Bài T7/524:

Bổ đề: Cho x, y > 0. Khi đó ta có bất đẳng thức: $\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\ge\frac{1}{xy+1}$.

Chứng minh: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}=\frac{1}{\left(\sqrt{xy}.\sqrt{\frac{x}{y}}+1.1\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{xy}.\sqrt{\frac{y}{x}}+1.1\right)^2}$$
$$\ge\frac{1}{(xy+1)\left(\frac{x}{y}+1\right)}+\frac{1}{(xy+1)\left(\frac{y}{x}+1\right)}=\frac{1}{xy+1}.$$

Bổ đề được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Quay trở lại bài toán:

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2b-1}+\frac{1}{2c-1}+\left(4-\frac{4}{1+ab}\right)+\left(4-\frac{4}{1+bc}\right)+\left(4-\frac{4}{1+ca}\right)\ge 9$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2b-1}+\frac{1}{2c-1}+3\ge 4\left(\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1}\right).$$

Áp dụng bổ đề ta có $4\left(\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1}\right)\le\frac{8}{(a+1)^2}+\frac{8}{(b+1)^2}+\frac{8}{(c+1)^2}$. (*)

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{2a-1}+1\ge\frac{8}{(a+1)^2}$ (1).

Thật vậy, kết hợp với giả thiết $a\ge\frac{1}{2}$, ta có $(1)\Leftrightarrow(a-1)^2(a+4)\ge 0$ (luôn đúng).

Do đó (1) luôn đúng với mọi $a\ge\frac{1}{2}$.

Tương tự, ta có $\frac{1}{2b-1}+1\ge\frac{8}{(b+1)^2}$ (2); $\frac{1}{2c-1}+1\ge\frac{8}{(c+1)^2}$ (3).

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được:

$$\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2b-1}+\frac{1}{2c-1}+3\ge\frac{8}{(a+1)^2}+\frac{8}{(b+1)^2}+\frac{8}{(c+1)^2}.\ (**)$$

Từ (*), (**) ta có $\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2b-1}+\frac{1}{2c-1}+3\ge 4\left(\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1}\right)$.

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1.