CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ FERMAT LỚN

Định lí Fermat lớn: Với mọi $n \geq 3$ phương trình Điôphăng $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên dương.

Chứng minh:

Trước hết ta thừa nhận tính chất sau: *Một biểu thức siêu việt luôn có giá trị là một số vô tỉ trên một tập hợp Q nào đó.*

Để chứng minh tính chất này tương đối khó nên chúng ta thừa nhận vậy! Tuy nhiên bạn nào muốn biết thì có thể hiểu đơn giản như sau: với hai biểu thức có bản chất toán học khác xa nhau thì luôn cho giá trị khác nhau.Từ đó mà biểu thức siêu việt và biểu thức sơ cấp trên tập Q nào đó luôn cho giá trị khác nhau nên sinh ra tính chất trên.

Biểu thưc siêu việt là biểu thức chứa nhiều phép toán log, mũ ,căn... kết hợp lại một cách nào đó. Ví dụ bạn đọc có thể tự chứng minh được một số biểu thức siêu việt đơn giản sau:

$A = \log_3 x + \log_5 x$ luôn nhận giá trị vô tỉ $\forall x \in Q^+$

$B = 2^x + 3^x$ vô tỉ $\forall x \in (0;1)$, $x \in Q^+$

Ví dụ có thể hiểu đơn giản $B = 2^x + 3^x$ là số vô tỉ khi x là số hữu tỉ nằm trên khoảng (0,1) như sau:

Cách 1: $B = 2^x + 3^x = 2^x + 2^{x\log_2 3} = t + t^{\log_2 3}$(vô tỉ)

Cách 2: $B = \sqrt[p]{2^q} + \sqrt[p]{3^q}$ (vô tỉ) với $x = q/p$, $0 < x < 1$.

Sau đây là chứng minh định lí fermat lớn

Giả sử phương trình $x^n + y^n = z^n$ có nghiệm nguyên dương x_o, y_o, z_o .Khi đó ta có

$x_o^n + y_o^n = z_o^n \leftrightarrow \left(\frac{x_o}{z_o}\right)^n + \left(\frac{y_o}{z_o}\right)^n = 1$ Đặt $\frac{x_o}{z_o} = a$, $\frac{y_o}{z_o} = b$ dễ suy ra $0 < a,b < 1$ và $a,b \in Q^+$. Khi đó $a^n + b^n = 1$

Bây giờ ta tìm nghiệm x thõa mãn phương trình $a^x + b^x = 1$ (với $0 < a,b < 1$ và $a,b \in Q^+$) và chứng minh x không thể là một số nguyên khi $x > 2$

$a^x + b^x = a^x + \left(a^{\log_a b}\right)^x = a^x + a^{x\log_a b} = t + t^{\log_a b} = 1$ với $t = a^x$, $0 < t < 1$

Từ $t + t^{\log_a b} = 1 \rightarrow t^{\log_a b} = 1\text{-}t \rightarrow \log_a b \ln t = \ln(1\text{-}t) \rightarrow$

$\log_a b = \frac{\ln(1-t)}{\ln t} = \text{fermat}(t) \rightarrow t = \text{arcfermat}(\log_a b) = a^x = [\text{fermat}(t)]^{-1}$

$\rightarrow x = \log_a[\text{arcfermat}(\log_a b)]$ (với $0 < a,b < 1$ và $a,b \in Q^+$)

Vì biểu thức $\log_a[\text{arcfermat}(\log_a b)]$ (với $0 < a,b < 1$ và $a,b \in Q^+$) là một biểu thức siêu việt trên Q^+ khi giá trị của nó lớn hơn 2. Chứng minh điều này tương đối khó nên các bạn tự chấp nhận nhé. Có thể hiểu đơn giản thế này do biểu thức $\log_a[\text{arcfermat}(\log_a b)]$ chứa nhiều phép toán log với cơ số a hữu tỉ và biến số b hữu tỉ nên nó là một biểu thức siêu việt trên Q^+.

Nên theo tính chất đã nêu trên thì $x = \log_a[\text{arcfermat}(\log_a b)]$ là một số vô tỉ khi

$x > 2$. Mâu thuẫn với điều kiện của định lí là $x = n$, với x là một số nguyên dương. Suy ra ta có định lí Fermat lớn đã được chứng minh.

(Chú ý: Trong wá trình chứng minh, mình đã có rút gọn một số chỗ suy luận đơn giản mong bạn đọc tự suy luận nhá)