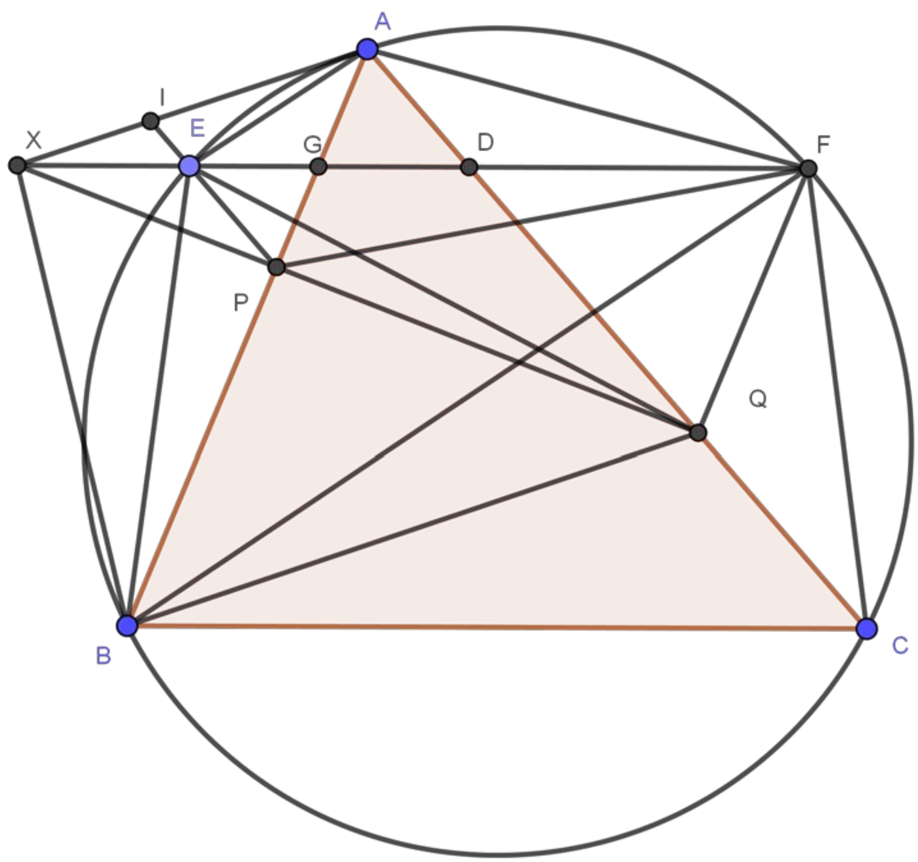
Bài 4: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). E, F nằm trên (O) sao cho EF // BC. Đường thẳng qua E song song AC cắt AB ở P. Đường thẳng qua F song song AB cắt AC tại Q. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt EF tại X. Chứng minh rằng X, P, Q thẳng hàng.

Bài giải



PQ cắt EF tại X'. EF lần lượt cắt AB, AC tại G, D. PE cắt AX' tại I.

Ta có: $\widehat{EPA} = \widehat{A} = \widehat{AQF}$ và $\widehat{EAP} = \widehat{QAF}$ [do hình thang cân BEFC nội tiếp (O)] $\Rightarrow \Delta AEP \sim \Delta AFQ$ (g. g) $\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AP}{AQ} = \frac{PE}{QF} \Leftrightarrow \frac{AP}{AQ} . \frac{AD}{PE} . \frac{QF}{AD} = 1 \Leftrightarrow \frac{AP}{AD} . \frac{GA}{GP} . \frac{QF}{QA} = 1$ [theo Thales cho ΔEGP và ΔDGA có EP // AD (g/t)].

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔPAQ có X', G, D thẳng hàng, ta có: $\frac{DQ}{DA} \cdot \frac{GA}{GP} \cdot \frac{X'P}{X'Q} = 1 \Leftrightarrow \frac{DQ}{DA} \cdot \frac{GA}{GP} \cdot \frac{PI}{AQ} = 1$ (Thales cho ΔX'AQ có PI // AQ) $= \frac{AP}{AD} \cdot \frac{GA}{GP} \cdot \frac{QF}{QA}$ (cmt)

$\Leftrightarrow \frac{AP.QF}{AD.AQ} \cdot \frac{GA}{GP} = \frac{DQ.PI}{AD.AQ} \cdot \frac{GA}{GP} \Leftrightarrow \frac{AP}{DQ} = \frac{PI}{QF}$. Lại có $\widehat{API} = \widehat{DQF}$ (cmt) => $\Delta API \sim \Delta AQF$ (c. g. c) => $\widehat{X'AB} = \widehat{QDF} = \hat{C}$ (2 góc so le trong) => X'A là tiếp tuyến của (O) => X' ≡ X. Vậy X, P, Q thẳng hàng.