Lời giải hình học cho bài toán giá trị lớn nhất của Fermat

Tác giả: Loredana Biacino.

Department of Mathematics and Applications via Cinthia 80126 Naples, Italy.

Người dịch: Thiện Trung Chế

Đại học Y dược thành phố Hồ Chí Minh

twitter facebook

Lời nói đầu

Newton từng nói :"nếu tôi có thể nhìn thấy xa hơn là vì tôi đứng trên vai những người khổng lồ" và "Tôi đã có gợi ý về phương pháp này từ cách vẽ tiếp tuyến của Fermat" vậy ta hãy thử tìm hiểu xem môn võ công này của Fermat lợi hại như thế nào nha.

Bài viết được bạn Trung dịch từ một tài liệu nước ngoài. Do trình còi nên chắc chắn có nhiều chỗ sai sót, mong các bạn thông cảm. Nếu được thì inbox chỉ những chỗ sai sót cho bạn Trung nha, bạn Trung rất sẵn lòng tiếp thu.

Tóm tắt

Bài viết này trình bày phương pháp xác đinh giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất và cách xác định tiếp tuyến của Fermat. Ngoài ra bài viết cũng nghiên cứu lời giải của Fermat về cực trị hình học.

Từ khóa: Fermat, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, tiếp tuyến, tiếp ảnh.

Mục lục

1. Giới thiệu

Đầu tiên ta sẽ trình bày phương pháp tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số mà Fermat đã trình bày trong cuốn luận văn *"Methodus ad disquirendam maximam et minimam"* (được viết vào khoảng năm 1629 nhưng tới năm 1679 mới được con ông là Samuel cho xuất bản), sau đó chúng ta nói cụ thê về lời giải hình học của ông về vấn dề giá trị lớn nhất without using such a method (???).

Các công thức của Fermat- có thể coi là khởi đầu của các phép tính vi phân- được biết đến vì bị sự phê bình của rất nhiều nhà toán học và triết gia: các lời phê bình đến năm 1821 mới chấm dứt khi cuốn *Course de Analyse* của Cauchy được xuất bản (xem [3]), trong sách các khái niệm giới hạn cua hàm số và đạo hàm lần đầu tiên được định nghĩa một cách tỉ mỉ. Như chúng ta thấy, thât sự thì các công thức của Fermat đả kích sâu sắc các nguyên tắc "not contradiction" (nó không thể là A và không A), nguyên tắc "identity" (A là A) và nguyên tắc "the third excluded" (A hoặc không A).

Hệ luận lý và triết học Aristole đã chếm ưu thế trong các trường triết học trong suốt thời trung đại và trong những thế kỷ trước, đại diện cho sự thật không thể nghi ngờ của mọi kiến thức, cả trong lĩnh vực chính trị và tôn giáo.

Trong thế kỷ 16 đã có những thay đổi sâu sắc trong xã hội, những phát kiến lớn được trình bày như trong thiên văn học (chỉ cần nhớ Copernicus và Kepler là được), trong địa lý (khám phá châu Mỹ), trong lĩnh vực tôn giáo (cải cách kháng nghị và phản cải cách kháng nghị).

Trong nửa đầu của thế kỷ XVII, đặc biệt là ở Pháp, nền văn hóa cổ điển, luận lý và triết học Aristote gặp sự phản đối mạnh mẽ của nhiều nhà triết học; trong năm 1624 một nhóm các nhà triết học ở Paris đã quyết định thảo luận trước công chúng 14 đề tài chống lại Aristotle: ngay lập tức nghị viện Pháp cấm không cho họ tấn công Aristotle và các kinh điển dưới đau đớn của cái chết.

Descartes cũng đã viết một số đoạn văn chống lại luận lý Aristotelian, vì ông thấy nó không phù hợp để khám phá các sự thật mới mà chỉ hữu ích để sắp xếp những gì đã được biết đến. Trong chương hai của cuốn " Discours de la method" (1637) ông viết: "xét về mặt luân lý, tam đoạn luận* của nó (luận lý Aristole) và phần rộng nhất của các nguyên tắc của nó là hữu ích hơn cho việc truyền đạt những gì chúng ta đã biết hơn để điều tra những gì chưa rõ".Đoạn văn này đưa ra một mô tả gần như hoàn hảo về những gì đã xảy ra trong khuôn khổ toán học: thực sự việc Fermat từ chối nguyên tắc "not contradiction", chỉ trong xu thế văn hóa có thể trở thành sự thật được mô tả ở trên, là hợp với sự nhiệt tình cho số lượng lớn các kết quả mới mà ông có thể đạt được bằng phương pháp của mình và sự đơn giản mà ông đạt được.

2. Phương pháp của Fermat về giá tri lớn nhất và giá tri nhỏ nhất

Đầu tiên cần nhớ điều quan trọng này, trước cả cuốn *"Geometry"* của Descartes (xem [7]), Fermat đã trình bày hình học giải tích (xem [2]) một cách rõ ràng, điều này thích hợp hơn với Descartes trình bày từ một điểm nhìn gốc, định rõ các điểm trong mặt phẳng bằng hai con số, mà ngày nay chúng ta gọi là hệ tọa độ Descartes và mô tả các đường thẳng và đường cong bằng phương trình của chúng: điều này được ông viết trong *Ad locos planos et solidos isagofe* -ông viết năm 1629 và xuất bản năm 1679, sau kkhi ông mất. Trong khoảng năm 1629 ông cũng viết *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, dựa theo những suy xét sau: khi môt hàm số f đạt đến giá tri lớn nhất hoặc giá tri nhỏ nhất của nó tương ứng với điểm x, giá trị của f tại điểm x+E gần x rất gần với giá trị f(x), gần đến mức nếu chia hiệu f(x+E)-f(x) cho E thì tỷ số gần bằng 0, nghĩa là:

$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E} \cong 0;$$

ở đây ký hiệu ≅ không biểu thị một đẳng thức, nhưng theo thuật ngữ Fermat, "adequality" có nghĩa là xấp xỉ đẳng thức. Sau đó, Fermat đơn giản hóa biểu thức bên trái của adequality (luôn có thể dù hàm số đã cho hữu tỷ hoặc vô tỷ) và tương đương nó với 0, khi E = 0.

Fermat cung cấp nhiều ví dụ đã biết đáp án để chứng minh sự hiệu quả của phương pháp này.

Ví dụ- lấy B thuộc đoạn thẳng AC cho trước. Tìm vị trí điểm B sao cho hình chữ nhật có 2 cạnh là AB và BC có diện tích lớn nhất (xem [4], trang 134).

Giải: đặt AC=a; AB=x. Thì hàm số cần tìm giá trị lớn nhất là f(x) = x(a-x). Ta có xấp xỉ đẳng thức

$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E} = -2x+a-E \cong 0.$$

Sau đó cho E=0, ta có -2x+a = 0 do đó x=$a/2$. Nghĩa là, trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi là 2a, hình vuông có diện tích lớn nhất.

Quan sát rằng, ngay cả khi nguyên tắc "not contradiction" rõ ràng là vi phạm, trực giác thấy lập luận có vẻ hợp lý, vì E không được coi là cố định một lần và cho tất cả, nó là biến và đáp số có thể được coi là kết quả của một quy trình xấp xỉ thu được khi cho E nhận các giá trị nhỏ dần. Rõ ràng thực sự là chỉ có thể thu được kết quả là một giá trị xấp xỉ, trong khi Fermat bỏ qua, đặt E = 0, từ một "adequality" thành một đẳng thức: đây là vấn đề và nguyên nhân của những lời chỉ trích sau này.

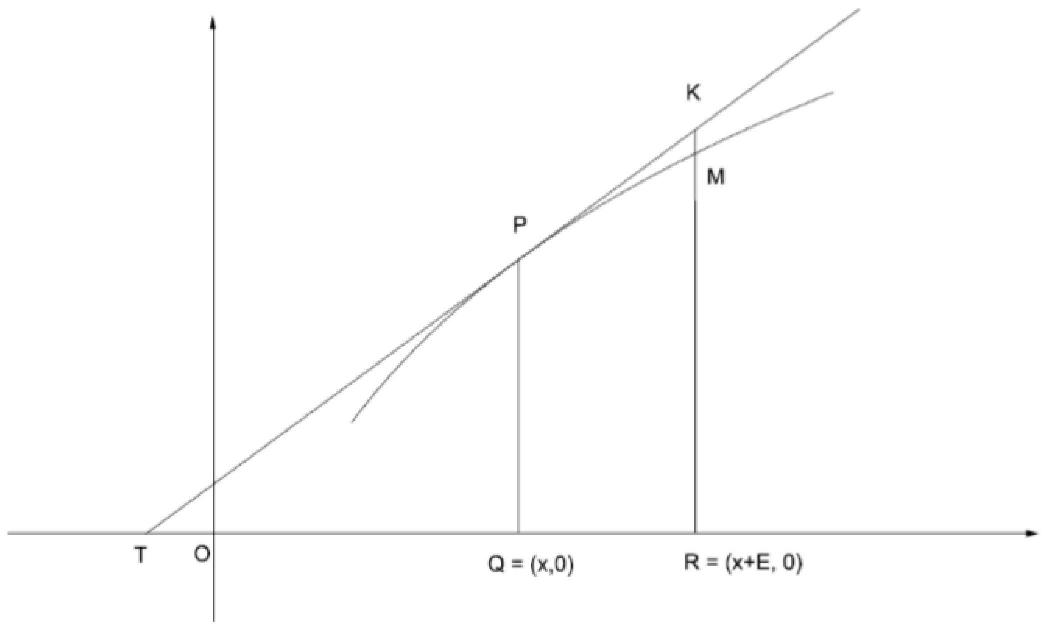
Fermat trong IV. Methodus de Maxima et minima (xem [4] trang 148) lại xem xét một lần nữa ví dụ trước tuy nhiên ông trình bày một phương pháp khác, ông đã nghĩ ra nhưng ông không sử dụng vì ông nghĩ rằng nó phức tạp hơn. Nó dựa trên quan sát sau: gần một điểm x là giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất có vô hạn các cặp điểm mà hàm số nhận cùng một giá trị; do đó nếu x_1 và x_2 là một cặp điểm như vậy thì

$$f(x_1) = x_1\,(a - x_1) = f(x_2) = x_2(a - x_2).$$

Chia 2 vế của đẳng thức cho x_1-x_2 chúng ta có được một a= x_1+x_2. Lúc này Fermat đặt x_1=x_2 từ đó a = 2x, như trên. Tất nhiên phương pháp này cũng bị phản đối như phương pháp đầu tiên.

3. Phương pháp cho các tiếp tuyến

Fermat phác thảo các xác định tiếp tuyến của đường cong (xem [2], [5] và [6]) như phương pháp về giá tri lớn nhất và giá trị nhỏ nhất: anh ta sử dụng một thủ pháp mà chúng ta có thể giải thích bằng thuật ngữ hiện đại theo cách sau: cho hàm số f và một điểm P = (x , f (x)) thuộc f. Lấy Q = (x, 0); xét tiếp tuyến của đồ thị tại điểm P và gọi T là giao điểm của tiếp tuyến với trục x và K điểm trên tiếp tuyến có hoành độ là x + E. Đặt R = (x + E, 0).



Fermat quan tâm đến việc xác định các tiếp ảnh, đó là xác định chiều dài của đoạn TQ. Để làm được điều đó ông xem xét hai tam giác đồng dạng TKR và TPQ: nếu E là đủ nhỏ điểm K có thể được coi là trùng với điểm M = (x + E, f (x + E)) và do đó có thể viết tỷ lệ MR: PQ = TR: TQ, thế vào ta có: f (x + E): f (x) = (c + E): c. (c=QT). Áp dung quy tắc biến đổi phân số ta có $[f(x+E)\text{-}f(x)] : f(x) = E{:}c$, và:

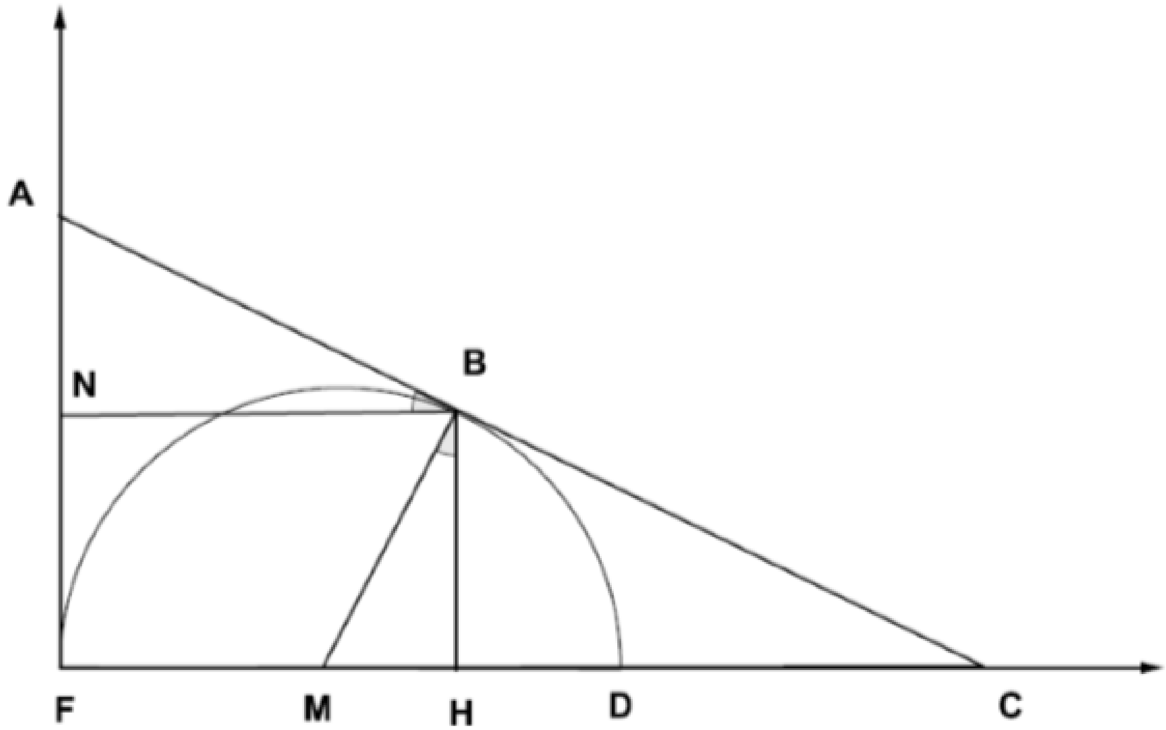
$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E} \cong \frac{f(x)}{c}.$$

Ờm đẳng thức thì cũng là xấp xỉ đẳng thức, đơn giản vế trái, cho E=0 rồi thay giá trị x là tính được c. Rõ ràng những lời chỉ trích cho phương pháp này cũng tương tự cho các lý thuyết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, nhưng nó rất dễ dàng để áp dụng và cho kết quả tốt trong một lớp rộng các hàm số.

4. <u>Lời giải hình học cho bài toán giá trị lớn nhất</u>

Như chúng ta đã nói, Fermat đưa ra một số ứng dụng cho phương pháp của mình cho các nghiên cứu về giá trị tối đa và tối thiểu của một hàm số hoặc để xác định các tiếp tuyến: nhiều ứng dụng trong số đó phục vụ mục đích để chứng minh trong một khuôn khổ được nhiều người biết phương pháp tốt như thế nào, đôi khi Fermat cũng giải quyết một số câu hỏi mở, như khi ông chứng minh luật khúc xạ lần đầu tiên theo một cách nghiêm ngặt (xem [4] và [1]). Trong số nhiều vấn đề ông giải quyết có một vấn đề, được dẫn trong một phụ lục (xem [4] trang 157), Fermat không sử dụng phương pháp phân tích của mình (dù có thể áp dụng được như chúng ta sẽ thấy), ông giải quyết bằng phương tiện hình học- một cách an toàn hơn, tất nhiên, và cũng như ông nói, một cách thanh lịch hơn.

Vấn đề- cho nửa hình tròn đường kính FD, cho điểm B thuộc nửa đường tròn; kẻ BH vuông góc FD (H thuộc FD). Tìm giá trị tối đa của tích FH.HB.



Lời giải của Fermat– ta xét hệ trục tọa độ Descartes với gốc tọa độ F, trục x là đường kính FD và trục y là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại F.

Ermat xét thấy vấn đề bao gồm việc xác định trong tất cả các hyperbolas có phương trình là xy=k, có 1 hyperbolas là tiếp tuyến với nửa đường tròn: tất nhiên, nếu B là tiếp điểm của 2 đường cong, tại B có 1 tiếp tuyến chung. Theo định lý của Apollonius về đường Conics, nếu A và C là giao điểm của tiếp tuyến (của hyperbolas) và 2 trục x và y theo thứ tự, ta có AB=BC. Gọi M là tâm nửa đường tròn và N là chân đường vuông góc kẻ từ B đến trục y. Ta có tam giác MBH đồng dạng với tam giác ANB; hơn nữa cạnh huyền AB bằng với AF, vì AB và AF là hai tiếp tuyến kẻ từ A đến nửa đường tròn; do đó AB gấp đôi AN (do tam giác ABN đồng dạng tam giác AFC và AC gấp đôi AB, theo định lý Apollonius, vậy nên BM gấp đôi MH. Cuối cùng FH=FM+MH và bằng 3/2 bán kính nửa đường tròn và bài toán giải xong.

5. Lời giải bằng giải tích

Bây giờ chúng ta sẽ giải quyết dễ dàng vấn đề bằng phương pháp Fermat đã trình bày trong phần 2. Thật vậy, đặt x là hoành độ điểm B, r là bán kính, thì độ dài BH là $\sqrt{r^2-(x-r)^2}$, vậy hàm số cần tìm giá trị lớn nhất là $f(x)=\sqrt{r^2-(x-r)^2}.x$

Xét hai điểm x_1, x_2 mà $f(x_1)=f(x_2)$, bình phương 2 vế ta có:

$$x_1^3(2r-x_1) = x_2^3(2r - x_2).$$

Chuyển vế, đơn giản $x_1 - x_2$ ta có:

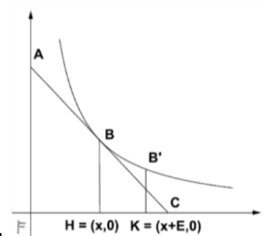
$$(2rx_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Cuối cùng cho $x_1 = x_2 = x$, ta được nghiệm x=0, là cực của khoảng giới hạn của x, tương ứng với giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho và nghiệm x=3r/2 là đáp án cần tìm.

Quan sát rằng trong lời giải giải tích của vấn đề không cần thiết sử dụng hyperbol và định lý của Apollonius được trích dẫn ở trên. Nhưng tất nhiên, nó có thể được chứng minh rất dễ dàng bằng phương pháp tiếp tuyến được trình bày trong phần 3, cho các hyperbol của phương trình xy = k, xet tiếp tuyến tại điểm B có hoành độ x, nếu A và C là những giao điểm của tiếp tuyến trục y và x tương ứng, thì AB = BC. Thật vậy xét một điểm B' trên hyperbolas mà hoành độ là x + E; vì tam giác HBC và KB'C đồng dạng (nếu E đủ nhỏ….),chúng ta có thể thiết lập xấp xỉ đẳng thức:

$$\frac{k}{x} : \frac{k}{x+E} \cong c:(c-E).$$

với c là độ dài tiếp ảnh



Biến đổi một chút ta có:

$$\left(\frac{k}{x} - \frac{k}{x+E}\right) : \frac{k}{x} \cong E:c,$$

Đơn giản và cho E=0 ta được c=x, vậy FH=HC. Do đó vì tam giác AFC và BHC đồng dạng nên AB=BC ta có điều phải chứng minh.

6. Kết luận

Rõ ràng là Fermat thích phương pháp hình học hơn là giải tích, nhưng ông nghĩ rằng, trong khi phương pháp giải tích cung cấp một phương thức giống nhau giải quyết tốt cho một lớp rộng các vấn đề, phương pháp hình học đòi hỏi một giải pháp "đặc biệt" cho mỗi loại vấn đề, tưởng tượng và cần khả năng sáng tạo và tưởng tượng, khác với kỹ năng tìm hiểu một thủ tục và áp dụng nó, và luôn thành công với mọi trường hợp.

Theo quan điểm của tôi -từ một góc nhìn trực quan- việc so sánh như vậy có thể rất hữu ích, vì nó đưa ra hai đường lối khác nhau để tiếp cận toán học. Thật vậy nó có thể cải thiện khả năng tính toán của các sinh viên trên cơ sở của một số quy tắc (ví dụ như điều này xảy ra khi họ học cách tính toán biểu thức đại số hoặc hoc cách tính đạo hàm). Nhưng nó cũng có thể yêu cầu sự tham gia củan của tự do và trí tưởng tượng ở mức độ sâu hơn. Tất nhiên là họ phải học cách áp dụng các quy tắc: nhưng đây không phải là mục đích duy nhất của việc dạy toán.

Việc xây dựng quy tắc mới là rất khó; nhưng có lẽ điều này có thể đạt được khi giải quyết những vấn đề dễ nhưng không dùng những cách truyền thống: điều này có thể được xem như là một cách đào tạo việc sử dụng những gì đã biết theo một cách mới, với mục đích chứng minh một số thuộc tính. Các bài tập trước có thể cải thiện kỹ năng của một số sinh viên có thể rất hữu ích cho cuộc sống cá nhân của họ hoặc trong khuôn khổ xã hội: thực sự bây giờ ta chưa rõ những gì sẽ cần cho học sinh của chúng ta khi họ rời khỏi trường học hoặc các trường đại học : những gì có thể hữu ích cho điều đó? Tất nhiên năng khiếu cho học tập là quan trọng như kiến thức về các khía cạnh cơ bản lý thuyết và thực tế của công việc của họ, nhưng nó là không đủ: sự khéo léo để giải quyết vấn đề mới phát minh ra những cách thức mới của giải pháp là thực sự cần thiết, theo ý kiến của tôi.

References

[1] F. Amodeo, La regola di Fermat - Monforte per la ricerca dei massimi e dei minimi, Periodico di Matematica, XXIV, fasc. VI. [2] C. B. Boyer, Storia della Matematica, ISEDI, 1976.

[3] A. Cauchy, Oeuvres completes, Gauthier- Villars, 1897.

[4] P. Fermat, Methodus ad disquirendam maximam et minimam, V. Ad Methodum de maxima et minima Appendix. Oeuvres, Gauthiers Villars, Parigi, 1891 – 1912.

[5] E. Giusti, Il problema delle tangenti da Descartes a Leibniz, in E. Giusti, E. Bellone, Argomenti di Storia della Scienza: Matematica e Fisica. Istituto di Psicologia. Università di Pavia. Salice Terme. Settembre 1986.

[6] E. Giusti, Les méthodes des maxima et minima de Fermat, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol. XVIII, n. Spécial, 2009, pp.59-85.

[7] D. E. Smith and M.L. Lathan, The Geometry of René Descartes, with a facsimile of the first edition, Dover Publications, New York, 1954.