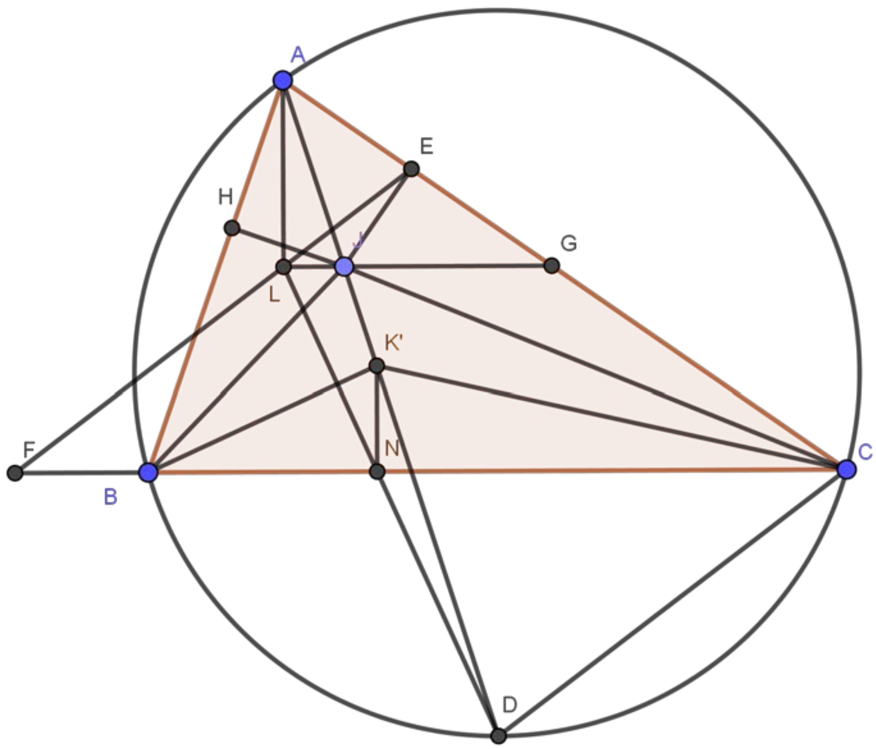
<u>Bài 1:</u> Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi J là một điểm bất kì trên tia phân giác của $\widehat{BAC}$. Gọi K là điểm liên hợp đẳng giác của J đối với ΔABC ($K \in AJ$). Gọi L là hình chiếu của J lên đường cao đỉnh A. Gọi N là hình chiếu của K trên BC. Chứng minh LN chia đôi cung nhỏ $\widehat{BC}$ của (O).

<u>Bài giải</u>



Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{BC}$ của (O). LD cắt BC tại N'. Qua N' kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AD tại K'. Gọi E là hình chiếu của J lên AC; LE cắt BC tại F, LJ cắt AC tại G.

Có: ALJE nội tiếp ($\widehat{ALJ} + \widehat{AEJ} = 90° + 90° = 180°$) => $\widehat{AEL} = \widehat{AJL} = 90° - \widehat{LAJ}$ $= 90° - (\widehat{BAJ} - \widehat{BAL}) = 180° - \widehat{B} - \widehat{DBC} = \widehat{ACD}$ => LE // CD (2 góc đồng vị).

Có: $\frac{JE}{AL} = \frac{EG}{LG} = \frac{EC}{FC}$ [Thales cho ΔEFC có LG // BC (cùng vuông góc với AL)] ⇔ $\frac{JE}{EC} = \frac{AL}{FC}$. Lại có $\frac{AL}{K'N'} = \frac{DL}{DN'} = 1 + \frac{N'L}{DN'} = 1 + \frac{FN'}{CN'} = \frac{FC}{CN'}$ => $\frac{AL}{FC} = \frac{K'N'}{CN'} = \frac{JE}{EC}$ => $\Delta JEC \sim \Delta K'N'C$ (c. g. c) => $\widehat{ACJ} = \widehat{K'CB}$. (1)

Tương tự, gọi H là hình chiếu của J trên AB thì ta chứng minh được ΔHJB $\sim$ ΔN'K'N (c. g. c) => $\widehat{ABJ} = \widehat{K'BC}$ (2)

Từ (1) và (2), kết hợp với $\widehat{ABJ} = \widehat{CAK'}$ => K' là điểm liên hợp đẳng giác của J đối với ΔABC => K' ≡ K => N' ≡ N => Ba điểm L, N, D thẳng hàng.

Vậy LN chia đôi cung nhỏ $\widehat{BC}$ của (O).