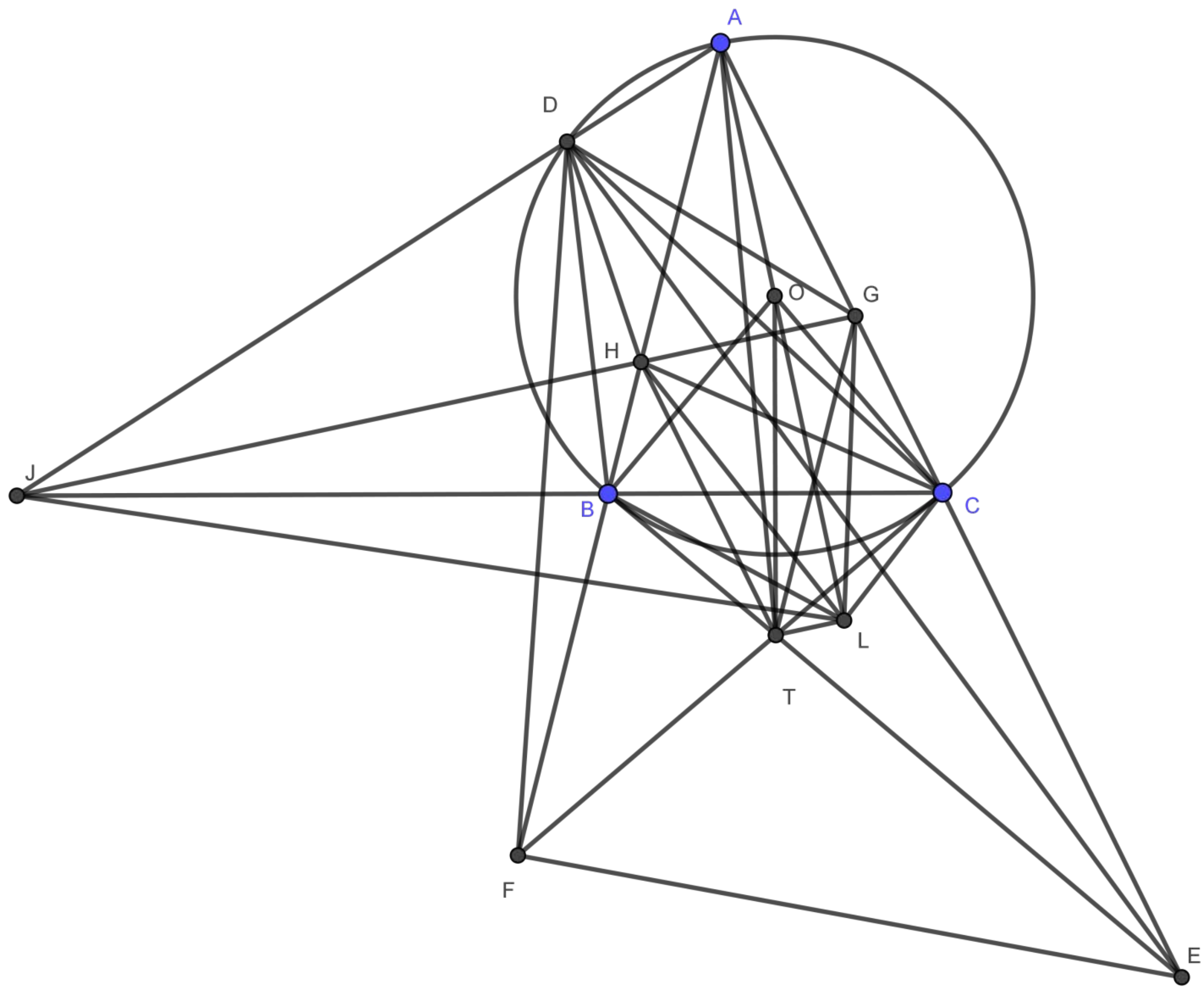
Bài 3: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi T là giao điểm hai tiếp tuyến tại B và C của (O). TB cắt AC tại E, TC cắt AB tại F. Gọi L là hình chiếu của T lên AO. Đường tròn ngoại tiếp ΔAEF cắt (O) tại điểm thứ hai D. AD cắt BC tại J. Chứng minh rằng JA = JL.

Bài giải



Trung trực đoạn thẳng AC cắt AB tại H, trung trực đoạn thẳng AB cắt AC tại G. Ta có: $\widehat{AHC} = 180° - 2\widehat{A} = 180° - \widehat{BOC} = \widehat{BTC}$ => HBTC nội tiếp => $\widehat{BHT} = \widehat{BCT} = \widehat{A}$ => HT // AG (dhnb). Tương tự, ta chứng minh được GBTC nội tiếp => GT // AH và 5 điểm H, B, T, C, G cùng thuộc một đường tròn => AHTG là hình bình hành => AH = TG và AG = TH.

Theo Thales cho ΔBAE có HT // AE => $\frac{BH}{AB} = \frac{HT}{AE} = \frac{AG}{AE} \Leftrightarrow \frac{BH}{AG} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB - BH}{AE - AG} = \frac{AH}{GE} \Leftrightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{GE}{GA} \Leftrightarrow$ AH. GA = GE. HB. Lại theo Thales cho ΔCAF có

GT // AF => $\frac{GC}{CA} = \frac{GT}{AF} = \frac{AH}{AF} \Leftrightarrow \frac{GC}{AH} = \frac{CA}{AF} = \frac{CA-CG}{AF-AH} = \frac{AG}{HF}$ => GC. HF = AH. AG = GE. HB $\Leftrightarrow \frac{BH}{GC} = \frac{HF}{GE} = \frac{HF-HB}{GE-GC} = \frac{BF}{EC}$. Lại có $\widehat{DFB} = \widehat{DEC}$; $\widehat{DBF} = \widehat{DCE}$ (do $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$) => $\Delta DBF \sim \Delta DCE$ (g. g) => $\frac{BF}{EC} = \frac{DB}{DC} = \frac{BH}{GC}$. Mà $\widehat{DBH} = \widehat{DCG}$ => $\Delta DBH \sim \Delta DGC$ (c. g. c) => $\widehat{DHA} = \widehat{DGA}$ => ADHG nội tiếp => $\widehat{ADH} = \widehat{HGC} = \widehat{JBH}$ => JDHB nội tiếp => $\widehat{JHB} = \widehat{JDB} = \hat{C} = 180° - \widehat{BHG} \Leftrightarrow \widehat{JHB} + \widehat{BHG} = 180°$ => Ba điểm J, H, G thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{OLT} = \widehat{OCT} = 90°$ => OTCL nội tiếp. Mà OCTB nội tiếp => 5 điểm O, C, L, T, B cùng thuộc một đường tròn => OCLB nội tiếp => $\widehat{ACL} = \hat{C} + \widehat{BCL} = \hat{C} + \widehat{BOL} = \hat{C} + 180° - \widehat{BOA} = \hat{C} + 180° - 2.\hat{C} = 180° - \hat{C} = \hat{B} + \hat{A} = \hat{B} + \widehat{BTC} = \widehat{ABT}$ => $\widehat{HCL} = \widehat{ACL} - \hat{A} = \hat{B} + \hat{A} - \hat{A} = \hat{B} = \widehat{HLC}$ => ΔHLC cân tại H => HL = HC = HA. Tương tự, ta chứng minh được GA = GL => HG là đường trung trực của AL => JH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến ΔJAL => ΔJAL cân tại J => JA = JL (đpcm)