số hữu tỷ là đa thức nguyên khi và chỉ khi nó nhận giá trị nguyên tại $n+1$ điểm nguyên liên tiếp. Chứng minh.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị n sao cho tồn tại n số nguyên phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_n$ để $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) + 1$ khả quy.

Bài 3. (Tiêu chuẩn Eisenstein mở rộng) Cho đa thức $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho

i) a_n không chia hết cho p

ii) a_0 không chia hết cho p^2

iii) $a_0, a_1, \dots, a_{n-k}$ chia hết cho p

Khi đó nếu $P(x) = H(x).G(x)$ thì một trong hai đa thức $H(x), G(x)$ có bậc nhỏ hơn k .

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị n nguyên dương sao cho đa thức $x^n + 4$ khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , đa thức $x^n + 5x^{n-1} + 3$ bất khả quy.

Bài 6. Tìm hệ số tự do của đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên, biết rằng trị tuyệt đối của nó nhỏ hơn 1000 và $P(19) = P(94) = 1994$.