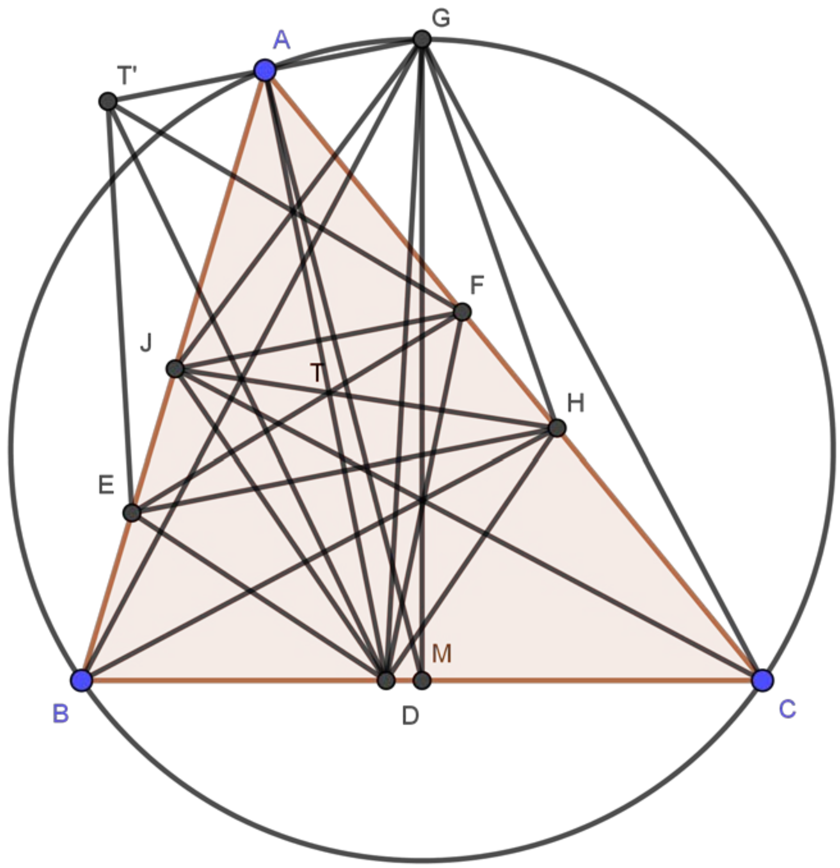
<u>**Bài 2:**</u> Cho ΔABC có $AB > AC$, đường phân giác trong AD và trung tuyến AM. Trên đoạn AB, AC lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho $DE = DB$, $DF = DC$. Trên tia phân giác ngoài đỉnh A của tam giác ABC, lấy điểm T sao cho $\widehat{ATD} = \widehat{AMD}$. Chứng minh rằng A, E, F, T đồng viên.

<u>**Bài giải**</u>



Gọi T' là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp ΔAEF với tia phân giác ngoài đỉnh A của ΔABC; G là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ chứa A của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Dễ thấy ba điểm T', A, G thẳng hàng. Ta có tứ giác AGMD nội tiếp ($\widehat{GAD} + \widehat{GMD} = 90° + 90° = 180°$) => $\widehat{AMD} = \widehat{AGD} = \widehat{ATD}$ => ΔDTG cân tại D => T đối xứng G qua A.

Đường tròn ngoại tiếp ΔABD cắt đoạn thẳng AC tại H => $\widehat{BAD} = \widehat{BHD} = \widehat{DAC} = \widehat{DBH}$ => ΔDBH cân tại D => $DB = DH = DE$. Tương tự, đường tròn ngoại tiếp ΔADC cắt đoạn thẳng AB tại J thì $DJ = DH = DC$. Lại có $BJ.\,BA = DB.\,BC$; $CH.\,CA$

$= CD.CB$ (do tứ giác AHBD và AEDC nội tiếp) $\Leftrightarrow \frac{BJ}{CH}.\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{BJ}{CH}.\frac{DB}{DC} \Leftrightarrow$ $BJ = CH$. Lại có $GB = GC$ và $\widehat{JBG} = \widehat{HCG}$ => $\Delta JBG = \Delta HCG$ (c. g. c) => $GJ = GH$ và $\widehat{BJG} = \widehat{CHG} \Leftrightarrow \widehat{AJG} = \widehat{AHG}$ => AJHG nội tiếp.

Ta có: $\widehat{AHD} = 180° - \widehat{BED} = \widehat{AED}$. Lại có $\widehat{EAD} = \widehat{HAD}$ => $\widehat{ADE} = \widehat{ADH}$. Mà $DE = DH$ => $\Delta ADE = \Delta ADH$ (c. g. c) => AD là đường trung trực của EH => $AD \perp EH$. Tương tự, ta chứng minh được $JF \perp AD$ => JF // EH => $\widehat{AJF} = \widehat{AEH} = \widehat{AHE}$ => JFHE là hình thang cân => $\widehat{T'GH} = \widehat{EJH} = \widehat{EFH} = \widehat{ET'G}$. Lại có T'GHE là hình thang (do T'G // EH // JF) => T'GHE là hình thang cân => T'E = HG và $\widehat{T'EH} = \widehat{GHE}$ => $\widehat{T'EA} = \widehat{GHA}$ (do $\widehat{AEH} = \widehat{AHE}$). Lại có AE = AH => $\Delta T'EA = \Delta GHA$ (c. g. c) => AT' = AG => T' đối xứng G qua A => $T' \equiv T$.

Vậy A, E, F, T đồng viên.