Những luận điểm của de Bruijn về lý thuyết Polya

Trương Phước Nhân, 04/02/2019

Nội dung của bài viết nhằm nhắc lại một số kết quả quan trọng của lý thuyết Polya mà ta đã giới thiệu trong các bài viết "**Lý thuyết Polya**", "**Bài toán đếm các cấu hình đối xứng**", "**Một số nguyên tắc cơ bản của phép đếm**" và đồng thời giới thiệu các mở rộng của chúng dưới quan điểm của tác giả de Bruijn.

Đầu tiên ta nhắc lại một số kiến thức nền tảng về lý thuyết nhóm cần thiết.

1. Kiến thức cơ bản

Nhóm là một tập G được trang bị một phép toán $\circ$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- Kết hợp: $\forall a,b,c \in G$, $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
- Phần tử đơn vị: $\exists e \in G$, $\forall a \in G$, $e \circ a = a \circ e = a$.
- Nghịch đảo: $\forall a \in G$, $\exists a^{-1} \in G$, $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Để thuận tiện cho việc trình bày ta kí hiệu gh thay cho lối kí hiệu $g \circ h$.

Cho trước một nhóm G và một tập X.

Tác động trái của nhóm G lên tập X là một hàm $\phi : G \times X \to X$ thỏa mãn các điều kiện:

- $\forall x \in X$, $\phi(e,x) = x$ trong đó e là phần tử đơn vị của nhóm G.
- $\forall g,h \in G$, $\forall x \in X$, $\phi(gh,x) = \phi(g,\phi(h,x))$.

Tác động phải của nhóm G lên tập X là một hàm $\phi : X \times G \to X$ thỏa mãn các điều kiện:

- $\forall x \in X$, $\phi(x,e) = x$ trong đó e là phần tử đơn vị của nhóm G.
- $\forall x \in X$, $\phi(x,gh) = \phi(\phi(x,g),h)$.

(trong các bài viết "**Lý thuyết Polya**", "**Bài toán đếm các cấu hình đối xứng**" ta có giải thích sơ qua ý nghĩa tổ hợp của khái niệm tác động trái/ tác động phải của nhóm lên một tập hợp).

Để đơn giản ta chỉ khảo sát các tác động trái của một nhóm lên một tập hợp và quy ước kí hiệu gx thay cho lối kí hiệu $\phi(g,x)$.

Từ định nghĩa vừa nêu trên ta suy ra một số tính chất cơ bản liên quan đến tác động của nhóm lên một tập như sau:

Kết quả 1.
Giả sử cho trước tác động ϕ của nhóm G lên tập X.
Khi đó, ánh xạ $f_\phi : x \mapsto gx$ là một song ánh với mọi $g \in G$.

Chứng minh kết quả 1.

Để chứng minh khẳng định trên ta cần chỉ ra ánh xạ ngược của f_ϕ.

Nhận thấy rằng $h_\phi : x \mapsto g^{-1}x$ chính là ánh xạ ngược cần tìm.

Thật vậy,

$$f_\phi(h_\phi(x)) = f_\phi(g^{-1}x) = g(g^{-1}x) = (gg^{-1})x = x,$$

$$h_\phi(f_\phi(x)) = h_\phi(gx) = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = x.$$

Điều này kết thúc phép chứng minh kết quả 1.

Trước khi trình bày tiếp tính chất cơ bản thứ hai ta cần giới thiệu một số khái niệm cơ bản liên quan

Giả sử cho trước tác động ϕ của nhóm G lên tập X.

Khi đó:

$\mathrm{Orb}(x) = \{gx : g \in G\} = \{y \in X | \exists g \in G : y = gx\}$ được gọi là quĩ đạo của phần tử x,

$\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G | gx = x\}$ được gọi là tập ổn định của phần tử x,

$\mathrm{Fix}(g)=\{x\in X|gx=x\}$ được gọi là tập các điểm bất động đối với g,

$X/G=\{\mathrm{Orb}(x):x\in X\}$ được gọi là tập thương của nhóm G đối với tập X.

$\mathrm{Trans}(x,y)=\{g\in G|gx=y\}$ được gọi là tập các phép liên hợp biến x thành y.

Kết quả 2.
Giả sử cho trước tác động ϕ của nhóm G lên tập X.
Khi đó, X/G là một phân hoạch của tập X.

Chứng minh kết quả 2.
Nhận xét rằng để chứng minh X/G là một phân hoạch của tập X ta cần chỉ ra rằng quan hệ $x\sim y\Leftrightarrow x,y\in\mathrm{Orb}(z)$ là một quan hệ tương đương.

Thật vậy,
- tính phản xạ: với mọi $x\in X$, $x\sim x$. (bởi vì $ex=x$ trong đó e là phần tử đơn vị của nhóm G)
- tính đối xứng: với mọi $x,y\in X$, $x\sim y\Rightarrow y\sim x$.
- tính bắc cầu: với mọi $x,y,z\in X$, nếu $x\sim y$ và $y\sim z$ thì $x\sim z$.

Điều này chỉ ra rằng X/G là một phân hoạch của tập X.

Kết quả 3.
Giả sử cho trước tác động ϕ của nhóm G lên tập X.
Khi đó, với mọi $x\in X$, $\mathrm{Stab}(x)$ là một nhóm con của G.

Chứng minh kết quả 3.
Nhận xét rằng tính chất kết hợp của $\mathrm{Stab}(x)$ được suy ra trực tiếp từ sự kiện G là một cấu trúc nhóm.

Do đó ta chỉ cần kiểm chứng thêm tính chất đóng, sự tồn tại của phần tử đơn vị và sự tồn tại phần tử nghịch đảo.

Xét $g_i,g_j\in\mathrm{Stab}(x)$ và $x\in X$:

- Tính đóng:

Do $g_i\left(g_jx\right)=g_jx=x$ nên $\left(g_ig_j\right)x=x$, hay $g_ig_j\in\mathrm{Stab}(x)$.

- Phần tử đơn vị:

Hiển nhiên $e\in\mathrm{Stab}(x)$, bởi vì $ex=x$.

- Phần tử nghịch đảo:

Do $g_ix=x$ nên $g_i^{-1}\left(g_ix\right)=g_i^{-1}x$.

Khi đó, $g_i^{-1}x=\left(g_i^{-1}g_i\right)x=ex=x$, hay $g_i^{-1}\in\mathrm{Stab}(x)$.

Lưu ý do $\mathrm{Stab}(x)$ là một cấu trúc nhóm nên thông thường ta sẽ dùng thuật ngữ nhóm con ổn định để chỉ $\mathrm{Stab}(x)$ thay cho cách gọi tập ổn định.

Kết quả 4.
Giả sử cho trước tác động ϕ của nhóm G lên tập X.
Khi đó, $|G|=|\mathrm{Stab}(x)||\mathrm{Orb}(x)|$.

Chứng minh kết quả 4.
Đầu tiên ta xét phần tử $g\in G$ và $x\in X$ bất kì.

Bổ đề. Với mọi $y\in\mathrm{Orb}(x)$, $|\mathrm{Stab}(x)|=|\mathrm{Trans}(x,y)|$.

Chứng minh bổ đề.

Để chứng minh khẳng định nêu trong bổ đề ta cần chỉ ra song ánh giữa $\mathrm{Stab}(x)$ và $\mathrm{Trans}(x,y)$.

Giả sử $g_{xy} \in \text{Trans}(x,y)$ và $g_{xx} \in \text{Stab}(x)$.

Hiển nhiên $g_{xy}g_{xx}x = g_{xy}x = y$ nên $g_{xy}g_{xx} \in \text{Trans}(x,y)$.

Hơn nữa, từ cách định nghĩa $\text{Trans}(x,y)$ suy ra $g_{xy}x = y$, nên $g_{xy}^{-1}y = g_{xy}^{-1}g_{xy}x = ex = x$.

Do đó, $g_{xy}^{-1} \in \text{Trans}(y,x)$.

Hiển nhiên $g_{xy}^{-1}g_{xy} \in \text{Stab}(x)$.

Từ tính chất lí thú nêu ở nêu ta xây dựng song ánh ψ từ $\text{Stab}(x)$ vào $\text{Trans}(x,y)$ bằng cách đặt phần tử g_{xx} tương ứng với phần tử hg_{xx} trong đó $h \in \text{Trans}(x,y)$ là một phần tử được chọn trước bất kì.

Ý tưởng để chứng minh ánh xạ ψ là một song ánh nằm ở việc chỉ ra ánh xạ ngược của ψ.

Định nghĩa ánh xạ χ từ $\text{Trans}(x,y)$ vào $\text{Stab}(x)$ bằng cách đặt tương ứng g_{xy} với $h^{-1}g_{xy}$.

Nhận xét

$$\psi(\chi(g_{xy})) = \psi(h^{-1}g_{xy}) = hh^{-1}g_{xy} = g_{xy},$$

$$\chi(\psi(g_{xx})) = \chi(hg_{xx}) = h^{-1}hg_{xx} = g_{xx}.$$

Do đó, ψ là một song ánh, nên $|\text{Stab}(x)| = |\text{Trans}(x,y)|$.

Từ bổ đề ta nhận thấy $|\text{Trans}(x,y)| = |\text{Stab}(x)|$ với mọi $y \in \text{Orb}(x)$.

Nhận xét $\{\text{Trans}(x,y) : y \in \text{Orb}(x)\}$ đóng vai trò là một phân hoạch của G nên $|G| = |\text{Stab}(x)||\text{Orb}(x)|$.

Lưu ý rằng từ hệ thức vừa nêu trên ta có thể tính được kích thước của một nhóm con ổn định bất kì hoặc số phần tử trong một quĩ đạo nếu biết được giá trị của trị số còn lại.

Kết quả 5. (Burnside/Cauchy)

Giả sử cho trước tác động ϕ của nhóm hữu hạn G lên tập hữu hạn X.

Khi đó, số các quỹ đạo phân biệt được xác định bởi công thức $|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\text{Fix}(g)|$.

Chứng minh kết quả 5.

Nhận xét $\sum_{g\in G}|\text{Fix}(g)| = |(g,x) \in (G,X) : gx = x| = \sum_{x\in X}|\text{Stab}(x)|$ nên $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\text{Fix}(g)| = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|\text{Stab}(x)|$.

Mặt khác, do $|\text{Stab}(x)| = \frac{|G|}{|\text{Orb}(x)|}$ nên $\frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|\text{Stab}(x)| = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}\frac{|G|}{|\text{Orb}(x)|} = \sum_{x\in X}\frac{1}{|\text{Orb}(x)|}$.

Nhận xét do X/G là một phân hoạch của tập X nên $\sum_{x\in X}\frac{1}{|\text{Orb}(x)|} = \sum_{A\in X/G}\sum_{x\in A}\frac{1}{|A|} = \sum_{A\in X/G}1 = |X/G|$.

Do đó, $|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\text{Fix}(g)|$.

2. Ứng dụng vào bài toán đếm

Ta khảo sát lời giải bài toán đếm số các cách tô màu các phần tử của một tập X bởi các màu Y có tính thêm đến sự "đối xứng" của tập X.

Để thuận tiện ta mô hình lại bài toán bằng cách xem mỗi cách tô màu như một hàm $f \in Y^X$ và đồng nhất nó với tập các bộ sắp thứ tự $\{(x, f(x)) | x \in X\}$, tính "đối xứng" của tập X được xem như kết quả khi ta thực hiện tác động ϕ của một nhóm G lên tập X.

Do đó, bài toán đếm của ta có thể phát biểu lại dưới dạng ngôn ngữ của lý thuyết tác động nhóm như sau:

Giả sử cho trước tác động ϕ của nhóm G lên tập X, ta định nghĩa tác động ϕ' của nhóm G lên tập Y^X bởi $\phi' : (g, f) \mapsto f' = f \circ p_g^{-1} = \{(gx, f(x)) | x \in X\}$ với $f \in Y^X$.

Dễ dàng kiểm tra lại ϕ' thỏa mãn các điều kiện cơ bản của một tác động

- $\forall f \in Y^X$, $ef = \{(ex, f(x)) | x \in X\} = \{(x, f(x)) | x \in X\} = f$,
- $\forall g_1, g_2 \in G$, $f \in Y^X$, $g_1(g_2 f) = g_1 \{(g_2 x, f(x)) | x \in X\} = \{(g_1(g_2 x), f(x)) | x \in X\}$

$$= \{((g_1 g_2)x, f(x)) | x \in X\} = (g_1 g_2) f.$$

Hai hàm $f_1, f_2 \in Y^X$ được gọi là tương đương nhau dưới tác động của nhóm G, kí hiệu $f_1 \sim_G f_2$, nếu chúng nằm trong cùng một quỹ đạo dưới tác động của ϕ', tức là tồn tại $g \in G$ sao cho $f_1 = gf_2$.

Nhận thấy rằng khái niệm hàm tương đương thỏa mãn tất cả điều kiện của một quan hệ tương đương nên ta luôn có thể phân hoạch tập Y^X thành các lớp tương đương. Các lớp tương đương của quan hệ $\sim_G$ thường được gọi là cấu hình.

Kết quả 6.

Giả sử G là một nhóm bất kì và X, Y là các tập hữu hạn.

Khi đó, với mọi tác động ϕ của nhóm G lên tập X, số các cấu hình phân biệt của Y^X được xác định bởi công thức $\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |Y|^{c(g)}$ trong đó $c(g)$ là số các chu trình trong phân tích của hoán vị của tập X liên kết với tác động của g trên X.

Chứng minh kết quả 6.

Nhận xét rằng các cấu hình phân biệt của Y^X chính là các quỹ đạo của tác động ϕ' tức là bằng $|Y^X/G|$.

Áp dụng bổ đề Burnside cho tập Y^X với tác động ϕ', ta thu được $|Y^X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$.

Nhận xét thêm rằng $|\mathrm{Fix}(g)| = |Y|^{c(g)}$.

Thật vậy, một hàm $f \in Y^X$ bất kì giữ nguyên không đổi dưới tác động của phần tử g nếu và chỉ nếu tất cả các phần tử trong X trong mỗi chu trình đều được gán tương ứng với cùng một tập phần tử trong Y.

Bởi vì có $|Y|$ cách để chọn các phần tử trong Y để gán tương ứng cho một chu trình trong số $c(g)$ chu trình trong phân hoạch của g nên $|\mathrm{Fix}(g)| = |Y|^{c(g)}$, điều phải chứng minh.

Nhận xét rằng kết quả 6) ở trên chỉ cho phép ta tính toán số các cấu hình phân biệt tổng thể nhưng trong nhiều tình huống ta cần phải xác định số các cấu hình chỉ trên một phạm vi hẹp.

Ý tưởng để giải quyết ở đây là ta sẽ gán cho mỗi phần tử thuộc Y một trọng lượng $w : Y \to \mathbb{R}$.

Khi đó, trọng lượng của hàm $f \in Y^X$ được định nghĩa là $W(f) = \prod_{x \in X} w(f(x))$.

Tính đúng đắn trong cách đặt của định nghĩa trên được suy ra từ kết quả sau:

Kết quả 7.

Tất cả các hàm nằm trong cùng một cấu hình sẽ có cùng một trọng lượng.

Chứng minh kết quả 7.

Xét hai hàm bất kì $f_1, f_2 \in Y^X$ nằm trong cùng một cấu hình.

Do $f_1 \sim_G f_2$ nên tồn tại một phần tử $g \in G$ sao cho $f_1(gx) = f_2(x)$.

Nhận xét rằng từ kết quả 1) ta cũng suy ra được rằng $W(f)=\prod_{x\in X} w(f(x))$ với mọi $g\in G$.

Do đó, $W(f_1)=\prod_{x\in X} w(f_1(x))=\prod_{x\in X} w(f_1(gx))=\prod_{x\in X} w(f_2(x))=W(f_2)$.

Để xác định số các cấu hình khi cần tính thêm các yếu tố phụ nào đó ta sẽ cần đến việc phải khảo sát hàm sinh cấu hình $\mathrm{CGF}(C)=\sum_{c\in C} W(c)$ trong đó C là tập tất cả các cấu hình phân biệt c.

Giả sử cho trước tác động ϕ của nhóm hoán vị G của tập X, $|X|=n$.

Loại của một hoán vị p của tập X là bộ số $(b_1,b_2,...,b_n)$ trong đó b_i là số các chu trình có độ dài bằng i trong phân hoạch của hoán vị p,

Đa thức chỉ số chu trình Z_ϕ của tác động ϕ được định nghĩa bởi

$$Z_\phi(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\prod_{i=1}^{n} x_i^{b_i(g)},$$

trong đó $b_i(g)$ là số các chu trình có độ dài i của hoán vị $g\in G$.

Sau đây là một dạng mở rộng cho kết quả 6) vừa chứng minh ở trên có tính thêm các trọng lượng:

Kết quả 8.

Giả sử G là một nhóm bất kì, X,Y là các tập hữu hạn trong đó $|X|=n$.

Khi đó, với mọi tác động ϕ của nhóm G lên tập X và mọi hàm trọng lượng w xác định trên tập Y, hàm sinh cấu hình được xác định bởi công thức $\mathrm{CGF}(C)=Z_\phi\left(\sum_{y\in Y} w(y),\sum_{y\in Y} w(y)^2,...,\sum_{y\in Y} w(y)^n\right)$ trong đó $b_i(g)$ là số các chu trình có độ dài bằng i trong phân hoạch của hoán vị tương ứng liến kết với phần tử g.

Chứng minh kết quả 8.

Đầu tiên ta có bổ đề phụ như sau

Bổ đề. $|C|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|\left\{f\in Y^X \mid \forall x\in X, f(gx)=f(x)\right\}\right|$.

Chứng minh bổ đề.

Giả sử ϕ'_R là tác động trái lên tập Y^X được cảm sinh bởi ϕ xác định bởi:

$$\phi'_R:(f,g)\mapsto f'_R=f\circ p_g=\left\{\left(x,f(\phi(g,x))\right) \mid x\in X\right\},$$

trong đó $f\in Y^X$ và $g\in G$.

Bằng cách áp dụng bổ đề Burnside cho tác động ϕ'_R trên tập Y^X ta thu được ngay kết quả cần chứng minh trong bổ đề.

Xét tác động ϕ'_R lên tập Y^X.

Đặt:

$A(w)=\{c\in C \mid W(c)=w\}$ là tập tất cả các cấu hình có cùng trọng lượng w,

$S_{gg}=\{f\in Y^X \mid fg=f\}$ là tập tất cả các hàm ổn định dưới tác động của g,

$S_{gg}(w)=\{f\in Y^X \mid W(f)=w, fg=f\}$ là tập tất cả các hàm ổn định dưới tác động của g và có cùng trọng lượng w.

Từ bổ đề 1) ta có $\left|A(w)\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|S_{gg}(w)\right|$.

Khi đó, bằng cách nhóm các số hạng của hàm sinh CGF theo trọng lượng ta có

$$\mathrm{CGF} = \sum_{c\in C} W(c) = \sum_{w} w\left|A(w)\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{w} w\left|A(w)\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{w}\sum_{g\in G} w\left|S_{gg}(w)\right|.$$

Do tổng là hữu hạn nên ta có thể thay đổi thứ tự lấy tổng và do đó

$$\mathrm{CGF} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{w} w\left|S_{gg}(w)\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{f\in S_{gg}} W(f).$$

Nhận xét rằng từ kết quả 1) nhóm G hoán vị các phần tử của tập X dưới tác động của nhóm G lên tập X.

Giả sử hoán vị p_g tương ứng với tác động của phần tử $g\in G$ có dạng phân tích cơ bản có dạng $C_1, C_2, ..., C_k$ với $k \le n$.

Từ nhận xét và giả thiết trên ta suy ra rằng nếu $f\in S_{gg}$ thì $f(x) = f(gx) = f(g^2x) = ...$ với mọi $x\in X$ và f là hằng trên mỗi chu trình C_i.

Khi đó,

$$\sum_{f\in S_{gg}} W(f) = \sum_{f\in S_{gg}}\prod_{x\in X} w(f(x)) = \sum_{f\in S_{gg}}\prod_{i=1}^{k}\prod_{x\in C_i} w(f(x)) = \sum_{f\in S_{gg}}\prod_{i=1}^{k} w(f(x))^{|C_i|}.$$

Giả sử $|Y| = m$, nhận thấy rằng khi thực hiện phép lấy tổng trên tất cả các hàm $f\in S_{gg}$ thì ta đã vét sạch tất cả các khả năng có thể xảy ra của $y\in Y$ với các chu trình C_i.

$$\sum_{f\in S_{gg}}\prod_{i=1}^{k} w(f(x))^{|C_i|} = \prod_{i=1}^{k}\left(w(y_1)^{|C_i|} + ... + w(y_m)^{|C_i|}\right) = \prod_{i=1}^{k}\left(w(y_1)^{|C_i|} + ... + w(y_m)^{|C_i|}\right) = \prod_{i=1}^{k}\sum_{y\in Y} w(y)^{|C_i|}.$$

Do đó,

$$\mathrm{CGF} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{f\in S_{gg}} W(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\prod_{i=1}^{k}\sum_{y\in Y} w(y)^{|C_i|}.$$

Từ định nghĩa độ dài của một chu trình và định nghĩa về loại của hoán vị, ta nhận thấy rằng hoán vị tương ứng với phần tử $g\in G$ sẽ có $b_j(g)$ chu trình có độ dài bằng j trong dạng phân tích cơ bản

$$\mathrm{CGF} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{y\in Y} w(y)^{j}\right)^{b_j(g)} = Z_{\phi}\left(\sum_{y\in Y} w(y), \sum_{y\in Y} w(y)^2, ..., \sum_{y\in Y} w(y)^n\right). \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét rằng nếu ta xét hàm trọng lượng $w(y) = 1$ với mọi $y\in Y$ thì $W(f) = 1$ với mọi $f\in Y^X$.

Bằng cách sử dụng kết quả 8) ta tính được số các cấu hình phân biệt xác định bởi

$$Z_{\phi}(|Y|, ..., |Y|) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Y|^{c(g)}.$$

Đây chính là kết quả 6) mà ta đã chứng minh trước đó.

3. Những luận điểm mở rộng của de Bruijn

Trong phần cơ bản ta đã xét tác động ϕ của nhóm G lên tập X để cảm sinh tác động ϕ' trên tập Y^X.

Khi đó, tác động $\phi' : (g, f) \mapsto f' = \{(\phi(g,x), f(x))\}$ hoán vị đồng thời cả tập X, $f(X)$ và sự hoán vị này hoàn toàn phụ thuộc vào ϕ.

Ý tưởng của tác giả de Bruijn nằm ở chỗ xét thêm một tác động ψ của một nhóm H lên tập Y độc lập với tác động ϕ.

Đầu tiên ta mở rộng khái niệm về sự tương đương giữa hai hàm:

Hai hàm $f_1, f_2 \in Y^X$ được gọi là tương đương nếu $\exists g \in G, h \in H$ sao cho $f_1(gx) = hf_2(x)$ với mọi $x \in X$, kí hiệu $f_1 \sim_{gh} f_2$.

Dễ dàng chứng minh được rằng quan hệ $\sim_{gh}$ vừa định nghĩa là một quan hệ tương đương.

Lưu ý rằng đối với định nghĩa mở rộng vừa nêu các hàm số tương đương với nhau có thể không có cùng trọng lượng.

Tuy nhiên, nếu giả sử rằng trọng lượng của các hàm số tương đương là bằng nhau thì ta thu được kết quả sau:

Kết quả 9.

Giả sử các nhóm G, H tác động lên các tập X, Y các tác động lần lượt là ϕ và ψ.

Gọi $\omega : Y \to \mathbb{R}$ là hàm trọng lượng liên kết với tập Y và giả sử rằng trọng lượng của các hàm tương đương là bằng nhau.

Khi đó, $\mathrm{CGF} = \dfrac{1}{|G||H|} \sum_{(g,h) \in G \times H} \sum_{f \in S_{(g,h)}} W(f)$, trong đó $S_{(g,h)}$ là tập tất cả các hàm $f \in Y^X$ được giữ ổn định bởi (g,h) tức là $S_{(g,h)} = \left\{ f \in Y^X | f(gx) = hf(x), \forall x \in X \right\}$.

Chứng minh kết quả 9.

Nhận xét rằng điều kiện tương đương của hai hàm bất kì có thể biểu diễn lại dưới dạng:

$$f_1 \sim_{gh} f_2 \Leftrightarrow \exists (g,h) \in G \times H, \forall x \in X, h^{-1} f_1(gx) = f_2(x).$$

Khi đó ta có thể xây dựng một tác động phải χ của nhóm $G \times H$ lên tập Y^X liên kết với quan hệ $\sim_{gh}$ theo công thức như sau:

$$\chi(f, (g,h)) = h^{-1} f g,$$

trong đó phần tử $g \in G$ tác động phải lên hàm $f \in Y^X$ bởi tác động $\phi' : (f, g) \mapsto f_\phi' = \left\{ \left(x, f\left(\phi(g, x) \right) \right) \right\}$ và phần tử $h \in H$ tác động trái lên hàm $f \in Y^X$ bởi tác động $\psi' : (h, f) \mapsto f_\psi' = \left\{ \left(x, \psi\left(h, f(x) \right) \right) \right\}$.

Thật vậy,

$$f_2 = \left\{ \left(x, f_2(x) \right) \right\} = f_1(g,h) = h^{-1} f_1 g = h^{-1} \left(\left\{ \left(x, f_1(gx) \right) \right\} \right) = \left\{ \left(x, h^{-1} f_1(gx) \right) \right\}.$$

Xét tác động χ của nhóm $G \times H$ lên tập Y^X và đặt

$$A(w) = \left\{ c \in C | W(c) = w \right\},$$

$$S_{(g,h)}(w) = \left\{ f \in Y^X | f(g,h) = f, W(f) = w \right\}.$$

Áp dụng bổ đề Burnside cho tác động χ, ta thu được kết quả

$$|A(w)| = \frac{1}{|G \times H|} \sum_{(g,h) \in G \times H} \left| S_{(g,h)}(w) \right|.$$

Bằng cách nhóm các số hạng lại theo trọng lượng,

$$\mathrm{CGF} = \sum_{c \in C} W(c) = \sum_w w |A(w)| = \frac{1}{|G \times H|} \sum_w \sum_{(g,h) \in G \times H} w \left| S_{(g,h)}(w) \right| = \frac{1}{|G||H|} \sum_{(g,h) \in G \times H} \sum_{f \in S_{(g,h)}} W(f).\ \text{(đpcm)}$$

4. Định lý Bruijn

Mặc dù ta đã có triển khai vấn đề đếm số các lớp cấu hình phân biệt ở các kết quả 6) và kết quả 8) nhưng lại chưa thu được dạng đơn giản cho CGF. Do đó, phần việc còn lại ở đây chính là thu gọn lại biểu thức tính cho CFG.

Để đơn giản vấn đề có thể đặt $w(y)=1$, ta nhận thấy rằng số các quỹ đạo cần tính là $Z_\phi(|Y|,...,|Y|)$.

Để giải quyết vấn đề này ta cần đến bổ đề Burnside, như sau:

Kết quả 10. (de Bruijn)

Giả sử nhóm G tác động lên tập hữu hạn X thông qua tác động ϕ, và nhóm H tác động lên tập hữu hạn Y thông qua tác động ψ.

Khi đó, số các lớp cấu hình phân biệt được tính bởi công thức

$$Z_\phi\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2},\frac{\partial}{\partial z_3},...\right)Z_\psi\left(e^{\sum\limits_k z_k},e^{2\sum\limits_k z_{2k}},e^{3\sum\limits_k z_{3k}},...\right)\Bigg|_{\{z_i\}=0}.$$

Chứng minh kết quả 10.

Giả sử $b_i(g),c_j(h)$ lần lượt là số các chu kì có độ dài bằng i của $g\in G$ và số các chu kì cómail độ dài bằng j của $h\in H$.

Đặt $|X|=n,|Y|=m$.

Khi đó, $b_i(g)=0,c_j(h)=0$ với mọi $g\in G,h\in H$ nếu $i>n$ và $j>m$, trong đó i,j chạy trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$.

Đầu tiên ta cần chứng minh một số bổ đề sau:

Bổ đề 1.

Nếu $f\in S_{(g,h)}$ thì $f(x)=y$, tức là $f(g^i x)=h^i y$ với mọi i.

Chứng minh bổ đề 1.

Do $fg=hf$ nên $fg^2=(fg)g=(hf)g=h(fg)=h(hf)=h^2 f$.

Bằng cách thực hiện quy nạp theo i:

$$fg^{i-1}=h^{i-1}f\Rightarrow fg^i=(fg^{i-1})g=(h^{i-1}f)g=h^{i-1}(fg)=h^{i-1}(hf)=h^i f.$$

Bổ đề 2.

Mỗi phần tử $f\in S_{(g,h)}$ biến mỗi chu trình C_X trong tập X thành một chu trình C_Y trong tập Y, trong đó $|C_Y|$ chia hết $|C_X|$.

Chứng minh bổ đề 2.

Xét một phần tử $f\in S_{(g,h)}$ với $g\in G,h\in H$ bất kỳ, tức là $fg=hf$.

Giả sử phần tử $x\in X$ nằm trong chu trình $C_{g,x}$ có độ dài j.

Khi đó, $C_{g,x}=\{x,gx,...,g^{j-1}x\}$ với $g^j x=x$.

Áp dụng bổ đề 1, $f(g^i x)=h^i f(x)$ với mọi số nguyên dương i.

Do đó, phần tử f biến chu trình $C_{g,x}$ thành chu trình $f(C_{g,x})=\{f(x),hf(x),h^2 f(x),...,h^{j-1}f(x)\}$, trong đó $h^j f(x)=f(g^j x)=f(x)$.

Bổ đề 3.

Tổng số các hàm được giữ ổn định bởi cặp phần tử (g,h) cho bởi công thức

$$\sum_{f\in S_{(g,h)}} W(f)=\prod_i\left(\sum_{j|i} jc_j(h)\right)^{b_i(g)}.$$

Chứng minh bổ đề 3.

Ta sẽ đếm số các hàm được giữ ổn định dựa trên nhận xét thu được từ phân tích của bổ đề 2.

Đầu tiên, giả sử $f\in S_{(g,h)}$.

Đối với mỗi chu trình $C_{g,i}$ trong phân tích của hoán vị $p_g\in Sym(X)$, ta chọn một phần tử $x_i\in C_{g,i}$ bất kỳ.

Bằng cách áp dụng kết quả phân tích của bổ đề 2), mỗi hoán vị $p_h\in Sym(Y)$ có $c_j(h)$ chu trình có độ dài bằng j trong phân tích và mỗi chu trình $C_{g,i}$ chỉ có thể được biến thành một chu trình có độ dài j là một ước số của i nên có $\sum_{j|i} jc_j(h)$ cách để ta chọn ra phần tử f biến phần tử x_i thành một phần tử $y\in Y$.

Do đó, có $\prod_i\left(\sum_{j|i} jc_j(h)\right)^{b_i(g)}$ cách để chọn các hàm để chúng được giữ ổn định bởi cặp phần tử (g,h), bởi vì mỗi hoán vị p_g có $b_i(g)$ chu trình có độ dài bằng i.

Bằng cách áp dụng bổ đề 3, ta nhận thấy rằng

$$\sum_{f\in S_{(g,h)}} W(f)=\left(c_1(h)\right)^{b_1(g)}.\left(c_1(h)+2c_2(h)\right)^{b_2(g)}.\left(c_1(h)+3c_3(h)\right)^{b_3(g)}\ldots$$

Lưu ý rằng mỗi số hạng trong tích trên đều có dạng a^b nên ý tưởng để thu được dạng đơn giản của công thức nằm ở chỗ ta biểu diễn chúng lại dưới dạng:

$$\left(\sum_{j|i} jc_j(h)\right)^{b_i(g)}=\frac{\partial^{b_i(g)}}{\partial z_i^{b_i(g)}}e^{\left(\sum_{j|i} jc_j(h)\right)z_i}\Bigg|_{z_i=0}.$$

Do đó,

$$\sum_{f\in S_{(g,h)}} W(f)=\left(\prod_i\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^{b_i(g)}\right)e^{\left(\sum_{j|i} jc_j(h)\right)\left(\sum_i z_i\right)}\Bigg|_{\{z_i\}=0}.$$

Nhận thấy rằng:

$$\left(\sum_{j|i} jc_j(h)\right)\left(\sum_i z_i\right)=\left(\sum_j jc_j(h)\sum_{k=1}^{\infty} z_{kj}\right).$$

Bằng cách đặt $r_i = \frac{\partial}{\partial z_i}, s_j = e^{j\sum_k z_{kj}}$.

Khi đó,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\prod_i \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^{b_i(g)} = Z_\phi(r_1, r_2, r_3, \ldots),$$

$$\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} e^{\left(\sum_{j|i} jc_j(h)\right)\left(\sum_i z_i\right)} = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} e^{\left(\sum_j jc_j(h)\right)\left(\sum_{k=1} z_{kj}\right)}$$

$$= \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\prod_j e^{\left(\sum_j jc_j(h)\sum_{k=1} z_{kj}\right)}$$

$$= \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\prod_j \left(e^{j\sum_{k=1} z_{kj}}\right)^{c_j(h)}$$

$$= Z_\psi(s_1, s_2, s_3, \ldots).$$

Sau cùng,

$$CGF = \frac{1}{|G||H|}\sum_{(g,h)\in G\times H}\sum_{f\in S_{(g,h)}} W(f)$$

$$= \left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\prod_i \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^{b_i(g)}\right)\left(\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} e^{\left(\sum_{j|i} jc_j(h)\right)\left(\sum_i z_i\right)}\right)$$

$$= Z_\phi\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}, \ldots\right) Z_\psi\left(e^{\sum_k z_k}, e^{2\sum_k z_{2k}}, e^{3\sum_k z_{3k}}, \ldots\right)\Bigg|_{\{z_i\}=0}.$$

Điều này kết thúc toàn bộ nội dung thảo luận của bài viết này.

<u>Tài liệu tham khảo:</u>

[1]. Alec Zhang, Polya's Enumeration,??/??/????

[2]. Trương Phước Nhân, Bài toán đếm các cấu hình đối xứng, 15/02/2018.

[3]. Trương Phước Nhân, Một số nguyên tắc cơ bản của phép đếm, 02/06/2018.

[4]. Trương Phước Nhân, Lý thuyết Pólya, 04/07/2018.