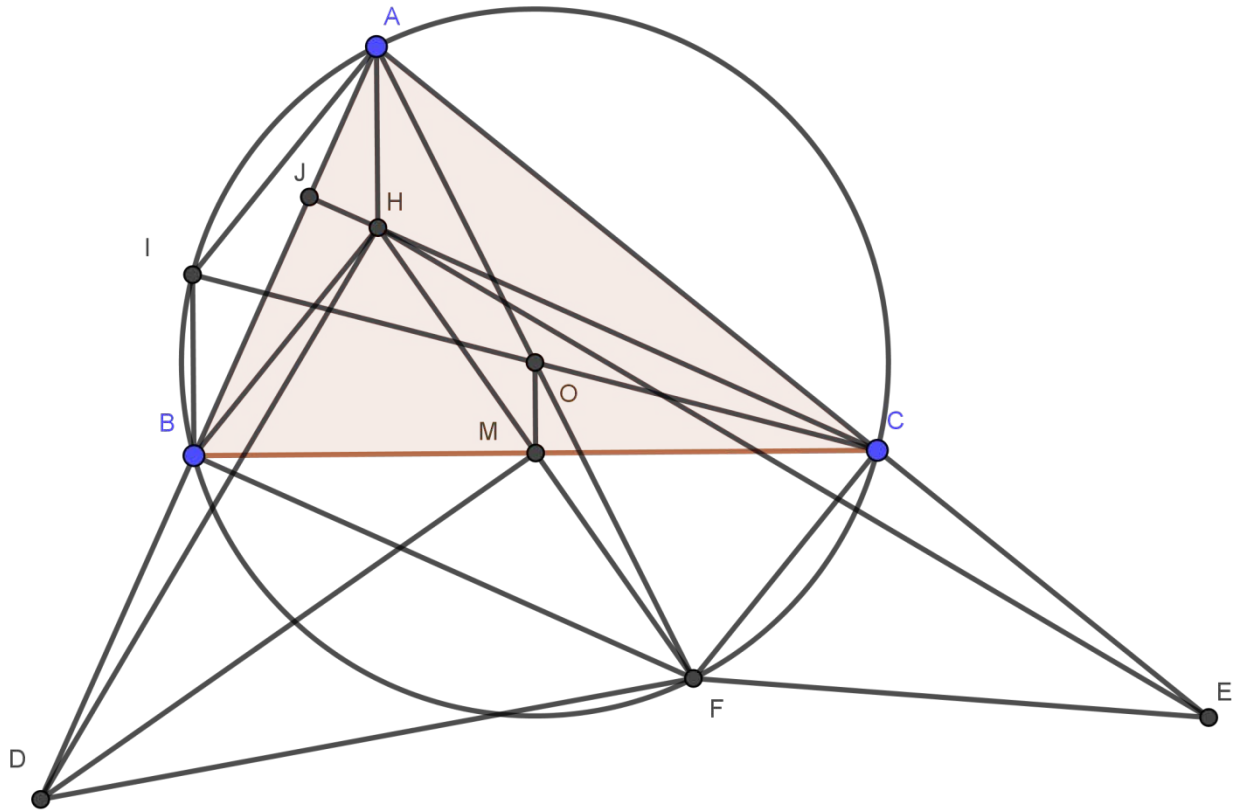


**Bài 5:** Cho  $\Delta ABC$  có trực tâm H. Gọi M là trung điểm BC. Đường thẳng qua M vuông góc với HM cắt AB tại D. Đường thẳng qua H vuông góc với HD cắt AC tại E. Gọi F là điểm đối xứng với H qua M. Chứng minh rằng A, H, F và E cùng thuộc một đường tròn.

**Bài giải**



Do HF và BC cắt nhau tại M là trung điểm của mỗi đường  $\Rightarrow$  BHCF là hình bình hành  $\Rightarrow$  CH // BF. Mà CH  $\perp$  AB  $\Rightarrow$  BF  $\perp$  AB  $\Rightarrow \widehat{DBF} = \widehat{DMF} = 90^\circ$  [do DM là trung trực HF (g/t)]  $\Rightarrow$  DBMF nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{HDM} = \widehat{FHE}$  (cùng phụ  $\widehat{DHM}$ )  $= \widehat{MDF} = \widehat{MBF} = \widehat{HCB}$ . Gọi O là trung điểm AF thì do  $\Delta ABF$  vuông tại B (cmt)  $\Rightarrow$  OA = OB = OF. Tương tự, ta chứng minh được  $\Delta ACF$  vuông tại C  $\Rightarrow$  OF = OA = OB = OC  $\Rightarrow$  O là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ . Cho CO cắt đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  tại I, CH cắt AB tại J thì do  $\widehat{AIC} = \widehat{JBC}$ ;  $\widehat{IAC} = \widehat{BJC} = 90^\circ \Rightarrow \Delta IAC \sim \Delta JBC$  (g.g)  $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{BCH} = \widehat{FAE} = \widehat{FHE}$  (cmt)  $\Rightarrow$  AHFE nội tiếp.

Vậy A, H, F và E cùng thuộc một đường tròn.