

Chủ đề 08. Phép tô màu siêu đồ thị

8.1. Khái niệm cơ bản

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ và $\{1, 2, \dots, \lambda\}$ là một tập các màu cho trước. Một **phép λ – tô màu thực sự của $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$** được định nghĩa là một phép gán nhãn mỗi đỉnh của X với một màu nào đó nằm trong tập $\{1, 2, \dots, \lambda\}$ sao cho mọi cạnh $D \in \mathcal{D}$, với $|D| \geq 2$, đều có chứa ít nhất hai đỉnh được tô bởi hai màu khác nhau. Nói cách khác, trong một phép tô màu thực sự bất kỳ, không có cạnh nào có kích thước ≥ 2 là **đơn sắc**. Chúng ta không nhất thiết phải sử dụng tất cả λ màu. Nhận thấy rằng khi xem xét các phép tô màu chúng ta đã bỏ qua các cạnh có kích thước ≤ 1 . Việc này tương đương với việc chúng ta xóa yếu tất cả các phần tử như vậy ra khỏi họ $\mathcal{D}$. Do đó, phép λ – tô màu thực sự cũng thường được gọi là một **phép tô màu yếu**. Số nguyên dương λ nhỏ nhất để tồn tại một phép λ – tô màu được gọi là **sắc số của siêu đồ thị $\mathcal{H}$** , kí hiệu bởi $\chi(\mathcal{H})$. Do mỗi đỉnh đều được tô bởi đúng một màu nên số tối đại các màu khác nhau có thể thực sự được sử dụng trong bất kỳ phép λ – tô màu nào cũng $\leq n(\mathcal{H})$. Nếu $\lambda > n$ thì trong bất kỳ phép λ – tô màu nào cũng có ít nhất một màu nào đó không được sử dụng đến. Như vậy, luôn tồn tại các phép λ – tô màu với mọi $\lambda \geq n$.

Nếu $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị đơn với tất cả các cạnh đều có kích thước bằng 2 thì nó sẽ là một đồ thị đơn và chúng ta thu được phép tô màu đồ thị như đã khảo sát ở mục “4. Phép tô màu đồ thị”. Do trong một phép tô màu thực sự của một đồ thị không có cạnh nào là đơn sắc nên yêu cầu này được trực tiếp tổng quát lên cho bất kỳ cạnh nào có kích thước ≥ 2 . Tương tự như trong mục “4. Phép tô màu đồ thị”, các cạnh khuyên cũng sẽ được loại bỏ khi chúng ta khảo sát các phép tô màu siêu đồ thị.

Một phép λ – tô màu của siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ sử dụng chính xác $k \leq \lambda$ màu sẽ xác định một phân hoạch khả dĩ của X thành k tập ổn định $S_1, S_2, \dots, S_k$ thường được gọi là các **lớp màu**. Mỗi lớp màu S_i đại diện cho một tập các đỉnh được tô bởi màu i . Hơn nữa, không có cạnh nào nằm bên trong mỗi S_i . Như vậy, chúng ta suy ra được rằng:

$$X = \bigcup_{i=1}^k S_i, S_i \neq \emptyset, S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j.$$

Kết quả 8.1.1.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ có bậc n với chỉ số ổn định $\alpha(\mathcal{H})$, chỉ số transversal $\tau(\mathcal{H})$, sắc số $\chi(\mathcal{H})$.

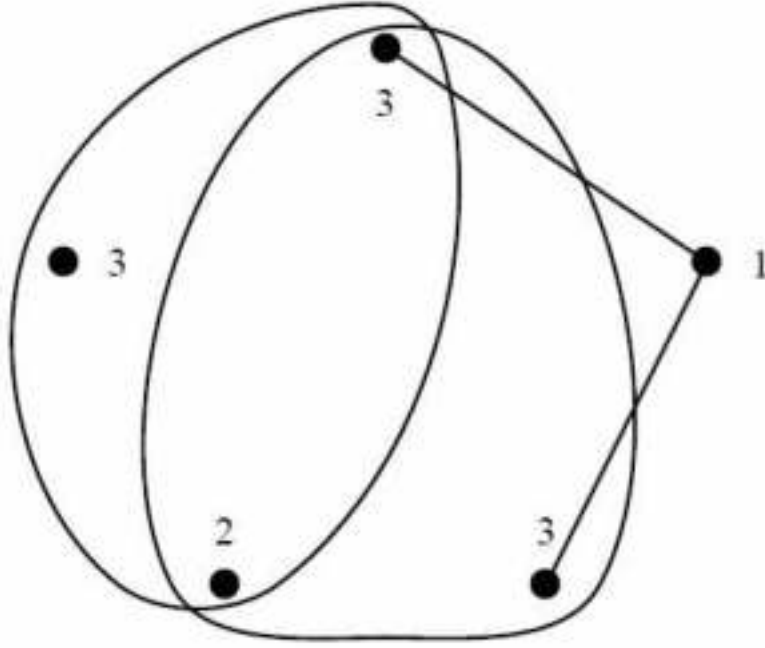
Khi đó, $\alpha(\mathcal{H})\chi(\mathcal{H}) \geq n$ và $\chi(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}) + 1 = n - \alpha(\mathcal{H}) + 1$.

Chứng minh kết quả 8.1.1.

Đánh giá $\alpha(\mathcal{H})\chi(\mathcal{H}) \geq n$ được suy ra trực tiếp từ nhận xét $X = \bigcup_{i=1}^k S_i, S_i \neq \emptyset, S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j$ (điều này suy ra từ việc, trong một phép tô màu tối ưu thực sự của $\mathcal{H}$ với $\chi(\mathcal{H})$ màu, $|S_i| \leq \alpha(\mathcal{H})$).

Đánh giá $\chi(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}) + 1 = n - \alpha(\mathcal{H}) + 1$ được suy ra từ lập luận sau: chọn ra một tập transversal tối tiểu của $\mathcal{H}$ và tô màu nó bởi $\tau(\mathcal{H})$ màu; sau đó tô màu các đỉnh còn lại của $\mathcal{H}$ bởi một màu mới nào đó. Do chúng ta đã thu được một phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}$ sử dụng $\tau(\mathcal{H}) + 1$ màu nên sắc số $\chi(\mathcal{H})$ của nó không thể có giá trị lớn hơn $\tau(\mathcal{H}) + 1 = n - \alpha(\mathcal{H}) + 1$. $\square$

Chẳng hạn, xét siêu đồ thị $\mathcal{H}$ và một phép 3 – tô màu thực sự như trong hình vẽ bên dưới.



Hình vẽ minh họa siêu đồ thị $\mathcal{H}$ và một phép 3 – tô màu thực sự của $\mathcal{H}$.

Như chúng ta có thể nhận thấy dễ dàng rằng $\tau(\mathcal{H}) = 2$, $\alpha(\mathcal{H}) = 3$, $\chi(\mathcal{H}) = 2$. Phép tô màu này tạo ra một phân hoạch khả dĩ của tập đỉnh X thành ba lớp màu khác nhau. Các đỉnh được tô bởi màu 1 và 2 sẽ đại diện cho một tập transversal tối tiểu còn các đỉnh được tô bởi màu 3 sẽ đại diện cho một tập độc lập tối đại. Đánh giá $\alpha(\mathcal{H})\chi(\mathcal{H}) \geq n$ sẽ trở thành $3 \cdot 2 \geq 5$ còn đánh giá $\chi(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}) + 1$ sẽ trở thành $2 \leq 2 + 1$.

Tuy nhiên, một điểm quan trọng đáng chú ý ở đây đó là các phép tô màu đồ thị có thể được khái quát lên bằng nhiều cách khác nhau. Có một số loại phép tô màu siêu đồ thị thường gặp trong các tài liệu:

Phép tô màu mạnh. Một *phép λ – tô màu mạnh của $\mathcal{H}$* được định nghĩa là một phép tô màu các đỉnh của siêu đồ thị sử dụng không quá λ màu sao cho mọi cạnh $D \in \mathcal{D}$ đều đa sắc, nghĩa là tất cả các đỉnh của nó được tô bởi các màu khác nhau. **Sắc số mạnh $\gamma(\mathcal{H})$ của một siêu đồ thị $\mathcal{H}$** được định nghĩa là số nguyên dương λ nhỏ nhất sao cho tồn tại ít nhất một phép λ – tô màu mạnh của $\mathcal{H}$. Dễ dàng nhận thấy rằng $\gamma(\mathcal{H}) \geq \chi(\mathcal{H})$ bởi vì mọi phép tô màu mạnh cũng là một phép tô màu yếu. Hiển nhiên, phép tô màu mạnh và yếu sẽ trùng nhau nếu $\mathcal{H}$ là một đồ thị. Thật ra, phép tô màu mạnh chính là một phép λ – tô màu thực sự của đồ thị bậc hai $(\mathcal{H})_2$ của $\mathcal{H}$. Do mọi đồ thị đều là một trường hợp đặc biệt của một siêu đồ thị (nó chính là đồ thị bậc hai $(\mathcal{H})_2$ của chính nó) nên các phép tô màu mạnh không tạo ra thêm bất cứ điều gì mới trong lý thuyết về các phép tô màu.

Phép tô màu cân bằng. Một *phép λ – tô màu cân bằng của $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$* được định nghĩa là một phép phân hoạch của tập đỉnh X thành λ tập ổn định S_i , $i = 1, 2, \dots, \lambda$, sao cho, với mỗi cạnh $D \in \mathcal{D}$ và với mỗi chỉ số i , đánh giá sau được thỏa mãn:

$$\left\lfloor \frac{|D|}{\lambda} \right\rfloor \leq |D \cap S_i| \leq \left\lceil \frac{|D|}{\lambda} \right\rceil,$$

trong đó $\lfloor r \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá r và $\lceil r \rceil$ là số nguyên dương nhỏ nhất không nhỏ hơn r .

Phép tô màu tốt. Một phép λ – tô màu tốt của $\mathcal{H}$ được định nghĩa là một phép phân hoạch của tập đỉnh X thành λ tập ổn định S_i , $i = 1, 2, \dots, \lambda$, sao cho mỗi cạnh $D \in \mathcal{D}$ đều có $\min\{|D|, \lambda\}$ màu.

Nếu $\lambda \leq \min_{D \in \mathcal{D}} |D|$ thì mỗi tập S_i đều là một tập transversal của $\mathcal{H}$. Nếu $\lambda \geq \max_{D \in \mathcal{D}} |D|$ thì một phép λ – tô màu tốt cũng sẽ là một phép λ – tô màu mạnh. Cuối cùng, với mọi chỉ số λ , mọi phép λ – tô màu cân bằng cũng đều là một phép λ – tô màu tốt.

Phép tô màu uniform. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ với bậc bằng n . Một phép λ – tô màu thực sự $(S_1, S_2, \dots, S_\lambda)$ được gọi là uniform nếu số các đỉnh được tô bởi cùng một màu bất kỳ là gần bằng nhau, nghĩa là

$$\left\lfloor \frac{n}{\lambda} \right\rfloor \leq |S_i| \leq \left\lceil \frac{n}{\lambda} \right\rceil.$$

Bài toán khảo sát về tính tồn tại của các phép tô màu uniform xuất hiện rất thường xuyên trong các bài toán sắp xếp lịch.

Phép tô màu regular. Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$. Một phép phân hoạch của tập đỉnh X thành λ tập ổn định S_i , $i = 1, 2, \dots, \lambda$, được gọi là regular nếu, với mỗi cạnh $D_j \in \mathcal{D}$ có kích thước ≥ 2 , tồn tại các số nguyên a_j, b_j tương ứng sao cho $0 \leq a_j \leq b_j \leq |D_j|$ và, với mỗi cạnh $D_j \in \mathcal{D}$ và với mỗi $i = 1, 2, \dots, \lambda$, chúng ta đều có $a_j \leq |D_j \cap S_i| \leq b_j$.

Nhận thấy rằng mỗi phép tô màu yếu đều là một phép tô màu regular với $a_j = 0$ và $b_j = \max\{1, |D_j| - 1\}$; mọi phép tô màu mạnh đều là một phép tô màu regular với $a_j = 0$ và $b_j = 1$; mọi phép tô màu cân bằng đều là một phép tô màu regular với $a_j = \left\lfloor \frac{|D_j|}{\lambda} \right\rfloor$ và $b_j = \left\lceil \frac{|D_j|}{\lambda} \right\rceil$.

Nhận xét. Như vậy, một mặt các phép tô màu regular có vẻ như là cách mở rộng tổng quát nhất cho các phép tô màu đồ thị. Mặt khác, nó lại không phải là dạng mở rộng tốt như vậy. Thật vậy, nếu chúng ta muốn diễn đạt một số phép tô màu regular như vậy thì một số cạnh D_j phải có chứa ít nhất hai đỉnh được tô bởi cùng một màu nào đó. Như vậy, D_j có thể là một tập đơn sắc. Nếu nó thật sự là một tập đơn sắc và chúng ta sử dụng tối thiểu hai màu để tô màu thì sẽ có một số màu bị thiếu và một số màu bị sử dụng trùng lặp lại cho tất cả các đỉnh của D_j . Như vậy, trong ngôn ngữ của các phép tô màu regular, chúng ta sẽ có $a_j = 0$ và $b_j = |D_j|$. Điều này tương đương với việc không có ràng buộc nào trên cách tô màu của cạnh D_j , nghĩa là nó tương đương với việc xem xét tất cả các phép tô màu regular của $\mathcal{H}$ mà không có D_j . Để thể hiện tình trạng nêu ở trên, một điều cần thiết ở đây đó là bổ sung thêm yêu cầu sau: trong mỗi phép tô màu như vậy, tồn tại một chỉ số i sao cho $|S_i \cap D_j| \geq 2$.

Tương tự như đối với các đồ thị, các chu trình cũng đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết về các phép tô màu siêu đồ thị. Nhắc lại rằng $\Lambda(\mathcal{H})$ là kí hiệu của chỉ số chu trình của siêu đồ thị $\mathcal{H}$ (**Chủ đề 06. Siêu cây – Một số dạng siêu đồ thị tổng quát của đồ thị lưỡng phân – Siêu đồ thị chordal conformal**).

Kết quả 8.1.2.

Với mọi siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, $\chi(\mathcal{H}) \leq \Lambda(\mathcal{H}) + 2$.

Chứng minh kết quả 8.1.2.

Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên dựa thuật toán xác định giá trị của chỉ số chu trình $\Lambda(\mathcal{H})$ đã giới thiệu ở Chủ đề 06. Kí hiệu $T = (X, E)$ là một cây khung nào đó của trọng đồ G được xây dựng trong bước 2 của thuật toán. Bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ của cây T , chúng ta thực hiện tô màu tất cả các đỉnh của cây T chỉ với hai màu bằng cách tô màu thay phiên dọc theo cây T . Như vậy, các cạnh của $\mathcal{H}$ có hai đỉnh liên

hợp nhau trong T sẽ được tô màu thực sự. Số các cạnh còn lại của $\mathcal{H}$ tối đa vào khoảng $\Lambda(\mathcal{H})$. Sử dụng một màu mới để tô màu mỗi cạnh này, chúng ta sẽ thu được một phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}$ với $\Lambda(\mathcal{H}) + 2$ màu. $\square$

Tiếp theo, chúng ta sẽ trích dẫn một số kết quả quan trọng phát triển theo hướng này.

Kết quả 8.1.3. (Erdős – Hajnal)

Với mọi số tự nhiên $h, k, l \geq 2$, luôn tồn tại một siêu đồ thị h – uniform $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ sao cho $\chi(\mathcal{H}) = k$ và $\mathcal{H}$ không chứa chu trình nào với chiều dài $< l$.

Một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ được gọi là **critical** nếu nó không có chứa bất kì đỉnh cô lập nào, $\chi(\mathcal{H}) = k$ ($k \geq 3$), xóa yếu bất kì cạnh nào của $\mathcal{H}$ cũng sẽ thu được một siêu đồ thị $\mathcal{H}'$ với $\chi(\mathcal{H}') = k - 1$.

Kết quả 8.1.4. (Zykov)

Mọi siêu đồ thị $\mathcal{H}$ với $\chi(\mathcal{H}) \geq 3$ đều có thể chuyển thành một siêu đồ thị critical bằng cách xóa yếu các đỉnh và các cạnh có bậc ≤ 1 .

Giao của các cạnh nằm trong một chu trình cũng đóng một vai trò khá quan trọng:

Kết quả 8.1.5. (Zykov)

Trong mỗi siêu đồ thị critical $\mathcal{H}$ với $\chi(\mathcal{H}) = 3$, luôn tồn tại một chu trình lẻ sao cho không có ba cạnh nào của nó có chung một đỉnh.

Kết quả 8.1.6. (Fournier – Las Vergnas)

Nếu, trong một siêu đồ thị $\mathcal{H}$, tồn tại một chu trình lẻ có ba cạnh có chung một đỉnh thì $\chi(\mathcal{H}) = 2$.

Tính đến này cũng đã có khá nhiều các bài báo nghiên cứu về vấn đề số cạnh nhỏ nhất (lớn nhất) có thể có của một siêu đồ thị r – uniform xác định trên n đỉnh với $\chi(\mathcal{H}) > k$ (hoặc $\chi(\mathcal{H}) \leq k$). Các vấn đề này thường được gọi chung là “**Các bài toán cực trị liên quan đến sắc số của một siêu đồ thị**”. Hầu hết, kết quả của các bài báo này đều thu được nhờ việc sử dụng phương pháp xác suất.

Một trong những hướng phát triển tốt nhất hiện nay trong lý thuyết tô màu siêu đồ thị cổ điển đó là khảo sát các siêu đồ thị 2 – sắc số, các siêu đồ thị với $\chi(\mathcal{H}) = 2$, như là một sự tổng quát hóa của các đồ thị lưỡng phân.

8.2. Thuật toán tham lam dùng để xác định sắc số của một siêu đồ thị $\mathcal{H}$

Giả sử cho trước một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, nhắc lại rằng $\mathcal{D}(x)$ kí hiệu cho tập các cạnh có chứa đỉnh

$x \in X$. Một star nằm trong $\mathcal{H}$ chỉ có duy nhất một tâm được gọi là một **monostar**. Một đỉnh x có thể là tâm của nhiều star hoặc thậm chí là tâm của nhiều monostar. Thông thường, chúng ta thường quan tâm đến số tối đa các cạnh có thể có của một monostar nhận x làm tâm.

Bậc mono $m(x, \mathcal{H})$ của một đỉnh $x \in X$ trong một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ là lực lượng tối đại của một họ con $\mathcal{D}_1(x) \subseteq \mathcal{D}(x)$ sao cho:

$$D_i, D_j \in \mathcal{D}_1(x) \Rightarrow D_i \cap D_j = \{x\}.$$

Nói cách khác, bậc mono của một đỉnh x chính là số tối đa các cạnh có thể có của một monostar nhận x làm tâm. Nếu $\mathcal{H}$ là một đồ thị không có chứa cạnh khuyên thì khái niệm bậc mono sẽ trùng với khái niệm bậc thông thường.

Xét giá trị $M(\mathcal{H}) = \max_{Y \subseteq X} \min_{x \in Y} m(x, \mathcal{H}_Y)$. Giá trị này có thể được tính bằng cách, với mỗi đồ thị con cảm sinh của $\mathcal{H}$, chọn ra một đỉnh bất kỳ với bậc mono nhỏ nhất trong mỗi đồ thị con đó, sau đó tính bậc mono lớn nhất có thể có tính trên tất cả các đồ thị con cảm sinh như vậy.

Nếu chúng ta áp dụng cách tính này cho các đồ thị thì giá trị $M(\mathcal{H})$ thu được chính là chỉ số Szekeres-Wilf của một đồ thị (**Chủ đề 02. Cây – Đồ thị chordal – Đồ thị lưỡng phân**). Nhắc lại rằng ω biểu thị cho kích thước tối đại có thể có của một clique và chỉ số Szekeres-Wilf luôn $\geq \omega - 1$ (**Kết quả 2.2.8**). Chúng ta cũng đã chỉ ra rằng, đối với các đồ thị, giá trị $M(G)$ có liên quan mật thiết với các đồ thị chordal.

Tiếp theo, chúng ta sẽ xem xét một thuật toán tham lam đơn giản để tô màu một siêu đồ thị bằng việc sử dụng giá trị $M(\mathcal{H})$. Ý tưởng của chúng ta ở đây đó là tìm một dãy sắp thứ tự tốt của các đỉnh của $\mathcal{H}$. Đầu tiên, phân tích $\mathcal{H}$ bằng cách sử dụng bậc mono của các đỉnh. Sau đó, tô màu $\mathcal{H}$ tuần tự một cách tham lam bằng cách bổ sung thêm các đỉnh theo thứ tự đảo ngược. Tại mỗi bước của thuật toán, chúng ta luôn ưu tiên sử dụng màu khả dĩ đầu tiên trong tập các màu đã sử dụng trước đó. Trong trường hợp xấu nhất khi chúng ta không thể sử dụng bất kỳ màu nào như vậy, chúng ta gán cho đỉnh đang xét một màu mới và bổ sung nó thêm vào tập các màu khả dĩ. Do chúng ta luôn ưu tiên sử dụng màu khả dĩ đầu tiên nên nếu xảy ra trường hợp xấu nhất thì chúng ta chỉ mất tối đa thêm một màu mới.

Kí hiệu $c(x)$ là màu được sử dụng để tô cho đỉnh $x \in X$, vector $c = (c(x_1), c(x_2), \dots, c(x_n))$ sẽ đại diện cho một phép tô màu của $\mathcal{H}$ và việc $c(x) = 0$ được hiểu là “đỉnh x chưa được tô màu”.

Thuật toán tô màu tham lam cho một siêu đồ thị.

INPUT: Siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ với $X = \{1, 2, \dots, n\}$.

OUTPUT: Phép tô màu thực sự $c = (c(1), c(2), \dots, c(n))$ của $\mathcal{H}$.

1. Đặt $c = (0, 0, \dots, 0)$, $i = n$, $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}$. Tìm một đỉnh có bậc mono nhỏ nhất trong $\mathcal{H}_n$ và kí hiệu nó bởi x_n .
2. Đặt $i := i - 1$. Nếu $i = 0$ thì chuyển tới bước 5.
3. Xóa mạnh đỉnh x_{i+1} khỏi siêu đồ thị $\mathcal{H}_{i+1}$ để tạo ra siêu đồ thị con cảm sinh $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{i+1} - x_{i+1}$.
4. Tìm một đỉnh có bậc mono nhỏ nhất trong $\mathcal{H}_i$, kí hiệu nó bởi x_i , và chuyển tới bước 2.
5. Tô màu đỉnh x_1 bởi màu thứ nhất: $c(x_1) = 1$, $i = 1$.
6. Đặt $i := i + 1$. Nếu $i = n + 1$ thì chuyển tới bước 8.
7. Tô màu đỉnh x_i bởi màu nhỏ nhất có thể được trong tập các màu $\{1, 2, \dots, n\}$, chuyển tới bước 6.
8. Xuất $(c(1), c(2), \dots, c(n))$ và kết thúc thuật toán.

Nhận xét. Thuật toán trên được gọi là tham lam bởi vì nó không bao giờ yêu cầu chúng ta phải tô màu lại các đỉnh đã được tô màu trước đó. Trường hợp xấu nhất chúng ta bởi sử dụng một màu mới thì tại mỗi bước chúng

ta đều thu được một phép tô màu thực sự. Mặc dù khá đơn giản, thuật toán trên có một điểm khiến cho vấn đề của chúng ta trở nên rất phức tạp. Cụ thể, thuật toán yêu cầu xác định một đỉnh có bậc mono nhỏ nhất (Bước 4).

Xét một đỉnh x bất kì nằm trong một siêu đồ thị $\mathcal{H}$. Bài toán tìm bậc mono của đỉnh x tương đương với việc đi tìm monostar tối đại nhận x làm tâm. Điều này tương đương với việc chúng ta đi tìm một cặp ghép tối đại trong siêu đồ thị thu được bằng cách xóa yếu đỉnh x khỏi siêu đồ thị con cảm sinh bởi tập láng giềng của x . Điều này dẫn chúng ta đi đến bài toán đi tìm một tập ổn định trong đồ thị bậc hai của siêu đồ thị đối ngẫu. Nói chung, điều này rất khó để thực hiện trong thực tế. Trên thực tế, một số sửa đổi có thể được thực hiện để giúp chúng ta tránh tìm kiếm toàn bộ với các giá phải trả cho độ chính xác tùy thuộc vào đặc điểm cấu trúc của siêu đồ thị.

Kết quả 8.2.1.

Giá trị lớn nhất của bậc mono nhỏ nhất sẽ được sinh ra khi chúng ta thực hiện các bước 1– 4 của thuật toán tô màu siêu đồ thị và bằng $M(\mathcal{H})$.

Chứng minh kết quả 8.2.1.

Kí hiệu t là giá trị lớn nhất của bậc mono nhỏ nhất tính trên tất cả các đỉnh nêu trong dãy sắp thứ tự được sinh ra bởi các bước 1– 4). Hiển nhiên, $t \leq M(\mathcal{H})$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $t \geq M(\mathcal{H})$.

Từ cách định nghĩa của chỉ số $M(\mathcal{H})$, tồn tại một siêu đồ thị con cảm sinh $\mathcal{H}_Y$ và một đỉnh $y \in Y$ sao cho

$$m(y, \mathcal{H}_Y) = \min_z m(x, \mathcal{H}_Y) = M(\mathcal{H}).$$

Kí hiệu k là bước đầu tiên khi có một đỉnh nào đó của tập Y bị xóa.

Khi đó, $\mathcal{H}_Y$ sẽ là một siêu đồ thị con cảm sinh của $\mathcal{H}_k$.

Như vậy, $M(\mathcal{H}) \leq m(y, \mathcal{H}_Y) \leq m(x_k, \mathcal{H}_Y) \leq t$. □

Kết quả 8.2.2.

Với mọi siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$, $\chi(\mathcal{H}) \leq M(\mathcal{H}) + 1$.

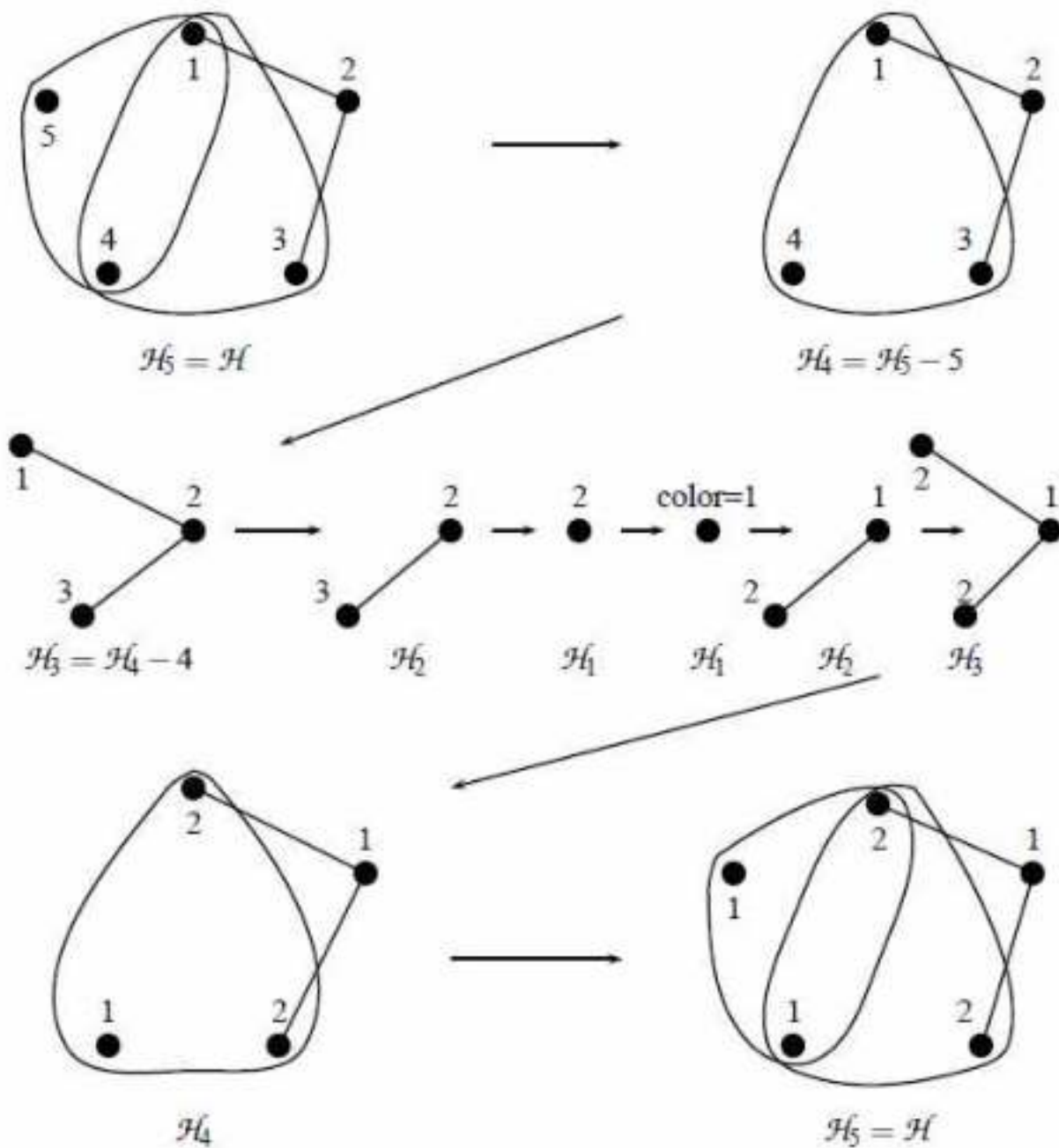
Chứng minh kết quả 8.2.2.

Từ thuật toán và Kết quả 8.2.1), giá trị lớn nhất của bậc mono thu được từ thuật toán sẽ trùng với $M(\mathcal{H})$.

Nhận thấy rằng số tối đa các màu mà chúng ta không thể sử dụng để tô màu cho đỉnh x_i ở bước 7) sẽ không thể lớn hơn $M(\mathcal{H})$. Thật vậy, nếu chúng ta không thể sử dụng các màu $1, 2, \dots, t$ để tô đỉnh x_i thì điều đó có nghĩa là chúng ta đã có các cạnh, tạm kí hiệu bởi $D_1, D_2, \dots, D_t$ trong $\mathcal{H}_i$, có màu đơn sắc với các màu $1, 2, \dots, t$ (ngoại trừ đỉnh x_i). Các màu $1, 2, \dots, t$ này sẽ phải khác nhau. Do đó, các cạnh $D_1, D_2, \dots, D_t$ có một đỉnh x_i chung và đại diện cho một monostar. Như vậy, chúng ta có thể sử dụng màu kế tiếp để tô màu đỉnh x_i . □

Nhận thấy rằng Kết quả 8.2.1) là dạng tổng quát hóa trực tiếp của thuật toán tính toán chỉ số $M(G)$ được mô tả ở trên còn Kết quả 8.2.2) là dạng tổng quát hóa trực tiếp của Kết quả 8.2.1).

Chẳng hạn, nếu chúng ta áp dụng thuật toán cho siêu đồ thị $\mathcal{H}$ thì chúng ta sẽ thu được sơ đồ sau:



Hình vẽ minh họa.

Tại thời điểm bắt đầu thuật toán, $\mathcal{H}_5 = \mathcal{H}$ và $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Trong $\mathcal{H}$, bậc mono của các đỉnh lần lượt là:

$$m(1, \mathcal{H}) = 2, m(2, \mathcal{H}) = 2, m(3, \mathcal{H}) = 2, m(4, \mathcal{H}) = 1, m(5, \mathcal{H}) = 1.$$

Do $\min\{2, 2, 2, 1, 1\} = 1$ nên chúng ta có thể xóa đỉnh 4 hoặc đỉnh 5 để thu được siêu đồ thị $\mathcal{H}_4$. Chọn đỉnh 5: $\mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_5 - 5$. Trong $\mathcal{H}_4$, đỉnh 4 có giá trị bậc mono nhỏ nhất và bằng 1. Bằng cách thực hiện tiếp tục quá trình phân tích siêu đồ thị $\mathcal{H}$ như trên, chúng ta sẽ thu được một dãy các siêu đồ thị $\mathcal{H}_5, \mathcal{H}_4, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 = (\{2\}, \emptyset)$ tương ứng với dãy sắp thứ tự các đỉnh 5, 4, 1, 3, 2.

Bắt đầu từ thời điểm này, thuật toán sẽ bắt đầu tô màu siêu đồ thị $\mathcal{H}_1$ bằng cách gán màu 1 cho đỉnh 2 ở

Bước 5. Kế tiếp, thuật toán sẽ tái tạo lại siêu đồ thị $\mathcal{H}$ ban đầu bằng cách bổ sung thêm các đỉnh theo thứ tự đảo ngược 2, 3, 1, 4, 5 và tô màu từng đỉnh một trong số chúng bằng màu nhỏ nhất có thể được. Thuật toán trên kết thúc với đầu ra là phép tô màu thực sự $c = (2, 1, 2, 1, 1)$.

Giá trị lớn nhất tính trên tất cả các bậc mono nhỏ nhất được tìm thấy bởi thuật toán là 2.

Như vậy, $M(\mathcal{H}) = 2$. Sau cùng, chúng ta dễ dàng thấy được rằng $\chi(\mathcal{H}) = 2 \leq M(\mathcal{H}) + 1 = 3$.

8.3. Phép tô màu siêu đồ thị hỗn hợp

Cho đến bây giờ, chúng ta vẫn đang thảo luận về các phép tô màu đồ thị và siêu đồ thị dạng cổ điển. Vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Tìm sắc số, nghĩa là bài toán xác định số màu tối thiểu có thể được sử dụng bởi của các phép tô màu của một đồ thị (hoặc siêu đồ thị) và phép tô màu tối ưu tương ứng?”. Nhận thấy rằng, đối với các phép tô màu thực sự, số tối đa các màu có thể được sử dụng lần nếu chúng ta xem xét các phép tô màu nghiêm ngặt, hoặc là λ nếu chúng ta xem xét tất cả các phép tô màu thực sự. Như vậy, bài toán đi tìm số màu tối đại có thể được sử dụng tính trên tất cả các phép tô màu thực sự là hoàn toàn tầm thường. Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ giới thiệu các khái niệm cơ bản về các phép tô màu siêu đồ thị hỗn hợp trong đó các bài toán xác định số màu tối đại và tối tiểu có thể được sử dụng đều trở nên không tầm thường.

Giả sử cho trước một tập hữu hạn $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n \geq 1$), $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_l\}$ và $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$ là hai họ các tập con của X sao cho kích thước của mọi thành viên của họ $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ đều ≥ 2 . Mỗi thành viên của $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ đều có thể là một tập rỗng và bất kỳ tập các đỉnh con nào của X cũng có thể được chứa trong cả $\mathcal{C}$ và $\mathcal{D}$.

Nếu $\mathcal{C} \neq \emptyset$ thì chúng ta kí hiệu $I = \{1, 2, \dots, l\}$; nếu $\mathcal{D} \neq \emptyset$ thì chúng ta kí hiệu $J = \{1, 2, \dots, m\}$.

Một **siêu đồ thị hỗn hợp** được định nghĩa là một bộ ba $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ trong đó X được gọi là tập đỉnh, kí hiệu bởi $V(\mathcal{H})$, $\mathcal{C}$ là một họ các tập con của X được gọi là tập các $\mathcal{C}$ – cạnh, kí hiệu bởi $\mathcal{C}(\mathcal{H})$, $\mathcal{D}$ cũng là một họ các tập con của X được gọi là tập các $\mathcal{D}$ – cạnh, kí hiệu bởi $\mathcal{D}(\mathcal{H})$.

Tương tự như đối với các đồ thị và siêu đồ thị, giả sử cho trước một số nguyên dương $\lambda \geq 1$ và một tập các màu $\{1, 2, \dots, \lambda\}$. Mọi cách gán nhãn các phần tử của X theo các màu cho trước được gọi là một **phép tô màu**. Cụ thể hơn, chúng ta sẽ xem mọi phép tô màu bất kỳ c của siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ đều là một ánh xạ c từ tập đỉnh X vào tập các màu và kí hiệu nó bởi $c: X \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$. Đối với một ánh xạ c như vậy, giá trị $c(x)$, $x \in X$, được gọi là **màu của đỉnh x** .

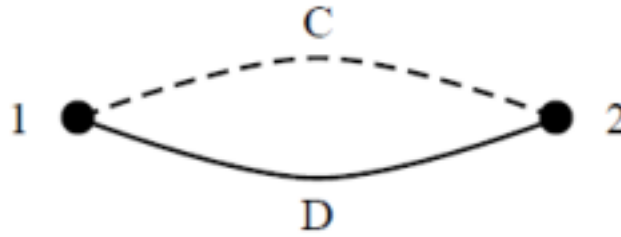
Một **phép λ – tô màu thực sự của một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$** được định nghĩa là một ánh xạ $c: X \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

- 1) Mọi cạnh $C \in \mathcal{C}$ đều có chứa ít nhất hai đỉnh được tô bởi cùng một màu;
- 2) Mọi cạnh $D \in \mathcal{D}$ đều có chứa ít nhất hai đỉnh được tô bởi hai màu khác nhau.

Một lần nữa, tương tự như đối với các đồ thị, chúng ta cũng sẽ sử dụng thuật ngữ “phép tô màu thực sự” hoặc đơn giản hơn chỉ là “phép tô màu” nếu giá trị của λ không quan trọng và điều này không gây ra nhầm lẫn. Lưu ý rằng cách định nghĩa vừa nêu ở trên chính là dạng tổng quát hóa của tất cả các định nghĩa về phép tô màu thực sự đã được giới thiệu trong “**Chủ đề 04. Phép tô màu đồ thị**” và “**8.1. Khái niệm cơ bản**” tương ứng với trường hợp $\mathcal{C} = \emptyset$. Tuy nhiên, trái ngược với các đồ thị và các siêu đồ thị, không phải mọi siêu đồ thị hỗn hợp đều có thể tô màu thực sự được:

Một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ được gọi là **colorable** nếu nó có ít nhất một phép tô màu thực sự; trường hợp ngược lại $\mathcal{H}$ được gọi là **uncolorable**.

Chẳng hạn, xét siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ trong đó $X = \{1, 2\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{1, 2\}\}$ như trong hình vẽ bên dưới.



Hình vẽ minh họa.

Nhận thấy rằng siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ là uncolorable. Thật vậy, giả sử $\mathcal{H}$ là một colorable.

Khi đó, tập $\mathcal{C}$ – cạnh $C = \{1, 2\}$ yêu cầu các đỉnh 1 và 2 phải được tô bởi cùng một màu.

Tuy nhiên, tập $\mathcal{D}$ – cạnh $D = \{1, 2\}$ yêu cầu các đỉnh 1 và 2 phải được tô bởi hai màu khác nhau.

Điều mâu thuẫn này không thể được điều hòa với bất kì tập màu cho trước $\{1, 2, \dots, \lambda\}$ nào.

Giá trị λ nhỏ nhất để tồn tại ít nhất một phép λ – tô màu thực sự của siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ được gọi là **sắc số dưới của $\mathcal{H}$** và kí hiệu bởi $\chi(\mathcal{H})$.

Khái niệm sắc số của một đồ thị hoặc một siêu đồ thị được định nghĩa trong “**Chủ đề 04. Phép tô màu đồ thị**” và “**8.1. Khái niệm cơ bản**” chỉ đơn giản là các trường hợp riêng của khái niệm sắc số dưới của một siêu đồ thị hỗn hợp với $\mathcal{C} = \emptyset$.

Hai phép tô màu thực sự c_1, c_2 của một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ được xem như là **khác nhau** nếu tồn tại ít nhất một đỉnh $x \in X$ bị thay đổi màu, nghĩa là tồn tại một đỉnh $x \in X$ sao cho $c_1(x) \neq c_2(x)$. Như vậy, bất kỳ phép hoán vị của các màu nào cũng sẽ dẫn đến một phép tô màu thực sự mới bởi vì nó đại diện cho một ánh xạ hoàn toàn khác.

Kí hiệu $P(\mathcal{H}, \lambda)$ là số các phép λ – tô màu thực sự phân biệt của một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$.

Tương tự như đối với các đồ thị, chúng ta sẽ cần xác định các phép tô màu thực sự sử dụng tất cả các màu cho trước. Trong trường hợp này, chúng ta cũng sẽ sử dụng i để kí hiệu số các màu được sử dụng.

Một phép i – tô màu thực sự của một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ được gọi là **nghiêm ngặt** nếu mỗi một trong số i màu đều được sử dụng.

Nhận thấy rằng các phép i – tô màu nghiêm ngặt chỉ tồn tại với $1 \leq i \leq n$. Lưu ý rằng một phép $\chi(\mathcal{H})$ – tô màu thực sự luôn là nghiêm ngặt bởi vì $\chi(\mathcal{H})$ là số màu nhỏ nhất có thể có được sử dụng tính trên tất cả các phép tô màu thực sự. Số màu tối đa có thể được sử dụng được định nghĩa như sau:

Giá trị tối đại i để tồn tại một phép i – tô màu nghiêm ngặt của một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ được gọi là **sắc số trên của $\mathcal{H}$** và kí hiệu bởi $\bar{\chi}(\mathcal{H})$.

Trong một phép tô màu của một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, một tập đỉnh con $Y \subseteq X$ được gọi là **đơn sắc** nếu tất cả các chỉ số $c(y)$, $y \in Y$, đều có cùng một giá trị, và nó được gọi là **đa sắc** nếu tất cả các chỉ số $c(y)$, $y \in Y$, đôi một phân biệt nhau. Như vậy, trong một phép tô màu thực sự của một siêu đồ thị hỗn hợp, các $\mathcal{D}$ – cạnh đều là các tập con không đơn sắc còn các $\mathcal{C}$ – cạnh đều là các tập con không đa sắc.

Nhận thấy rằng mọi phép i – tô màu nghiêm ngặt của $\mathcal{H}$ đều tạo ra một phân hoạch của tập đỉnh X thành i tập con đơn sắc không rỗng được gọi là các **lớp màu**. Như vậy, chúng ta có thể giải thích lại các phép tô màu nghiêm ngặt bằng cách sử dụng ngôn ngữ của các phân hoạch tập hợp:

Trong một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$, một phân hoạch của tập đỉnh X thành i tập con không rỗng $X_1, X_2, \dots, X_i$ được gọi là một phân hoạch khả dĩ của $\mathcal{H}$ nếu mọi $\mathcal{C}$ – cạnh đều có chứa ít nhất hai đỉnh nằm trong cùng một lớp còn mọi $\mathcal{D}$ – cạnh đều có chứa ít nhất hai đỉnh nằm trong các lớp khác nhau của phân hoạch này.

Thông thường, chúng ta thường biểu diễn phân hoạch khả dĩ c lại dưới dạng $c = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_i$.

Kí hiệu $r_i(\mathcal{H}) = r_i$, $1 \leq i \leq n$, là **số các phân hoạch khả dĩ** của một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ thành i tập con.

Vector nguyên $R(\mathcal{H}) = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ được gọi là **sắc phổ của siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$** .

Trên thực tế, do chúng ta luôn có sắc số trên và sắc số dưới với mọi siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ nên sẽ không thể có các phân hoạch khả dĩ thành ít hơn χ lớp màu cũng như không thể có các phân hoạch khả dĩ thành nhiều hơn $\bar{\chi}$ lớp màu.

Như vậy, sắc phổ nói chúng sẽ có dạng như sau: $R(\mathcal{H}) = (0, \dots, 0, r_\chi, \dots, r_{\bar{\chi}}, 0, \dots, 0)$.

Hơn nữa, mỗi phân hoạch khả dĩ thành i lớp màu sẽ tạo ra $i!$ phép i – tô màu nghiêm ngặt. Mỗi phép i – tô màu nghiêm ngặt này đều có thể thu được từ phân hoạch khả dĩ ban đầu bằng cách hoán vị các màu. Do đó, số các phép i – tô màu nghiêm ngặt sẽ bằng $r_i i!$. Tổng quát hơn, nếu chúng ta có $\lambda \geq i$ màu thì chúng ta sẽ có $\binom{\lambda}{i}$ cách để chọn ra một tập con gồm i phần tử từ tập màu $\{1, 2, \dots, \lambda\}$. Như vậy, số các phép λ – tô màu thực sự được tạo ra bởi tất cả các phân hoạch khả dĩ thành i tập con sẽ là $\binom{\lambda}{i} r_i i! = r_i \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - i + 1) = r_i \lambda^{(i)}$.

Để tính số tất cả các phép λ – tô màu thực sự, chúng ta chỉ cần lấy tổng các biểu thức này với mỗi $\chi(\mathcal{H}) \leq i \leq \bar{\chi}(\mathcal{H})$. Như vậy, chúng ta đi đến kết luận sau:

Kết quả 8.3.1.

Số các phép λ – tô màu thực sự $P(\mathcal{H}, \lambda)$ của một siêu đồ thị hỗn hợp colorable $\mathcal{H}$ là một đa thức theo λ và được xác định bởi công thức sau:

$$P(\mathcal{H}, \lambda) = \sum_{i=\chi(\mathcal{H})}^{\bar{\chi}(\mathcal{H})} r_i(\mathcal{H}) \lambda^{(i)}.$$

Như vậy, chúng ta cũng thường gọi $P(\mathcal{H}, \lambda)$ là đa thức sắc số của siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$. Khái niệm đa thức sắc số chúng ta đã giới thiệu trong “**Chủ đề 04. Phép tô màu đồ thị**” chẳng qua chỉ là một dạng đặc biệt của nó và Kết quả 8.3.1) cũng chính là dạng mở rộng trực tiếp của công thức cơ bản $P(G, \lambda) = \sum_{i=\chi(G)}^n r_i(G) \lambda^{(i)}$. Như vậy, chúng ta cũng có thể gọi nó là công thức cơ bản cho phép tô màu siêu đồ thị hỗn hợp.

Kết quả 8.3.2.

Với mọi siêu đồ thị hỗn hợp colorable $\mathcal{H}$, bậc của đa thức sắc số $P(\mathcal{H}, \lambda)$ sẽ bằng $\bar{\chi}$ và hệ số bậc cao nhất cũng sẽ bằng $r_{\bar{\chi}}$.

Chứng minh kết quả 8.3.2.

Tính đúng đắn của khẳng định trên được suy ra từ việc $P(\mathcal{H}, \lambda) = \sum_{i=\chi(\mathcal{H})}^{\bar{\chi}(\mathcal{H})} r_i(\mathcal{H}) \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - i + 1)$. $\square$

Đối với một siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable $\mathcal{H}$, chúng ta đặt $\chi(\mathcal{H}) = \bar{\chi}(\mathcal{H}) = 0$, $R(\mathcal{H}) = (0, 0, \dots, 0)$, $P(\mathcal{H}, \lambda) = 0$.

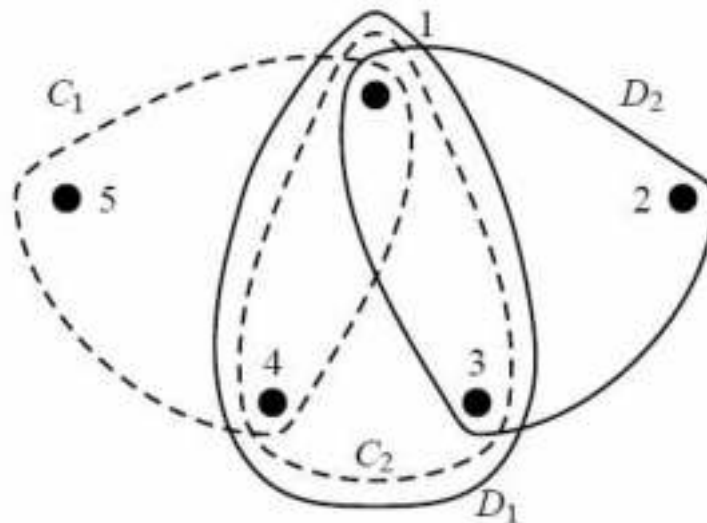
Đối với một siêu đồ thị hỗn hợp colorable $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, siêu đồ thị con hỗn hợp từng phần $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \emptyset)$, kí hiệu bởi $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = (X, \mathcal{C})$, được gọi là một **$\mathcal{C}$ – siêu đồ thị** và siêu đồ thị con hỗn hợp từng phần $\mathcal{H} = (X, \emptyset, \mathcal{D})$, kí hiệu bởi $\mathcal{H}_{\mathcal{D}} = (X, \mathcal{D})$, cũng được gọi là một **$\mathcal{D}$ – siêu đồ thị**.

Nhận xét. Chúng ta sẽ sử dụng các tiền tố $\mathcal{C}$ – và $\mathcal{D}$ – khi thảo luận về các phép tô màu khác nhau và các tính chất cấu trúc tương ứng của $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ và $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$. Chẳng hạn, một **$\mathcal{D}$ – đồ thị** là một $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị với tất cả các $\mathcal{D}$ – cạnh đều có kích thước bằng 2, nghĩa là nó là một đồ thị cổ điển. Để thuận tiện, chúng ta cũng sẽ sử dụng thuật ngữ “cạnh” để chỉ các phần tử nằm trong họ $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. Do đó, việc sử dụng các tiền tố sẽ giúp chúng ta phân biệt loại của phép tô màu của một tập con của các đỉnh.

Trong khuôn khổ của bài viết này, các phép tô màu của các siêu đồ thị cổ điển chính là các phép tô màu của các $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị; sắc số của một siêu đồ thị chính là sắc số dưới của siêu đồ thị $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$. Mặt đối lập của chúng chính là các phép tô màu của các $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị; khi đó, vấn đề chính của chúng ta ở đây đó là đi tìm giá trị của chỉ số $\bar{\chi}(\mathcal{H}_{\mathcal{C}})$. Lưu ý rằng, với bất kỳ siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ (colorable hoặc uncolorable), các siêu đồ thị con từng phần $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ và $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ đều colorable với một màu và $n(\mathcal{H})$ màu tương ứng. Hiển nhiên, $\chi(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) = 1, r_1(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) = 1$ và $\bar{\chi}(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}) = n(\mathcal{H}), r_n(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}) = 1$. Tổng quát hơn, với mọi siêu đồ thị hỗn hợp colorable $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ bất kì, chúng ta luôn có các đánh giá hiển nhiên sau đây:

$$1 \leq \chi(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}) \leq \chi(\mathcal{H}) \leq \bar{\chi}(\mathcal{H}) \leq \bar{\chi}(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) \leq n.$$

Chẳng hạn, xét siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \mathcal{C} = \{C_1, C_2\} = \{\{1, 4, 5\}, \{1, 3, 4\}\}, \mathcal{D} = \{D_1, D_2\} = \{\{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$ như trong hình vẽ bên dưới.

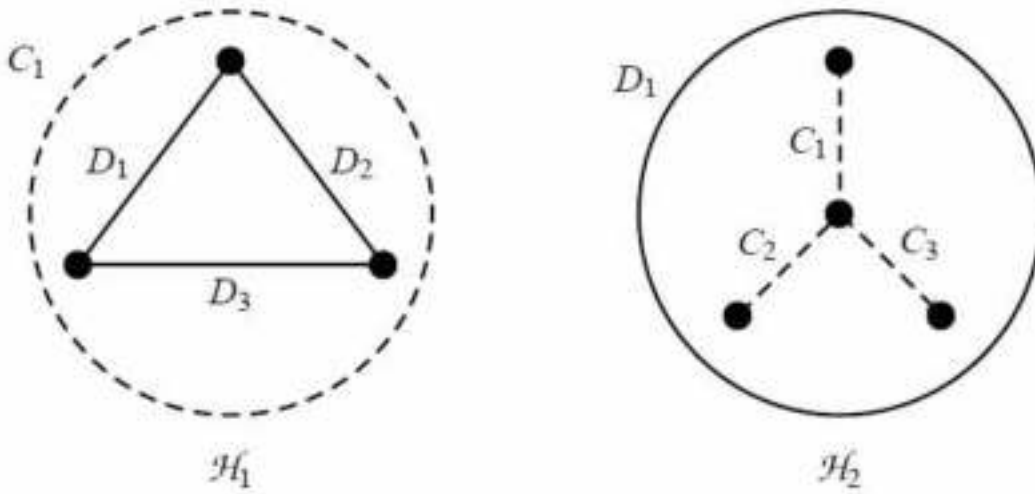


Hình ảnh minh họa siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$.

Chúng ta có thể dễ dàng chứng minh được rằng $\chi(\mathcal{H}) = 2$ và $\bar{\chi}(\mathcal{H}) = 4$. Nhận thấy rằng do $C_2 = D_1 = \{1,3,4\}$ nên, trong bất kỳ phép tô màu thực sự nào của $\mathcal{H}$, các tập hợp con của các đỉnh $\{1,3,4\}$ đều không thể đơn sắc cũng như không thể đa sắc (điều này suy ra từ việc nó có ba phần tử nên sẽ phải có chính xác hai màu phải được sử dụng). Vector nguyên $c_1 = (1,2,2,1,1)$ là một phép tô màu thực sự sử dụng số màu nhỏ nhất có thể được còn vector nguyên $c_2 = (1,2,3,1,4)$ là một phép tô màu nghiêm ngặt sử dụng số màu lớn nhất có thể được. $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}_\mathcal{C}$ thu được từ $\mathcal{H}$ bằng cách xóa yếu tất cả các $\mathcal{D}$ – cạnh; $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}_\mathcal{D}$ thu được từ $\mathcal{H}$ bằng cách xóa yếu tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh. Khi đó, đánh giá nêu ở trên sẽ trở thành:

$$1 \leq \chi(\mathcal{H}_\mathcal{D}) = 2 \leq \chi(\mathcal{H}) = 2 \leq \bar{\chi}(\mathcal{H}) = 4 \leq \bar{\chi}(\mathcal{H}_\mathcal{C}) = 4 \leq n = 5.$$

Nhận thấy rằng chúng ta có thể dễ dàng xây dựng các siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable. Chẳng hạn, xét các siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ như trong hình vẽ bên dưới.



Hình vẽ minh họa các siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$.

Siêu đồ thị $\mathcal{H}_1$ có chứa một $\mathcal{D}$ – đồ thị K_3 được tô bởi ba màu khác nhau; tuy nhiên, $\mathcal{C}$ – cạnh duy nhất lại chứa đồng thời cả ba đỉnh của $\mathcal{H}_1$, nên nó không thể nào là colorable (trường hợp ngược lại, nó sẽ yêu cầu phải có hai đỉnh nào đó được tô bởi cùng một màu, mâu thuẫn). Tổng quát hơn, bất kỳ $\mathcal{C}$ – cạnh nào với tất cả các đỉnh tạo thành một $\mathcal{D}$ – đồ thị đầy đủ sẽ được gọi là một **$\mathcal{C}$ – cạnh hiển nhiên uncolorable**.

Siêu đồ thị $\mathcal{H}_2$ có chứa một cây bao hàm tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh. Điều này ngụ ý rằng cả bốn đỉnh này đều được tô bởi cùng một màu. Tuy nhiên, $\mathcal{D}$ – cạnh duy nhất lại là tập tất cả các đỉnh, nên nó không thể nào là colorable (trường hợp ngược lại, nó sẽ yêu cầu phải có hai đỉnh nào đó được tô bởi hai màu khác nhau, mâu thuẫn). Tổng quát hơn, bất kỳ $\mathcal{D}$ – cạnh nào với mỗi cặp đỉnh đều được nối với nhau bởi một $\mathcal{C}$ – đường đi gồm các $\mathcal{C}$ – cạnh có kích thước bằng 2 sẽ được gọi là một **$\mathcal{D}$ – cạnh hiển nhiên uncolorable**. Lưu ý rằng các $\mathcal{C}$ – đường đi này không nhất thiết phải nằm trong $\mathcal{D}$ – cạnh.

Hiển nhiên, bất kỳ siêu đồ thị hỗn hợp nào có chứa một cạnh hiển nhiên uncolorable thuộc bất kỳ loại nào cũng đều uncolorable. Nhắc lại rằng, trong bất kỳ phép tô màu siêu đồ thị hỗn hợp nào, chúng ta không bao giờ xét các cạnh có kích thước ≤ 1 thuộc bất kỳ loại nào.

Một quan sát trực quan khác nữa là bất kỳ siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ nào với $\bar{\chi}(\mathcal{H}_\mathcal{C}) < \chi(\mathcal{H}_\mathcal{D})$ cũng đều là uncolorable. Chúng ta sẽ thảo luận thêm về các siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable trong các mục sau của bài viết.

Trong một siêu đồ thị hỗn hợp, nếu một tập con các đỉnh đồng thời là một $\mathcal{C}$ – cạnh và một $\mathcal{D}$ – cạnh thì nó được gọi là một **bi- cạnh**. Một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ được gọi là một **bi – siêu đồ thị** nếu $\mathcal{C} = \mathcal{D}$.

Chúng ta có thể biểu diễn lại họ các đỉnh $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ của siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ bởi $\mathcal{E} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. Chúng ta cũng nói rằng $\mathcal{H}' = (X, \mathcal{E})$ là **siêu đồ thị underline của $\mathcal{H}$** . Bằng cách sử dụng thuật ngữ siêu đồ thị underline, chúng ta có thể mở rộng các khái niệm và các cấu trúc quy ước đã được định nghĩa cho các siêu đồ thị cũng được áp dụng cho các siêu đồ thị hỗn hợp. Chẳng hạn, mọi đường đi nằm trong siêu đồ thị underline $\mathcal{H}'$ đều được gọi là một **đường đi hỗn hợp trong $\mathcal{H}$** . Hơn nữa, nó sẽ được gọi là một $\mathcal{C}$ – **đường đi** (hoặc $\mathcal{D}$ – **đường đi**) trong $\mathcal{H}$ nếu nó là một đường đi tương ứng trong $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ (hoặc $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$). $\mathcal{H}$ là một **siêu đồ thị hỗn hợp r – uniform** nếu $\mathcal{H}'$ là một siêu đồ thị r – uniform. $\mathcal{H}$ được gọi là **liên thông** nếu $\mathcal{H}'$ liên thông; trường hợp ngược lại, $\mathcal{H}$ được gọi là **không liên thông**. Đối với bất kỳ tập con $Y \subseteq X$, siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}_Y = (Y, \mathcal{C}', \mathcal{D}')$ được gọi là một **siêu đồ thị hỗn hợp con cảm sinh của $\mathcal{H}$** nếu siêu đồ thị underline của $\mathcal{H}_Y$ là một siêu đồ thị con cảm sinh trong $\mathcal{H}'$, nghĩa là $\mathcal{C}'$ và $\mathcal{D}'$ lần lượt bao hàm tất cả các thành viên của $\mathcal{C}$ và của $\mathcal{D}$ và hiển nhiên chúng hoàn toàn nằm trong Y . Hiển nhiên, mọi siêu đồ thị con cảm sinh của một siêu đồ thị hỗn hợp bất kỳ đều có thể thu được bằng cách xóa mạnh các đỉnh tương ứng.

Trong một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, một tập các đỉnh $S \subseteq X$ được gọi là $\mathcal{C}$ – **ổn định**/ $\mathcal{C}$ – **độc lập** ($\mathcal{D}$ – **ổn định**/ $\mathcal{D}$ – **độc lập**) nếu nó không có chứa bất kỳ $\mathcal{C}$ – cạnh (tương ứng $\mathcal{D}$ – cạnh) nào như một tập con.

8.4. Thuật toán tham lam dùng để xác định sắc số trên

Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ thảo luận về một thuật toán tham lam dùng để xác định sắc số trên tương tự như thuật toán tham lam dùng để xác định sắc số dưới như đã trình bày trong mục “8.2. Thuật toán tham lam dùng để xác định sắc số của một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ ”.

Giả sử cho trước một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \emptyset)$, tạm viết tắt đơn giản là $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C})$, và kí hiệu $\mathcal{C}(x)$ là tập các $\mathcal{C}$ – cạnh có chứa một đỉnh $x \in X$. Các đỉnh x và y được gọi là **liên hợp với nhau** nếu $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \emptyset$.

Chúng ta sẽ gọi tập $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y)$ là một **bistar của đỉnh $x \in X$ đối với đỉnh $y \in X$** . Như vậy, mọi đỉnh y liên hợp với x đều xác định một bistar. Một số bistar của một đỉnh cho trước có thể bị trùng với nhau. Hơn nữa, giá trị $b(x, \mathcal{H}) = \max_y \{|\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y)| : y \in X, y \neq x\}$ được gọi là **bi – bậc của đỉnh x** . Theo cách định nghĩa này, bi – bậc của một đỉnh chính là kích thước tối đại có thể có của một bistar được tạo ra bởi đỉnh đó. Chúng ta sẽ thấy rằng khái niệm bi – bậc trong các $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị theo một nghĩa nào đó đóng vai trò tương tự như khái niệm bậc mono trong các $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị đã được định nghĩa trong mục “8.2. Thuật toán tham lam dùng để xác định sắc số của một siêu đồ thị $\mathcal{H}$ ”.

Giá trị $o(x, \mathcal{H}) = |\mathcal{C}(x)| - b(x, \mathcal{H}) \geq 0$ được gọi là **bậc original của đỉnh x trong $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}$** .

Nhận thấy rằng nếu $o(x, \mathcal{H}) = 0$ thì sẽ có một đỉnh $y \in X$ khác được chứa trong tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh có chứa x . Thuật ngữ “bậc original” có thể được giải thích như sau. Nếu chúng ta sử dụng các đỉnh của một siêu đồ thị để đại diện cho các đối tượng khác nhau trong thực tế thì các $\mathcal{C}$ – cạnh sẽ tương ứng với các tập các đối tượng có cùng chung một thuộc tính nào đó (mỗi thuộc tính là một $\mathcal{C}$ – cạnh nào đó). Khi đó, tập tất cả các thuộc tính của đối tượng x chính là $\mathcal{C}(x)$. Đối tượng x với $o(x, \mathcal{H}) = 0$ sẽ “không phải là một bản gốc” bởi vì tồn tại ít nhất một đối tượng y khác cũng có cùng các thuộc tính như x . Như vậy, bậc original của một đỉnh là một loại thước đo cho “tính tương đồng giữa đỉnh đó với các đỉnh láng giềng của nó”. Bậc original càng cao thì chứng tỏ nó càng ít giống với các đỉnh láng giềng của nó hơn. Giới hạn trên của bậc original là $|\mathcal{C}(x)| - 1$ xảy ra khi x là tâm của một monostar nào đó.

Giá trị $O(\mathcal{H}) = \max_{Y \subseteq X} \min_{x \in Y} o(x, \mathcal{H}_Y)$ được gọi là *trở kháng của siêu đồ thị $\mathcal{H}$* .

Chúng ta sẽ thấy rằng giá trị $O(\mathcal{H})$ đóng một vai trò tương tự như vai trò của $M(\mathcal{H})$.

Trong một phép tô màu của một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, một tập $M \subseteq X$ gồm các đỉnh được gọi là *thành phần liên thông đơn sắc của một đỉnh $x \in M$* , kí hiệu bởi $MC(x)$, nếu tất cả các đỉnh của M đều có cùng màu với x và đều có thể nối với x bằng các $\mathcal{C}$ – đường đi nào đó.

Kế tiếp, để xác định giới hạn dưới của sắc số trên, chúng ta sẽ đề xuất một thuật toán giả tham lam cho một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C})$ bất kỳ. Tương tự như đối với sắc số dưới, ý tưởng ở đây của chúng ta cũng là đi tìm một dãy sắp thứ tự tốt của các đỉnh và thực hiện tô màu tham lam $\mathcal{H}$ liên tiếp bằng cách tận dụng tối đa các nguồn thông tin địa phương. Nhưng ở lần này, ở mỗi bước của thuật toán, chúng ta luôn phải sử dụng một màu mới cho đỉnh kế tiếp và xác minh xem phép tô màu thu được phải có là thực sự hay không. Nếu phép tô màu thu được không thỏa mãn yêu cầu (nghĩa là có các $\mathcal{C}$ – cạnh đa sắc) thì chúng ta phải tô màu lại một thành phần liên thông đơn sắc bắt đầu tại một đỉnh láng giềng nào đó của đỉnh đang xét để đảm bảo tính đúng đắn của phép tô màu mới và giảm tối thiểu việc sử dụng màu mới có thể được. Do việc quay lui là không thể tránh khỏi được trong cách tiếp cận như trên nên thuật ngữ chính xác mà chúng ta nên sử dụng ở đây phải là “thuật toán giả tham lam”.

Thuật toán tô màu giả tham lam cho một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị.

INPUT: $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C})$, $|X| = n$.

OUTPUT: Phép tô màu nghiêm ngặt của $\mathcal{H}$ cùng với số màu được sử dụng.

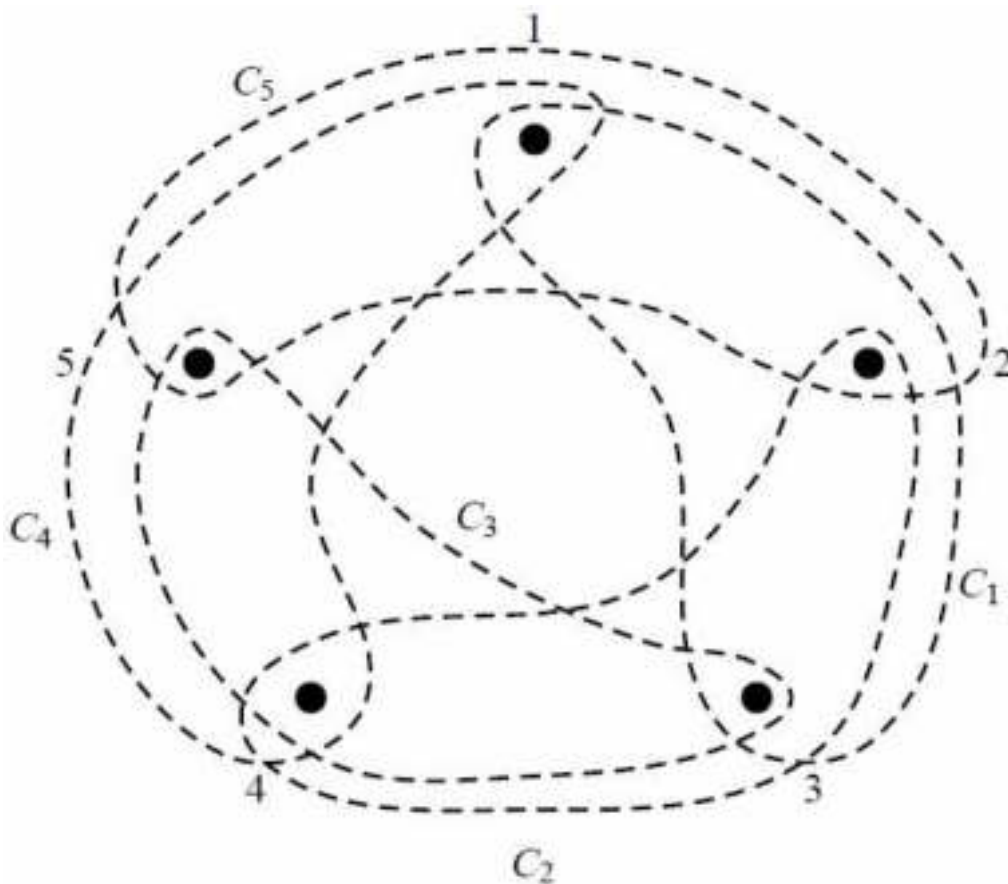
1. Đặt $i = n$, $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}$. Tìm một đỉnh có bậc original nhỏ nhất trong $\mathcal{H}_n$ và gán nhãn nó bởi x_n .
2. Đặt $i := i - 1$. Nếu $i = 0$ thì chuyển tới bước 5 của thuật toán.
3. Xóa mạnh đỉnh x_{i+1} khỏi $\mathcal{H}_{i+1}$ và tạo thành một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị cảm sinh $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{i+1} - x_{i+1}$.
4. Tìm một đỉnh có bậc original nhỏ nhất trong $\mathcal{H}_i$, gán nhãn nó bởi x_i và chuyển tới bước 2 của thuật toán.
5. Đặt $U = \{1\}$ là danh sách các màu đã được sử dụng, tô màu đỉnh x_1 bởi màu 1, đặt $i = 1$, $new = 2$.
6. Đặt $i := i + 1$. Nếu $i = n$ thì chuyển tới bước 10 của thuật toán. Tô màu đỉnh x_i của $\mathcal{H}_i$ bởi màu new . Đặt $U := U \cup \{new\}$, $new := new + 1$.
7. Kiểm tra tính đúng đắn của phép tô màu của $\mathcal{H}_i$. Nếu không có $\mathcal{C}$ – cạnh đa sắc nào thì chuyển tới bước 6 của thuật toán.
8. Trong siêu đồ thị $\mathcal{H}_i$, chọn ra một đỉnh láng giềng y của đỉnh x_i sao cho đỉnh này tạo ra một bistar có kích thước lớn nhất có chứa x_i với tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh đều đa sắc. Nếu x_i chưa được tô màu lại trong $\mathcal{H}_i$ thì chúng ta tô màu lại x_i bởi màu của y . Đặt $U := U - \{new\}$, $new := new - 1$, chuyển tới bước 7 của thuật toán.
9. Tô màu lại tất cả các đỉnh nằm trong thành phần liên thông đơn sắc $MC(y)$ bởi màu của x_i và chuyển tới bước 7 của thuật toán.
10. Đánh số lại các màu của U theo thứ tự tăng dần và kết thúc thuật toán.

Nhận xét. Việc chúng ta tô màu lại các thành phần liên thông đơn sắc nêu trong thuật toán trên tương tự như việc chúng ta tô màu lại các đường đi Kempenhur nêu trong “**Chủ đề 04. Phép tô màu đồ thị**”.

Giả sử cho trước một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C})$ với $|X| = n$, $|\mathcal{C}| = n$ được biểu diễn bởi một ma trận liên thuộc $I(\mathcal{H})$ có kích thước $n \times k$. Do việc tìm bậc original của một đỉnh sẽ yêu cầu chúng ta tiêu tốn $O(nk)$ bước nên việc tìm bậc original nhỏ nhất sẽ tiêu tốn $O(n^2k)$ bước. Như vậy, trong trường hợp xấu nhất, các bước 1- 4 có thể được thực hiện trong $O(n^3k)$ bước.

Để kiểm tra xem một phép tô màu có phải là thực sự hay không, chúng ta sẽ cần xem xét qua từng đỉnh một nên sẽ tiêu tốn $O(nk)$ bước. Đồng thời, chúng ta cũng có thể gán nhãn lại các $\mathcal{C}$ – cạnh đã bị tô màu sai. Việc đi tìm một đỉnh láng giềng y của x_i và đồng thời xác định bậc original của y sẽ tiêu tốn $O(nk)$ bước. Việc đi tìm và tô màu lại một thành phần liên thông đơn sắc $MC(y)$ cũng có thể được thực hiện trong $O(nk)$ bước. Do, trong trường hợp xấu nhất, tất cả các đỉnh láng giềng của x đều phải được tô màu lại nên độ phức tạp của các bước 7- 9 là $O(n^2k)$. Do các bước 7- 9 sẽ được lặp lại n lần nên độ phức tạp của phần thứ hai và của toàn bộ thuật toán này không thể nào vượt quá $O(n^3k)$. Chúng ta có thể cải thiện lại đánh giá này bằng cách sử dụng một số cấu trúc và kỹ thuật đặc biệt.

Chẳng hạn, xét $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C})$ với $X = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$, $C_1 = \{1,2,3\}$, $C_2 = \{2,3,4\}$, $C_3 = \{3,4,5\}$, $C_4 = \{4,5,1\}$, $C_5 = \{5,1,2\}$.



Hình vẽ minh họa $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C})$.

Đặt $\mathcal{H}_5 = \mathcal{H}$. Do tất cả các đỉnh của $\mathcal{H}$ đều có cùng bậc original bằng 1 nên chúng ta có thể bắt đầu với đỉnh 5 đầu tiên: $x_5 = 1$.

Xét $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị cảm sinh $\mathcal{H}_4 = (X_4, \mathcal{C}_4)$ với $X_4 = \{2,3,4,5\}$, $\mathcal{C}_4 = \{C_2, C_3\}$. Đỉnh đầu tiên có bậc original nhỏ nhất là $x_4 = 2$.

Xét $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị cảm sinh $\mathcal{H}_3 = (X_3, \mathcal{C}_3)$ với $X_3 = \{3,4,5\}$, $\mathcal{C}_3 = \{C_3\}$. Đỉnh đầu tiên có bậc original nhỏ nhất là $x_3 = 3$.

Xét $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị cảm sinh $\mathcal{H}_2 = (X_2, \mathcal{C}_2)$ với $X_2 = \{4,5\}$, $\mathcal{C}_2 = \{\emptyset\}$. Đỉnh đầu tiên có bậc original nhỏ nhất là $x_2 = 4$.

Xét $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị cảm sinh $\mathcal{H}_1 = (X_1, \mathcal{C}_1)$ với $X_1 = \{5\}$, $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset\}$. Đỉnh cuối cùng của chúng ta là $x_1 = 5$.

Đây là các kết quả thu được sau khi thực hiện các bước 1- 4 của thuật toán.

Như thường lệ, với mọi $i = 1, \dots, 5$, chúng ta sẽ kí hiệu $c(i)$ là màu của đỉnh i .

Đặt $c = (c(1), c(2), c(3), c(4), c(5)) = (0,0,0,0,0)$. Bắt đầu tô màu $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}$.

Bước 5: $c = (0,0,0,0,1)$.

Bước 6: $c = (0,0,0,2,1)$.

Bước 7: không có bất kỳ $\mathcal{C}$ – cạnh đa sắc nào được chứa trong $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}_2$.

Bước 6: $c = (0,0,3,2,1)$.

Bước 7: C_3 là một $\mathcal{C}$ – cạnh đa sắc chứa trong $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}_2$.

Bước 8: Tô màu lại: $c = (0,0,2,2,1)$.

Bước 7: không có bất kỳ $\mathcal{C}$ – cạnh đa sắc nào được chứa trong $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}_3$.

Bước 6: $c = (0,3,2,2,1)$.

Bước 7: không có bất kỳ $\mathcal{C}$ – cạnh đa sắc nào được chứa trong $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}_4$.

Bước 6: $c = (4,3,2,2,1)$.

Bước 7: C_1, C_4, C_5 là các $\mathcal{C}$ – cạnh đa sắc chứa trong $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}_5$.

Bước 8: Các đỉnh 2 và 5 tạo ra các bistar có kích thước lớn nhất của đỉnh 1 với tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh đều đa sắc trong $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}_5$. Chọn đỉnh 5. Đỉnh 1 chưa được tô màu lại. Tô màu lại đỉnh 1 bởi màu $c(5) = 1$: $c = (1,3,2,2,1)$.

Bước 7: C_1 là một $\mathcal{C}$ – cạnh đa sắc chứa trong $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}_5$.

Bước 8: Các đỉnh 2 và 3 tạo ra các bistar có kích thước lớn nhất với tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh đều đa sắc trong $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}_5$. Chọn đỉnh 3.

Bước 9: Tô màu lại thành phần liên thông đơn sắc $MC(3) = \{3,4\}$: $c = (1,3,1,1,1)$.

Bước 7: $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ được tô màu thực sự.

Bước 10: Đánh số lại các màu theo thứ tự tăng dần: $c = (1,2,1,1,1)$. Kết thúc thuật toán.

Nhận xét. Lưu ý rằng, trong quá trình tô màu khi mà $\mathcal{H}_5 = \mathcal{H}$ được tái tạo lại và chúng ta thu được phép tô màu $c = (4,3,2,2,1)$, đối với đỉnh $x_5 = 1$ không có màu nào trong số các màu có sẵn 1, 2, 3, 4, 5, ... có thể được sử dụng. Tại thời điểm này của thuật toán, chúng ta gặp phải một **bế tắc**, nghĩa là tình huống khi không có màu nào trong số các màu có sẵn có thể được sử dụng để tô màu cho đỉnh tiếp theo của $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}$. Do $\mathcal{H}$ hiển nhiên là colorable nên việc tô màu lại là không thể tránh khỏi được.

Kết quả 8.4.1.

Giá trị lớn nhất của bậc original nhỏ nhất được tạo ra bởi các bước 1- 4 của thuật toán sẽ bằng $O(\mathcal{H})$.

Chứng minh kết quả 8.4.1.

Kí hiệu t là giá trị lớn nhất của bậc original nhỏ nhất tính trên tất cả các đỉnh nằm trong dãy sắp thứ tự được tạo ra bởi các bước 1 – 4. Hiển nhiên, $t \leq O(\mathcal{H})$.

Giả sử rằng $t \leq O(\mathcal{H}) - 1$. Khi đó, có một đỉnh y nằm trong một siêu đồ thị con cảm sinh $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ nào đó sao cho

$$o(y, \mathcal{H}') = \min_z o(z, \mathcal{H}') = O(\mathcal{H}) \geq t + 1.$$

Dễ dàng chứng minh được rằng bậc original của bất kỳ đỉnh nào cũng đều là một hàm đơn điệu đối với quan hệ siêu đồ thị con cảm sinh. Điều này chỉ ra rằng đỉnh đầu tiên của $\mathcal{H}'$ bị xóa bởi thuật toán sẽ có bậc original $\geq t + 1$, mâu thuẫn. Như vậy, $t = O(\mathcal{H})$. $\square$

Theo một nghĩa nào đó, Kết quả 8.4.1) gần như là tương tự với Kết quả 8.2.1).

Kết quả 8.4.2.

Số màu có thể bị mất ở các bước 6 – 10 của thuật toán sẽ không thể vượt quá $O(\mathcal{H}) + 1$.

Chứng minh kết quả 8.4.2.

Giả sử rằng chúng ta gặp phải trường hợp xấu nhất ở bước 8, nghĩa là tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh có chứa x_i trong $\mathcal{H}_i$ đều đơn sắc. Nhắc lại rằng, trong $\mathcal{H}_i$, đối với đỉnh x_i , có một đỉnh láng giềng y tạo thành một bistar có kích thước lớn nhất của x_i . Nếu chúng ta tô màu lại đỉnh x_i bởi màu $c(y)$ thì chúng ta sẽ bị mất một màu (màu new) và đồng thời tô màu thực sự $b(x_i, \mathcal{H}_i)$ $\mathcal{C}$ – cạnh. Như vậy, trong trường hợp xấu nhất, chúng ta sẽ còn lại tối đa $o(x_i, \mathcal{H}_i) = |\mathcal{C}(x_i)| - b(x_i, \mathcal{H}_i)$ $\mathcal{C}$ – cạnh còn chưa được tô màu thực sự. Mỗi $\mathcal{C}$ – cạnh như vậy đều có thể tạo ra một bistar riêng biệt của x_i . Do đó, khi tô màu lại một thành phần liên thông đơn sắc nào đó của mỗi $\mathcal{C}$ – cạnh như vậy, chúng ta sẽ lại mất đi nhiều nhất $o(x_i, \mathcal{H}_i)$ màu. Như vậy, tổng số màu bị mất của chúng ta sẽ không thể lớn hơn $o(x_i, \mathcal{H}_i) + 1$.

Do, với mọi $1 \leq i \leq n$, $o(x_i, \mathcal{H}_i) \leq O(\mathcal{H}) = \max_{Y \subseteq X} \min_{x \in Y} o(x, \mathcal{H}/Y)$ nên chúng ta dễ dàng suy ra được tính đúng đắn của khẳng định cần chứng minh. $\square$

Kết quả 8.4.3.

Nếu $O(\mathcal{H}) = 0$ thì sẽ tồn tại một dãy sắp thứ tự của tập đỉnh X sao cho thuật toán có thể được thực hiện sao cho chúng ta không cần phải tô màu lại cho các thành phần liên thông đơn sắc.

Chứng minh kết quả 8.4.3.

Nhận thấy rằng các đỉnh có bậc original bằng 0 sẽ là pendant đối với một đỉnh láng giềng nào đó của nó và thuật toán có thể sử dụng màu của đỉnh láng giềng này. □

Kết quả 8.4.4.

Trong thuật toán nêu trên, nếu $|U| = p$ thì $\bar{\chi}(\mathcal{H}) \geq p$.

Nhận thấy rằng chúng ta đã mô tả thuật toán trên như là một thuật toán tô màu giả tham lam để đi tìm giá trị của $\bar{\chi}(\mathcal{H})$ và một phép tô màu tương ứng cho $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}$. Bây giờ, chúng ta sẽ tiến hành so sánh nó với thuật toán tô màu tham lam cổ điển để xác định sắc số dưới của một $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị. Đầu tiên, cả hai thuật toán đều sử dụng thông tin giống hệt nhau và được thực hiện liên tiếp, nghĩa là chúng ta sẽ phân tích $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị hoặc $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị bằng cách xóa liên tiếp các đỉnh theo một quy tắc nào đó. Sau đó, chúng ta tái tạo lại $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị hoặc $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị ban đầu bằng cách bổ sung lại các đỉnh theo thứ tự đảo ngược và tô màu chúng bằng cách sử dụng thông tin của các đỉnh láng giềng của nó. Mỗi lần như vậy, chúng ta luôn cố gắng sử dụng một màu tự do đầu tiên nếu chúng ta đang xét một $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị và một màu mới nếu chúng ta đang xét một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị. Tuy nhiên, kết quả của chúng thì lại hoàn toàn khác nhau. Thuật toán tham lam không yêu cầu chúng ta phải tô màu lại; trong trường hợp xấu nhất, chúng ta chỉ cần gán một màu mới cho đỉnh tiếp theo. Tuy nhiên, trong trường hợp xấu nhất, thuật toán giả tham lam sẽ gặp phải bế tắc và yêu cầu chúng ta phải tô màu lại các đỉnh đã được tô màu từ trước đó. Thuật toán tham lam cung cấp cho chúng ta một cách trực tiếp để đạt được giới hạn trên cho sắc số dưới. Đó không phải là cách mà một thuật toán giả tham lam thực hiện. Chúng ta phải thực hiện thuật toán để thu được một số màu nào đó và chỉ sau khi thực hiện một số đánh giá đơn giản chúng ta mới có thể thu được giới hạn dưới cho sắc số trên.

Phép so sánh ở trên chỉ ra rằng nếu chúng ta đi tìm số màu lớn nhất bằng cách áp dụng cùng một cách tiếp cận như khi đi tìm số màu nhỏ nhất thì chúng ta thu được ít hơn rất nhiều.

Giá trị $O(\mathcal{H})$ được gọi là trở kháng của một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị bởi vì nó cho chúng ta thấy cách mà cấu trúc của một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị có thể chống lại cách vận hành của thuật toán giả tham lam. Nếu trở kháng càng nhỏ thì số màu bị mất trong trường hợp xấu nhất khi cần tô màu lại sẽ càng ít hơn. Từ quan điểm này, các siêu đồ thị với $O(\mathcal{H}) = 0$ sẽ đáng được quan tâm nghiên cứu đặc biệt.

Kết quả 8.4.5.

Nếu $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C})$ là một siêu cây thì $O(\mathcal{H}) = 0$.

Chứng minh kết quả 8.4.5.

Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên chỉ số $|X| = n$. Với $n = 2, 3$, tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Giả sử khẳng định đã được chứng minh cho mọi siêu cây xác định trên $< n$ đỉnh.

Xét một đỉnh pendant x trong cây host. Do mọi $\mathcal{C}$ – cạnh của $\mathcal{H}$ đều có kích thước ≥ 2 nên $o(x, \mathcal{H}) = 0$.

Bằng cách kết hợp điều này với việc $O(\mathcal{H}_Y) = 0$ với mọi $Y \subset X$ (điều này suy ra từ giả thiết quy nạp bởi vì $\mathcal{H}_Y$ cũng là một siêu cây), $O(\mathcal{H}) = 0$. □

Kết quả 8.4.6.

Nếu $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C})$ là một siêu cây thì thuật toán có thể được thực hiện sao cho chúng ta không cần phải tô màu lại cho các thành phần liên thông đơn sắc.

Chứng minh kết quả 8.4.6.

Tính đúng đắn của khẳng định trên suy ra trực tiếp từ Kết quả 8.4.5) và Kết quả 8.4.3). □

Như vậy, các siêu cây là loại cấu trúc đồ thị đầu tiên đóng một vai trò đặc biệt quan trọng trong các phép tô màu của các $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị.

8.6. Thuật toán splitting – contraction

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, tập đỉnh $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} (n \geq 1)$, các họ cạnh $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_l\}$ và $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$. Nếu $\mathcal{C} \neq \emptyset$ thì kí hiệu $I = \{1, 2, \dots, l\}$; nếu $\mathcal{D} \neq \emptyset$ thì kí hiệu $J = \{1, 2, \dots, m\}$. Một cạnh có chứa một cạnh khác như một tập con được gọi là một **cạnh bao hàm**; một cạnh được chứa trong một cạnh khác như một tập con được gọi là một **cạnh bị bao hàm**.

Kế tiếp, để tính giá trị của $P(\mathcal{H}, \lambda)$ và $R(\mathcal{H})$ cho một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ bất kỳ, chúng ta sẽ cần đến năm quy tắc sau:

1) Nếu $\mathcal{H}$ có chứa một cạnh hiển nhiên uncolorable thuộc bất kỳ loại nào thì nó là uncolorable và cạnh uncolorable này có thể được loại bỏ khỏi các xem xét tiếp theo (**phép khử**).

2) Nếu $C_i \subseteq C_j$ thì $P(\mathcal{H}, \lambda) = P(\mathcal{H} - C_j, \lambda)$, $R(\mathcal{H}) = R(\mathcal{H} - C_j)$, $i, j \in I$. Điều này có nghĩa là cạnh bao hàm C_j có thể bị xóa yếu bởi vì các ràng buộc màu tương ứng đều được thỏa mãn trong cạnh bị bao hàm C_i (**phép $\mathcal{C}$ – xóa**).

3) Nếu $D_i \subseteq D_j$ thì $P(\mathcal{H}, \lambda) = P(\mathcal{H} - D_j, \lambda)$, $R(\mathcal{H}) = R(\mathcal{H} - D_j)$, $i, j \in J$. Điều này có nghĩa là cạnh bao hàm D_j có thể bị xóa yếu bởi vì các ràng buộc màu tương ứng đều được thỏa mãn trong cạnh bị bao hàm D_i (**phép $\mathcal{D}$ – xóa**).

4) Nếu $\{x_k, x_l\} \notin \mathcal{D}$ và $\{x_k, x_l\} \notin \mathcal{C}$ thì $P(\mathcal{H}, \lambda) = P(\mathcal{H}_1, \lambda) + P(\mathcal{H}_2, \lambda)$, $R(\mathcal{H}) = R(\mathcal{H}_1) + R(\mathcal{H}_2)$, trong đó $\mathcal{H}_1 = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D}_1)$, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cup \{x_k, x_l\}$, $\mathcal{H}_2 = (X, \mathcal{C}_1, \mathcal{D})$, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cup \{x_k, x_l\}$ (**phép tách**).

Nói cách khác, chúng ta có thể tách các phép tô màu của $\mathcal{H}$ thành các phép tô màu của $\mathcal{H}_1$ và các phép tô màu của $\mathcal{H}_2$. Trong $\mathcal{H}_1$, các đỉnh x_k và x_l được tô bởi các màu khác nhau; trong $\mathcal{H}_2$, các đỉnh x_k và x_l được tô bởi cùng một màu.

5) Nếu $C_t = \{x_k, x_l\}$ với $t \in I$, $x_k, x_l \in X$ sao cho $C_t \neq D_s$ với mọi $s \in J$ thì

$$P(\mathcal{H}, \lambda) = P(\mathcal{H}_1, \lambda), R(\mathcal{H}) = R(\mathcal{H}_1),$$

trong đó $\mathcal{H}_1 = (X_1, \mathcal{C}^1, \mathcal{D}^1)$, $X_1 = (X \setminus \{x_k, x_l\}) \cup \{y\}$, y là một đỉnh mới; nếu $x_k \in D_j$ hoặc $x_l \in D_j$, $j \in J$, thì $D_j^1 = (D_j \setminus \{x_k, x_l\}) \cup \{y\}$, trường hợp ngược lại $D_j^1 = D_j$; nếu $x_k \in C_i$ hoặc $x_l \in C_i$, $i \neq t$, thì

$C_i^1 = (C_i \setminus \{x_k, x_l\}) \cup \{y\}$, trường hợp ngược lại $C_i^1 = C_i$; $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C} - C_t$ (**phép co**).

Mọi $\mathcal{C}$ – cạnh có kích thước bằng 2 đều có thể co lại trừ khi nó trùng với một $\mathcal{D}$ – cạnh có kích thước bằng 2.

Nhận xét. Trong quy tắc 5), $n(\mathcal{H}) = n(\mathcal{H}_1) + 1$ và $R(\mathcal{H}) = R(\mathcal{H}_1)$. Điều này chỉ ra rằng $r_i(\mathcal{H}) = r_i(\mathcal{H}_1)$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n - 1$ và $r_n(\mathcal{H}) = 0$ (điều này suy ra từ việc $\mathcal{H}$ có chứa một $\mathcal{C}$ – cạnh $\mathcal{C}_t$ có kích thước bằng 2). Chúng ta sẽ sử dụng các đẳng thức của các sắc phổ theo nghĩa nêu trên khi thảo luận về các phép toán cơ bản trên các siêu đồ thị hỗn hợp.

Một thuật toán cho phép chúng ta có thể tính $P(\mathcal{H}, \lambda)$ và $R(\mathcal{H})$ cho bất kỳ siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ như một dạng tổng quát của thuật toán connection – contraction cho các đồ thị (xem lại **Chủ đề 04. Phép tô màu đồ thị**) đã được đề xuất lần đầu tiên bởi nhà toán học Zykov vào năm 1949. Những phác thảo mang tính “phôi thai” cho thuật toán connection – contraction này có thể được nhìn thấy trong các bài báo của Birkhoff và Lewis (1912), Whitney (1932) và thậm chí là trong các bài viết đầu tiên của Birkhoff về đa thức sắc số bằng ngôn ngữ của các ánh xạ trong những năm 1912!.

Ý tưởng của chúng ta ở đây là đi tìm một cặp đỉnh không phải là các $\mathcal{C}$ – cạnh cũng như không phải là các $\mathcal{D}$ – cạnh và tách tất cả các phép tô màu của $\mathcal{H}$ thành hai lớp đối với cặp đỉnh này. Hơn nữa, bằng cách thực hiện lần lượt phép khử, phép $\mathcal{C}$ – xóa, phép $\mathcal{D}$ – xóa và phép co (thứ tự ở đây là rất quan trọng), bài toán ban đầu của chúng ta sẽ được rút gọn thành một bài toán tương tự đối với một cặp đỉnh của các siêu đồ thị hỗn hợp nào đó “đơn giản” hơn siêu đồ thị hỗn hợp ban đầu (theo nghĩa là một trong số chúng có chứa ít đỉnh hơn và cái còn lại có chứa nhiều cạnh có kích thước bằng 2 hơn). Như vậy, chúng ta sẽ nhận được một dãy các đồ thị đầy đủ với các đỉnh được gán nhãn và sau cùng chúng sẽ tạo thành một danh sách gồm tất cả các phép tô màu nghiêm ngặt. Chúng ta sẽ gọi thuật toán này là “thuật toán splitting - contraction” và trình bày lại nó dưới dạng sau:

Thuật toán splitting – contraction

INPUT: Siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với tập đỉnh X được gán nhãn bởi $1, 2, \dots, n$.

OUTPUT: Danh sách L gồm tất cả các phép tô màu nghiêm ngặt, sắc phổ $R(\mathcal{H})$, đa thức sắc số $P(\mathcal{H}, \lambda)$, sắc số dưới $\chi(\mathcal{H})$ và sắc số trên $\bar{\chi}(\mathcal{H})$.

1. Đặt $L = Z = Y = \emptyset$, $R(\mathcal{H}) = (0, 0, \dots, 0)$, $P(\mathcal{H}, \lambda) = 0$, $\chi(\mathcal{H}) = \bar{\chi}(\mathcal{H}) = 0$. Bổ sung thêm $\mathcal{H}$ vào Y .
2. Kiểm tra điều kiện để loại bỏ các phần tử ra khỏi Y ; xóa các siêu đồ thị hỗn hợp hiển nhiên uncolorable ra khỏi Y .
3. Thực hiện phép $\mathcal{C}$ – xóa và phép $\mathcal{D}$ – xóa nếu có thể được trong Y .
4. Thực hiện phép co nếu có thể được trong Y ; khi thực hiện một phép co như vậy, trộn lẫn các nhãn của các đỉnh tương ứng.
5. Thực hiện một phép tách cho mỗi phần tử của Y nếu có thể được; chuyển các $\mathcal{D}$ – đồ thị đầy đủ từ Y vào Z ; nếu phép tách được thực hiện ít nhất một lần thì chuyển sang bước 2 của thuật toán.
6. Lập một danh sách L gồm tất cả các phép tô màu nghiêm ngặt bằng cách sử dụng các nhãn của các đỉnh của các $\mathcal{D}$ – đồ thị đầy đủ trong Z .
7. Tính sắc phổ $R(\mathcal{H})$ bằng cách đếm số các $\mathcal{D}$ – đồ thị đầy đủ nằm trong Z có chính xác i đỉnh, $i = 1, 2, \dots, n$.
8. Tính đa thức sắc số $P(\mathcal{H}, \lambda)$ bằng cách sử dụng công thức $P(\mathcal{H}, \lambda) = \sum_{i=\chi(\mathcal{H})}^{\bar{\chi}(\mathcal{H})} r_i(\mathcal{H}) \lambda^{(i)}$.

9. Tính $\chi(\mathcal{H})$, $\bar{\chi}(\mathcal{H})$ bằng cách sử dụng $R(\mathcal{H})$.

10. Xuất: danh sách L , vector $R(\mathcal{H})$, đa thức sắc số $P(\mathcal{H}, \lambda)$, các sắc số $\chi(\mathcal{H})$, $\bar{\chi}(\mathcal{H})$. Kết thúc thuật toán.

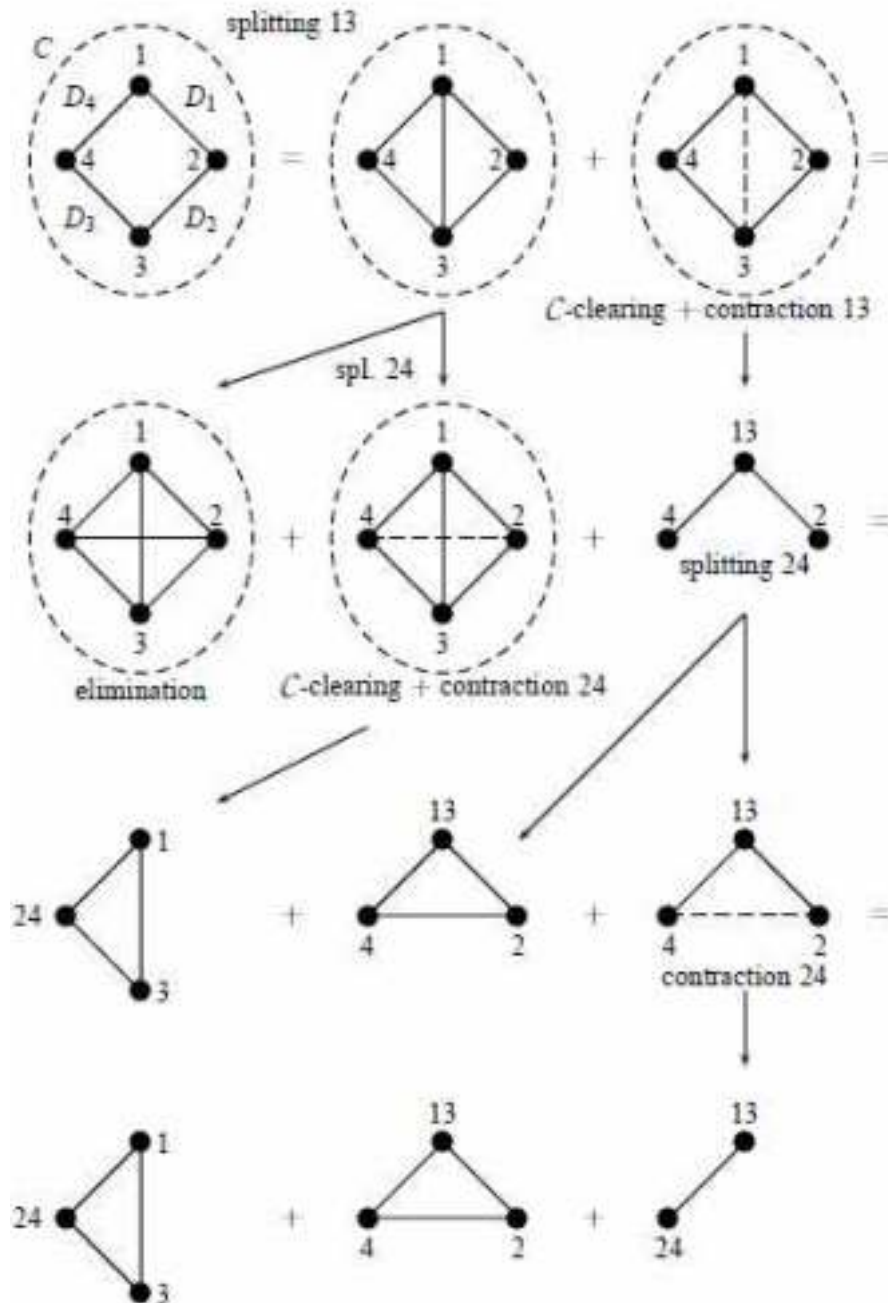
Kết quả 8.6.1.

Với mọi siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, thuật toán splitting – contraction luôn đúng.

Chứng minh kết quả 8.6.1. Tính đúng đắn của thuật toán được suy ra từ cách định nghĩa của các phép khử, phép xóa, phép tách, phép co và từ thực tế là mọi đỉnh được gán nhãn của bất kỳ đồ thị đầy đủ nào trong danh sách Z cũng đều tương ứng với một tập con đơn sắc của các đỉnh tương ứng trong chính xác một phân hoạch khả dĩ của $\mathcal{H}$. Điều cuối cùng nêu ở trên chỉ ra rằng là bất kỳ phân hoạch khả dĩ nào cũng có thể thu được từ $\mathcal{H}$ bằng thuật toán splitting-contraction. $\square$

Chẳng hạn, xét siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{C\} = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$,

$\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$ như trong hình vẽ bên dưới.



Hình vẽ minh họa thuật toán splitting - contraction cho siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Như kết quả nhận được sau khi thực hiện thuật toán splitting – contraction, chúng ta nhận được

$$Z = \{K_3, K_3, K_2\}, R(\mathcal{H}) = (0, 1, 2, 0), P(\mathcal{H}, \lambda) = 2\lambda^{(3)} + \lambda^{(2)} = 2\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda, \chi(\mathcal{H}) = 2, \bar{\chi}(\mathcal{H}) = 3,$$

và một danh sách L tương ứng gồm ba phép tô màu nghiêm ngặt có dạng $(c(1), c(2), c(3), c(4))$ như sau:

$$L = \{(1, 2, 3, 2), (1, 2, 1, 3), (1, 2, 1, 2)\}.$$

Thời gian chạy của thuật toán splitting – contraction là vào khoảng hàm mũ. Điều này cho thấy rằng có tồn tại một quy trình thống nhất chung khác với thuật toán tìm kiếm toàn diện cho phép chúng ta tính tất cả các phép tô màu nghiêm ngặt và giải quyết đồng thời các vấn đề về số màu tối thiểu và tối đại. Bằng cách sử dụng các tính chất đặc biệt của các siêu đồ thị hỗn hợp, hơn thế nữa trong một số trường hợp nhất định chúng ta có thể tìm thấy một số thủ tục đặc biệt cho phép chúng ta làm giảm độ phức tạp của thuật toán. Chúng ta có thể nhận thấy rằng các $\mathcal{C}$ – cạnh đã ngầm xuất hiện trong thuật toán connection – contraction cổ điển và theo cách nhìn nhận này thì nó đã được ngầm sử dụng từ những năm 1912. Sau cùng, nếu đầu vào là một siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable thì đầu ra sẽ chứa các danh sách rỗng và các số không.

Chúng ta cũng có thể nhận thấy được rằng lớp các đa thức có thể là đa thức sắc số của một siêu đồ thị hỗn hợp sẽ lớp hơn rất nhiều so với lớp các đa thức có thể là đa thức sắc số của một đồ thị hoặc một siêu đồ thị bởi vì các tương tác giữa chúng đều diễn ra giữa các $\mathcal{C}$ – cạnh và các $\mathcal{D}$ – cạnh.

Chẳng hạn, xét siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 5, 2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{3, 5\}\}$. Dễ dàng nhận thấy rằng $\bar{\chi}(\mathcal{H}) = 3$. Nếu chúng ta bổ sung thêm $\mathcal{D}$ – cạnh $\{2, 4\}$ thì chúng ta sẽ thu được một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}_1$ mới với $\bar{\chi}(\mathcal{H}_1) = 2$. Nói chung, nếu chúng ta bổ sung thêm một $\mathcal{C}$ – cạnh vào $\mathcal{H}$ thì nó có thể làm tăng giá trị của sắc số dưới $\chi(\mathcal{H})$ lên và nếu chúng ta bổ sung thêm một $\mathcal{D}$ – cạnh vào $\mathcal{H}$ thì nó có thể làm giảm giá trị của sắc số trên $\bar{\chi}(\mathcal{H})$ xuống.

Có một tính chất bất thường khác nữa của các phép tô màu của các siêu đồ thị hỗn hợp mà nó là một điều không phải xảy ra trong các $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị. Như chúng ta có thể nhận thấy, nếu chúng ta loại bỏ các cạnh có chứa các cạnh khác cùng loại với nó thì điều đó sẽ không làm ảnh hưởng gì đến sắc phổ và đa thức sắc số. Tuy nhiên, trong các siêu đồ thị hỗn hợp, có một số cạnh không có chứa các cạnh khác cùng loại với nó cũng có thể bị loại bỏ với các tác dụng tương tự.

Trong một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, một $\mathcal{C}$ – cạnh $C \in \mathcal{C}$ (hoặc một $\mathcal{D}$ – cạnh $D \in \mathcal{D}$) được gọi là **redundant** nếu nó không có chứa bất kỳ $\mathcal{C}$ – cạnh (hoặc $\mathcal{D}$ – cạnh) nào khác như một tập con và

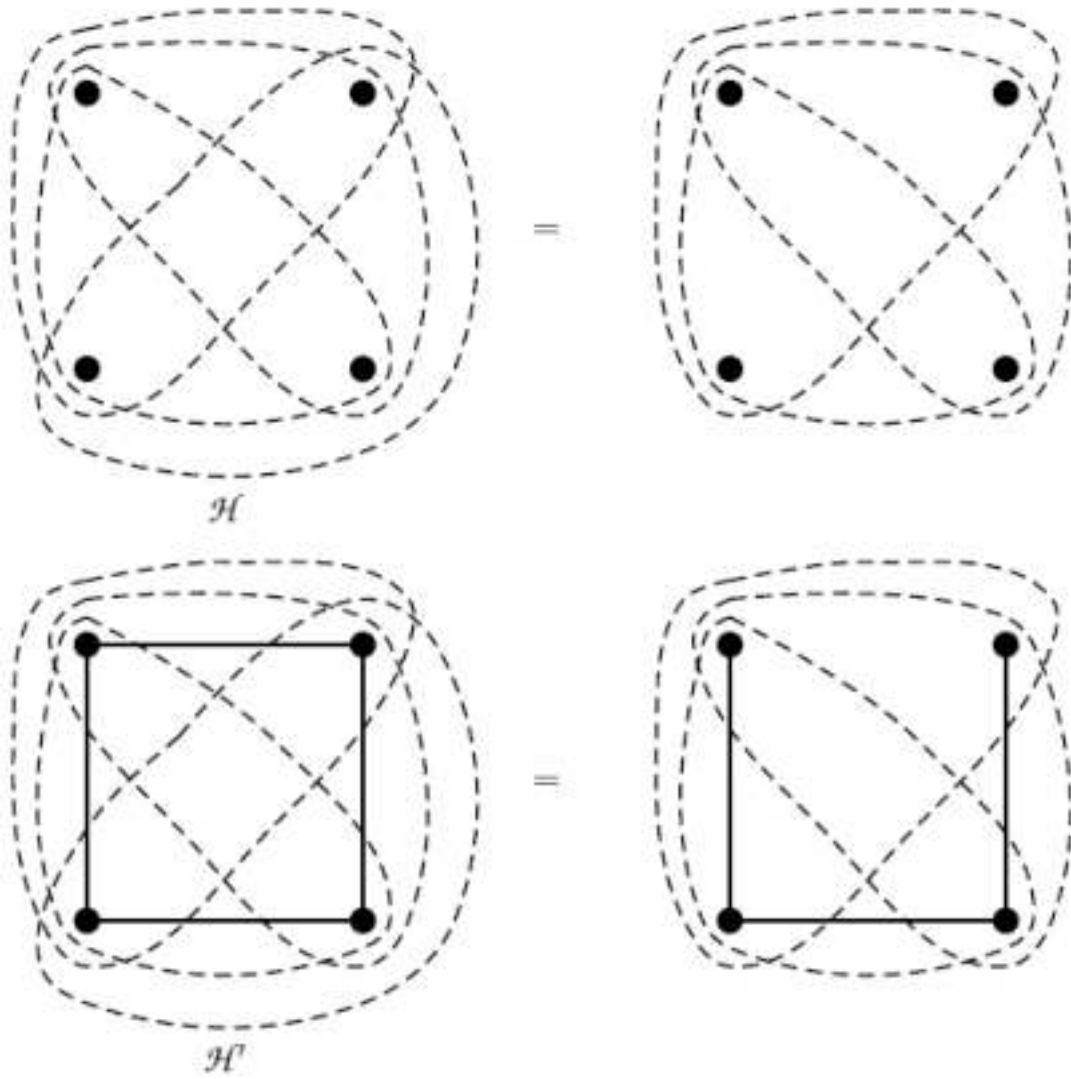
$$R(\mathcal{H}) = R(\mathcal{H} - C) \text{ (hoặc } R(\mathcal{H}) = R(\mathcal{H} - D)).$$

Chẳng hạn, xét siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \emptyset)$ với $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ như trong hình vẽ bên dưới. Chúng ta có thể nhận thấy rằng bất kỳ $\mathcal{C}$ – cạnh nào nằm trong $\mathcal{H}$ cũng đều là redundant bởi vì ba $\mathcal{C}$ – cạnh bất kỳ nào cũng đều cần sử dụng nhiều nhất hai màu cho phần bị thiếu.

Như vậy, $R(\mathcal{H}) = R(\mathcal{H} - C_j) = (1, 7, 0, 0)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Hơn nữa, nếu chúng ta bổ sung thêm vào $\mathcal{H}$ một họ các cạnh $\mathcal{D} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$ thì tạo thành một chu trình đơn giản trong siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}'$ nhận được. Trong siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}' = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, bất kỳ

$\mathcal{D}$ – cạnh nào cũng đều là redundant bởi vì ba $\mathcal{D}$ – cạnh nào khác cũng sẽ đảm bảo cho các màu sẽ khác nhau ở các đầu mút của một $\mathcal{D}$ – cạnh bị thiếu.



Hình vẽ minh họa các siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$.

Kết quả 8.6.2.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp không liên thông $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_k$ ($k \geq 2$) là các thành phần liên thông tương ứng.

Khi đó,

$$\chi(\mathcal{H}) = \max\{\chi(\mathcal{H}_1), \chi(\mathcal{H}_2), \dots, \chi(\mathcal{H}_k)\},$$

$$\bar{\chi}(\mathcal{H}) = \bar{\chi}(\mathcal{H}_1) + \bar{\chi}(\mathcal{H}_2) + \dots + \bar{\chi}(\mathcal{H}_k),$$

$$P(\mathcal{H}, \lambda) = P(\mathcal{H}_1, \lambda)P(\mathcal{H}_2, \lambda) \dots P(\mathcal{H}_k, \lambda).$$

Chứng minh kết quả 8.6.2.

Tính đúng đắn của các công thức trên được suy ra trực tiếp từ việc chúng ta có thể tô màu các thành phần liên thông một cách độc lập. □

Một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ được gọi là **reduce** nếu không có cạnh nào là một tập con của bất kỳ cạnh nào khác cùng loại và kích thước của mỗi $\mathcal{C}$ – cạnh đều ≥ 3 .

Nhận xét. Từ thuật toán splitting – contraction, phép $\mathcal{C}$ – xóa, phép $\mathcal{D}$ – xóa và phép co các $\mathcal{C}$ – cạnh có kích thước bằng 2 không làm thay đổi bất cứ điều gì; các tính chất của các phép tô màu của các siêu đồ thị hỗn hợp đều có thể được suy ra từ siêu đồ thị hỗn hợp reduce tương ứng. Do đó, không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh đều có kích thước bằng 2 và các cạnh có chứa các cạnh khác của cùng loại đó có thể bị bỏ qua, nghĩa là chúng ta chỉ cần xem xét các siêu đồ thị hỗn hợp reduce.

8.7. Tính uncolorable

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_l\}$ và $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$ là hai họ các cạnh không rỗng. Như thường lệ, kí hiệu $I = \{1, 2, \dots, l\}$ và $J = \{1, 2, \dots, m\}$. Trong mục này của bài viết, chúng ta sẽ giả định rằng siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ là đơn, nghĩa là không có cạnh nào được chứa trong một cạnh nào khác cùng loại.

Nhắc lại rằng một siêu đồ thị hỗn hợp được gọi là uncolorable nếu nó không có bất kì một phép tô màu thực sự nào; trường hợp ngược lại, nó được gọi là colorable. Kế tiếp, chúng ta xem xét bài toán về tính colorable như sau:

Bài toán về tính colorable.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$. Liệu có tồn tại ít nhất một phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}$ hay không ?

Bài toán về tính colorable đại diện cho một dạng vấn đề hoàn toàn mới trong lý thuyết về các phép tô màu. Nó chứa các bài toán về tính colorable của các siêu đồ thị cổ điển – liệu một siêu đồ thị cổ điển cho trước có thừa nhận một phép tô màu thực sự nào đó với số màu cho trước hay không ? – như một trường hợp đặc biệt. Cụ thể hơn, với mọi $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}$, chúng ta có thể bổ sung thêm các $\mathcal{C}$ – cạnh của siêu đồ thị đầy đủ K_n^{k+1} . Khi đó, $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$ là k – colorable khi và chỉ khi siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}' = (X, \binom{X}{k+1}, \mathcal{D})$ là colorable.

Siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable tối thiểu.

Trong mục con này của bài viết, chúng ta sẽ chỉ rằng có các phương pháp hoàn toàn khác để giúp chúng ta có thể xác định được các điều kiện cho tính colorable cho các lớp siêu đồ thị hỗn hợp khác nhau. Hiển nhiên, nếu một siêu đồ thị hỗn hợp có chứa một siêu đồ thị con thuộc bất kỳ loại nào (cảm sinh hoặc từng phần) uncolorable thì nó cũng là uncolorable. Do đó, một trong những mục tiêu cơ bản ở đây đó là đi tìm danh sách tất cả các siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable tối thiểu từ một lớp cho trước nào đó và mô tả tính colorable theo các siêu đồ thị con bị cấm.

Đặc biệt, chúng ta cũng sẽ chứng minh rằng luôn tồn tại các siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable $\mathcal{H}$ với hiệu giữa sắc số trên của $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị từng phần $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ và sắc số dưới của $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị từng phần $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ có thể lớn tùy ý.

Một siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable được gọi là **tối thiểu** nếu nó liên thông và nếu chúng ta thực hiện phép xóa yếu bất kỳ $\mathcal{C}$ – cạnh hoặc $\mathcal{D}$ – cạnh nào cũng sẽ đều dẫn đến một siêu đồ thị hỗn hợp colorable.

Lưu ý rằng một siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable tối thiểu sẽ không có chứa các đỉnh cô lập. Nếu hai đỉnh x_1, x_2 tạo thành một bi – cạnh trong $\mathcal{H}$ thì $\mathcal{H}$ cũng không thể là uncolorable (điều này suy ra trực tiếp từ các điều kiện

ràng buộc hiển nhiên trên $\{x_1, x_2\}$). Do đó, tính colorable tối tiểu trong trường hợp này ngụ ý rằng trong $\mathcal{H}$ không có các đỉnh, các $\mathcal{C}$ – cạnh, các $\mathcal{D}$ – cạnh nào nữa khác. Hiển nhiên, mọi siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable tối tiểu đều sẽ trở thành colorable nếu chúng ta xóa mạnh bất kỳ đỉnh nào.

Kết quả 8.7.1.

Mọi siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ đều có chứa một siêu đồ thị con (cảm sinh hoặc từng phần) uncolorable tối tiểu.

Chứng minh kết quả 8.7.1.

Chúng ta có thể xóa tuần tự các đỉnh (mạnh), các $\mathcal{C}$ – cạnh (yếu), các $\mathcal{D}$ – cạnh (yếu) cho đến khi chúng ta nhận được một siêu đồ thị con colorable. Do $\mathcal{H}$ là hữu hạn nên việc làm trên sẽ phải dừng lại sau một số hữu hạn bước nào đó. □

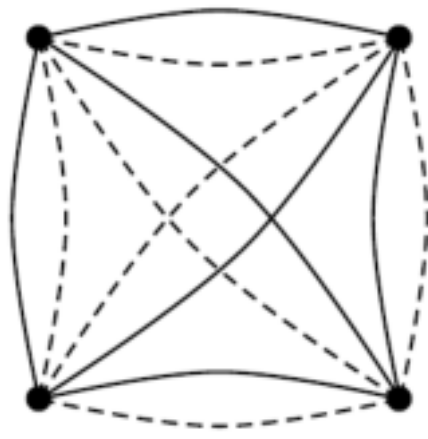
Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$. Một siêu đồ thị con từng phần $\mathcal{H}'$ (hoặc một siêu đồ thị con cảm sinh $\mathcal{H}'$) được gọi là một **siêu đồ thị con colorable từng phần tối đại** (hoặc **siêu đồ thị con colorable cảm sinh tối đại**) của $\mathcal{H}$ nếu chúng ta bổ sung thêm bất kỳ $\mathcal{C}$ – cạnh hoặc $\mathcal{D}$ – cạnh hoặc bất kỳ đỉnh nào sao cho tất cả các cạnh liên thuộc với nó thuộc cả hai loại trên của $\mathcal{H}$ vào $\mathcal{H}'$ sẽ làm cho $\mathcal{H}'$ trở thành colorable.

Như vậy, các siêu đồ thị con hỗn hợp uncolorable tối tiểu và các siêu đồ thị con colorable tối đại của các siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable xác định một ranh giới quan trọng về tính colorable. Sự tương tác giữa $\mathcal{C}$ và $\mathcal{D}$ xác định trên cùng một tập đỉnh X là không đơn giản: $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ và $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ có thể rất dễ để tô màu một cách riêng biệt trong khi toàn bộ $\mathcal{H}$ lại là uncolorable.

Để chỉ ra được điều đó, chúng ta hãy xem xét bài toán sau:

Với mọi số nguyên dương $k \geq 0$, kí hiệu $v(k)$ là số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tồn tại một siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable tối tiểu $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, $|X| = n$, với $\bar{\chi}(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) - \chi(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}) = k$. Công thức nào sẽ được dùng để tính giá trị của $v(k)$ với $k = 0, 1, 2, \dots$?

Đầu tiên, nhận thấy rằng nếu chúng ta không yêu cầu tính tối tiểu thì chúng ta có thể dễ dàng tạo ra một siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable $\mathcal{H}$ với hiệu số $\bar{\chi}(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) - \chi(\mathcal{H}_{\mathcal{D}})$ lớn tùy ý chỉ bằng cách lấy ra một bi – cạnh có kích thước bằng 2 cùng với $n - 2 = k + 1$ đỉnh cô lập. Khi đó, sắc số dưới của $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ là 2 và sắc số trên của $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ là $n - 1$. Tiếp theo, nếu k là một số nguyên âm thì hiển nhiên siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ là uncolorable. Với mọi $n = |X| \geq 2$, một ví dụ đơn giản về một siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable (nếu không yêu cầu tính tối tiểu) là siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{U}_n = (X, \binom{X}{2}, \binom{X}{2})$ trong đó tính uncolorable cũng được thỏa mãn với mọi siêu đồ thị con cảm sinh với bậc ≥ 2 của nó. Trong $\mathcal{U}_n$, mỗi cặp đỉnh của nó vừa là một $\mathcal{C}$ – cạnh và cũng vừa là một $\mathcal{D}$ – cạnh.



Hình ảnh minh họa siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable $\mathcal{U}_4$ xác định trên tập các đỉnh $\{1,2,3,4\}$.

Với mọi số nguyên không âm $k \geq 0$, kết quả sau đây sẽ chỉ ra cách để chúng ta có thể tính ra giá trị của chỉ số $v(k)$:

Kết quả 8.7.2. (Tuza - Voloshin)

Với mọi số nguyên không âm $k \geq 0$, $v(k) = k + 4$.

Chứng minh kết quả 8.7.2.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable tối thiểu $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ sao cho $|X| = n = v(k)$ và $\bar{\chi}(\mathcal{H}_\mathcal{C}) - \chi(\mathcal{H}_\mathcal{D}) = k$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $n = v(k) = k + 4$.

Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh rằng $n \geq k + 4$. Ngược lại, giả sử rằng $n < k + 4$. Do $\mathcal{H}$ là uncolorable nên $\chi(\mathcal{H}_\mathcal{D}) \geq 2$. Nếu $\chi(\mathcal{H}_\mathcal{D}) \geq 3$ thì $\bar{\chi}(\mathcal{H}_\mathcal{C}) \geq k + 3$, nghĩa là $n = k + 3$ và $\chi(\mathcal{H}_\mathcal{C}) = n$. Do đó, $\mathcal{H}$ không có chứa bất kỳ một $\mathcal{C}$ – cạnh nào và do đó nó sẽ là colorable, mâu thuẫn.

Do đó, $\chi(\mathcal{H}_\mathcal{D}) = 2$. Khi đó, chúng ta chỉ có hai khả năng sau cho số đỉnh n : $n = k + 2$ hoặc $n = k + 3$.

Tương tự như trong trường hợp trước, nếu $n = k + 2$ và với $\bar{\chi}(\mathcal{H}_\mathcal{C}) = k + 2$ thì siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ sẽ không chứa bất kỳ một $\mathcal{C}$ – cạnh nào nên nó không thể là uncolorable. Như vậy, không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử $n = k + 3$. Do $\bar{\chi}(\mathcal{H}_\mathcal{C}) = k + 2 = n - 1$ nên $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị từng phần $\mathcal{H}_\mathcal{C} = (X, \mathcal{C})$ sẽ là một bistar, nghĩa là một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị có hai đỉnh, tạm giả sử là x_1 và x_2 , nào đó nằm trong tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh. Nếu cặp đỉnh $\{x_1, x_2\}$ này không phải là một $\mathcal{D}$ – cạnh trong $\mathcal{H}_\mathcal{D}$ thì chúng ta có thể tô màu hai đỉnh x_1, x_2 bởi một màu nào đó và các đỉnh còn lại bởi các màu hoàn toàn khác, điều này mâu thuẫn với tính uncolorable của $\mathcal{H}$. Do đó, cặp đỉnh $\{x_1, x_2\}$ này phải là một $\mathcal{D}$ – cạnh trong $\mathcal{H}$. Do $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable tối thiểu nên cặp đỉnh $\{x_1, x_2\}$ sẽ không thể là một $\mathcal{C}$ – cạnh và do đó lực lượng của mỗi $\mathcal{C}$ – cạnh đều ≥ 3 .

Xét một phép 2 – tô màu bất kỳ của $\mathcal{H}_\mathcal{D} = (X, \mathcal{D})$. Đồng thời, nó cũng sẽ là một phép tô màu của siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ ban đầu (điều này suy ra từ việc mỗi $\mathcal{C}$ – cạnh đều có kích thước ≥ 3). Do đó, một lần nữa chúng ta cũng chứng minh được rằng $\mathcal{H}$ là colorable. Điều mâu thuẫn này chỉ ra rằng $v(k) = n \geq k + 4$.

Kế tiếp, để chứng minh tính đúng đắn của đánh giá ngược $v(k) \leq k + 4$, chúng ta sẽ xây dựng một chuỗi các ví dụ về các siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable tối thiểu với $\bar{\chi}(\mathcal{H}_\mathcal{C}) - \chi(\mathcal{H}_\mathcal{D}) = k$ và $n = k + 4$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Việc xây dựng này sẽ phụ thuộc vào tính chẵn lẻ của k . Đầu tiên, chúng ta sẽ chỉ ra rằng các trường hợp cơ sở với $k = 0, 1$ có thể được kiểm chứng trực tiếp.

$$k = 0.$$

Xét siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.

$$k = 1.$$

Xét siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{3, 5\}\}$.

$$k = 2l, l \geq 1.$$

Xét siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với $X = \{1, 2, 3, \dots, k + 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2, i\}: 3 \leq i \leq k + 4\}$,
 $\mathcal{D} = \{\{i, i + 1\}: 1 \leq i \leq k + 3\} \cup \{k + 4, 2\}$.

Nói cách khác, $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = (X, \mathcal{C})$ đại diện cho cho một bistar 3 – uniform trong đó các đỉnh 1, 2 nằm trong mọi $\mathcal{C}$ – cạnh. Do đó, $\bar{\chi}(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) = n - 1 = k + 3$. Hơn nữa, $\mathcal{H}_{\mathcal{D}} = (X, \mathcal{D})$ chính là chu trình lẻ $(2, 3, 4, \dots, k + 4, 2)$ với $\mathcal{D}$ – cạnh $\{1, 2\}$, nên $\chi(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}) = 3$.

Kế tiếp, chúng ta sẽ xây dựng một phép tô màu thực sự c của $\mathcal{H}$. Như thường lệ, $c(i)$ được dùng để kí hiệu cho màu của đỉnh i , $i = 1, 2, \dots, n$. Trong bất kỳ phép tô màu có thể có của $\mathcal{H}$, các đỉnh 1 và 2 sẽ được tô bởi hai màu khác nhau nào đó, tạm giả sử $c(1) = 1, c(2) = 2$. Do $\{2, 3\}$ là một $\mathcal{D}$ – cạnh nên chúng ta sẽ có

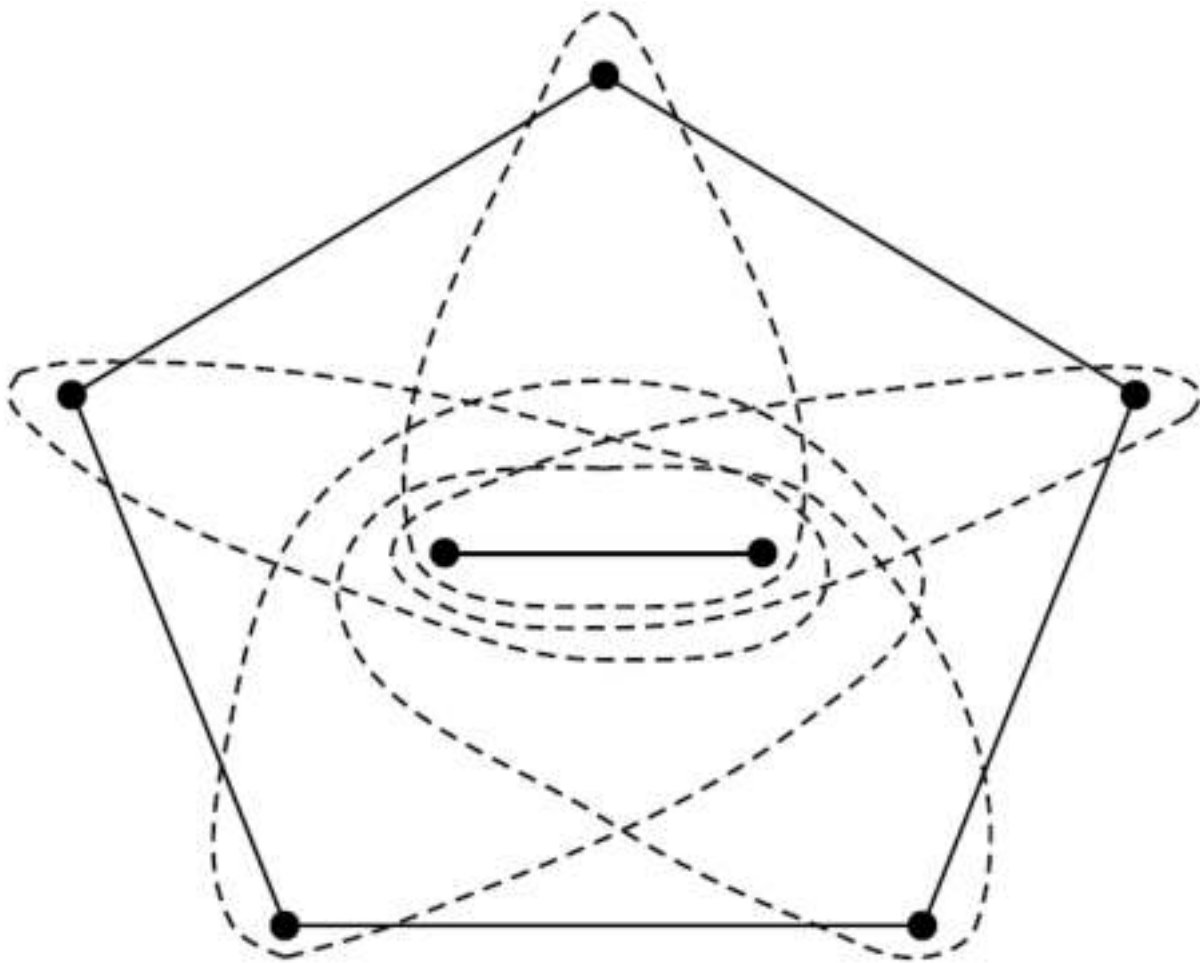
$c(3) \neq c(2)$ và bởi vì $\{1, 2, 3\}$ là một $\mathcal{C}$ – cạnh nên chỉ có thể có duy nhất một khả năng có thể xảy ra cho đỉnh 3 đó là $c(3) = c(1) = 1$. Lập luận tương tự, $c(4) \neq c(3)$ và bởi vì $\{1, 2, 4\}$ là một $\mathcal{C}$ – cạnh nên chỉ có thể có duy nhất một khả năng có thể xảy ra cho đỉnh 4 đó là $c(4) = c(2) = 2$.

Nhận thấy rằng các màu được sử dụng thay phiên nhau trong chu trình $(2, 3, 4, \dots, k + 4)$. Do $c(k + 3) = 1$ và $c(2) = 2$ nên chúng ta có thể tô màu đỉnh $k + 4$ không bởi màu 1 và cũng không bởi màu 2. Hơn nữa, bất kỳ màu nào khác với màu $c(k + 4)$ cũng đều không khả thi bởi vì $\{1, 2, k + 4\}$ là một $\mathcal{C}$ – cạnh. Như vậy, $\mathcal{H}$ sẽ là uncolorable. Chúng ta có thể dễ dàng kiểm chứng được rằng $\mathcal{H}$ là tối tiểu đối với quan hệ bao hàm.

$$k = 2l + 1, l \geq 1.$$

Xét siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với $X = \{1, 2, 3, \dots, k + 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2, i\}: 3 \leq i \leq k + 4\}$,
 $\mathcal{D} = \{1, 2\} \cup \{\{i, i + 1\}: 3 \leq i \leq k + 3\} \cup \{k + 4, 3\}$.

Một lần nữa, $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = (X, \mathcal{C})$ đại diện cho một bistar 3 – uniform trong đó các đỉnh 1, 2 cũng nằm trong mọi $\mathcal{C}$ – cạnh. Như vậy, $\bar{\chi}(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) = n - 1 = k + 3$. Trong trường hợp này, $\mathcal{H}_{\mathcal{D}} = (X, \mathcal{D})$ là một đồ thị không liên thông có $\mathcal{D}$ – cạnh $\{1, 2\}$ là thành phần liên thông đầu tiên và chu trình lẻ $(3, 4, \dots, k + 4, 3)$ là thành phần liên thông thứ hai, nên $\chi(\mathcal{H}_{\mathcal{D}}) = 3$.



Hình vẽ minh họa siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ cho trường hợp $k = 3$.

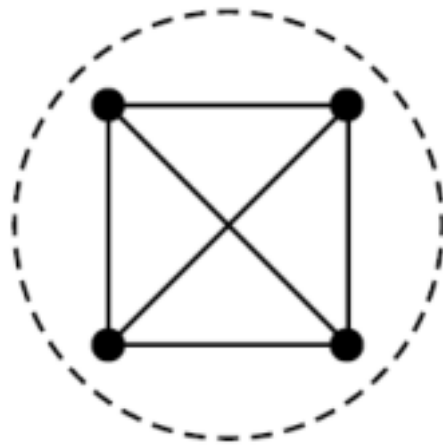
Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng $c(1) = 1, c(2) = 2$. Đối với $c(3)$ chỉ có hai khả năng sau có thể xảy ra: $c(3) = 1$ hoặc $c(3) = 2$. Từ tính đối xứng của bài toán, chúng ta có thể giả sử rằng $c(3) = 1$.

Khi đó, bằng cách lập luận tương tự như ở trên, chúng ta dễ dàng suy ra được $c(4) = 2, c(5) = 1, c(6) = 2, \dots$; nghĩa là các màu được tô thay phiên nhau dọc theo chu trình lẻ. Do đỉnh $k + 4$ không thể tô được bởi bất kỳ một màu nào (điều này suy ra từ việc $\{1, 2, k + 4\}$ là một $\mathcal{C}$ – cạnh và $\{k + 3, k + 4\}, \{k + 4, 3\}$ là các $\mathcal{D}$ – cạnh) nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $\mathcal{H}$ là uncolorable. Tính tối thiểu của $\mathcal{H}$ cũng có thể được suy ra một cách dễ dàng. □

Siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable đầy đủ.

Với mỗi $2 \leq l, m \leq n = |X|$, kí hiệu $\mathcal{K}(n, l, m) = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left(X, \binom{X}{l}, \binom{X}{m}\right)$ trong đó $|\mathcal{C}| = \binom{n}{l}$ và

$|\mathcal{D}| = \binom{n}{m}$. $\mathcal{K}(n, l, m)$ được gọi là một **(l, m) – siêu đồ thị hỗn hợp đầy đủ bậc n** . Nói cách khác, trong $\mathcal{K}(n, l, m)$, mọi l đỉnh đều tạo thành một $\mathcal{C}$ – cạnh và mọi m đỉnh đều tạo thành một $\mathcal{D}$ – cạnh. Hiển nhiên, với mọi số nguyên n, l, m cho trước, tồn tại duy nhất một $\mathcal{K}(n, l, m)$.



Hình ảnh minh họa $(4,2)$ – siêu đồ thị hỗn hợp đầy đủ $\mathcal{K}(4,4,2)$.

Kết quả 8.7.3.

$\mathcal{K}(n, l, m)$ là uncolorable nếu và chỉ nếu $n \geq (l - 1)(m - 1) + 1$.

Chứng minh kết quả 8.7.3.

($\Rightarrow$) Giả sử $n \leq (l - 1)(m - 1)$. Chúng ta sẽ tô màu $m - 1$ đỉnh nào đó bởi màu thứ nhất và $m - 1$ đỉnh kế tiếp bởi màu thứ hai. Do $n \leq (l - 1)(m - 1)$ nên quy trình này yêu cầu tối đa $l - 1$ màu và chúng ta sẽ thu được một phép tô màu thực sự của $\mathcal{K}(n, l, m)$; nghĩa là $\mathcal{K}(n, l, m)$ là một siêu đồ thị colorable.

($\Leftarrow$) Giả sử $n \geq (l - 1)(m - 1) + 1$. Giả sử tồn tại một phép tô màu thực sự của $\mathcal{K}(n, l, m)$. Do mỗi $m -$ bộ đều là một $\mathcal{D}$ – cạnh và mỗi $l -$ bộ đều là một $\mathcal{C}$ – cạnh nên số các đỉnh nằm trong mỗi lớp màu không thể vượt quá $m - 1$ và tổng số màu được sử dụng cũng không vượt quá $l - 1$. Do $n \geq (l - 1)(m - 1) + 1$ nên sẽ phải có ít nhất một $\mathcal{C}$ – cạnh hoặc một $\mathcal{D}$ – cạnh nào đó được tô màu không đúng cách, mâu thuẫn. $\square$

Nếu chúng ta cố định các chỉ số l, m và cho n tiến đến vô cùng thì chúng ta sẽ thu được số các siêu đồ thị hỗn hợp colorable $\mathcal{K}(n, l, m)$ và số các siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable $\mathcal{K}(n, l, m)$. Nói cách khác, với n đủ lớn, phần có thể tô màu được của $\mathcal{K}(n, l, m)$ sẽ trở nên ngày càng nhỏ hơn. Điều này có thể được phát biểu như một kết quả duy nhất sau đây:

Kết quả 8.7.4. (Tuza - Voloshin)

Với mọi cặp (l, m) cố định cho trước, hầu hết tất cả các siêu đồ thị $\mathcal{K}(n, l, m)$ đều là uncolorable.

Tuy nhiên, kết quả sẽ khác hoàn toàn nếu chúng ta không giả định từ trước cặp (l, m) được cố định. Trong phân tích dưới đây, chúng ta sẽ chỉ ra rằng xác suất để một siêu đồ thị hỗn hợp đầy đủ bậc n là uncolorable sẽ tiến đến 0 khi n đủ lớn.

Kết quả 8.7.5. (Tuza - Voloshin)

Với mọi cặp (l, m) , hầu hết tất cả các siêu đồ thị $\mathcal{K}(n, l, m)$ đều là colorable.

Chứng minh kết quả 8.7.5.

Để đơn giản hóa quá trình tính toán, chúng ta sẽ tính toán cho các siêu đồ thị hỗn hợp với bậc $n + 1$ thay vì n . Do $l = 1$ và $m = 1$ bị loại trừ (điều này được suy ra từ cách định nghĩa) nên chúng ta sẽ có n^2 khả năng khác

nhau để chọn ra một cặp (l, m) nằm trong khoảng $2 \leq l \leq n + 1, 2 \leq m \leq n + 1$. Từ Kết quả 8.7.4), chúng ta dễ dàng suy ra được rằng $\mathcal{K}(n, l, m + 1)$ là uncolorable nếu và chỉ nếu $(l - 1)(m - 1) \leq n$.

Nhận thấy rằng giá trị nhỏ nhất có thể có của $m - 1$ là 1. Như vậy, với mỗi chỉ số $l \geq 2$, có chính xác $\left\lfloor \frac{n}{l-1} \right\rfloor$ siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable đầy đủ với bậc $n + 1$. Do đó, tổng số các siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable đầy đủ với bậc $n + 1$ N_n sẽ bằng $N_n = \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \simeq n \log n$ trong đó đẳng thức tiệm cận sẽ được nghiệm đúng khi n tiến đến vô cùng. Do đó, xác suất để một siêu đồ thị hỗn hợp đầy đủ bậc n là uncolorable sẽ bằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0.$$

Điều này chỉ ra rằng hầu hết tất cả các siêu đồ thị $\mathcal{K}(n, l, m)$ đều là colorable. □

Tính colorable của các siêu cây hỗn hợp.

Một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ được gọi là một **siêu cây hỗn hợp** nếu tồn tại một cây host $T = (X, E)$ sao cho mọi cạnh $C \in \mathcal{C}$ và mọi cạnh $D \in \mathcal{D}$ đều cảm sinh ra một cây con trong T . Thật ra, nó chính là dạng khái quát trực tiếp của khái niệm siêu cây đã nghiên cứu trong “**Chủ đề 06. Siêu cây – Một số dạng siêu đồ thị tổng quát quá của đồ thị lưỡng phân – Siêu đồ thị chordal conformal**” tương ứng với trường hợp $\mathcal{C} = \emptyset$.

Nhắc lại rằng, trong một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, một $\mathcal{D}$ – cạnh $D \in \mathcal{D}$ được gọi là **hiển nhiên uncolorable** nếu mỗi cặp đỉnh $x, y \in D$ bất kỳ đều được nối với nhau bởi một $\mathcal{C}$ – đường đi của $\mathcal{H}$ chỉ gồm các $\mathcal{C}$ – cạnh có kích thước bằng 2.

Kết quả 8.7.6. (Tuza - Voloshin)

Một siêu cây hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ là uncolorable nếu và chỉ nếu nó có chứa một $\mathcal{D}$ – cạnh D hiển nhiên uncolorable.

Chứng minh kết quả 8.7.6.

($\Rightarrow$) Giả sử cho trước một siêu cây hỗn hợp uncolorable $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$. Giả sử phản chứng rằng $\mathcal{H}$ không có chứa bất kỳ một $\mathcal{D}$ – cạnh D nào là hiển nhiên uncolorable. Nhận thấy rằng nếu $\mathcal{H}$ không có chứa bất kỳ một $\mathcal{D}$ – cạnh nào có kích thước bằng 2 thì nó sẽ là colorable. Thật vậy, xét cây host T tương ứng và thực hiện phép tô màu thay phiên như bình thường cho cây T , nghĩa là bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ của T và tô màu các màu 1 và 2 thay phiên nhau dọc theo cây T . Đồng thời, phép tô màu thu được cũng sẽ là một phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}$. Nếu $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ có một $\mathcal{C}$ – cạnh nào đó có kích thước bằng 2 thì mỗi cạnh này đều sẽ trùng với một cạnh nào đó của T . Kế tiếp, chúng ta sẽ lặp lại quy trình trên với quy ước như sau: nếu chúng ta gặp phải một $\mathcal{C}$ – cạnh nào đó có kích thước bằng 2 thì chúng ta sẽ không thay đổi các màu dọc theo cạnh này của T (nghĩa là một cạnh của T sẽ được tô màu đúng nếu và chỉ nếu nó không phải là một $\mathcal{C}$ – cạnh trong $\mathcal{H}$). Do không có bất kỳ một $\mathcal{D}$ – cạnh nào là hiển nhiên uncolorable trong $\mathcal{D}$ nên một lần nữa chúng ta cũng thu được một phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}$. Do đó, $\mathcal{H}$ là colorable, mâu thuẫn.

($\Leftarrow$) Hiển nhiên. □

Kết quả 8.7.7.

Mọi siêu cây hỗn hợp reduce đều là một siêu đồ thị hỗn hợp colorable.

Kết quả 8.7.8.

Nếu $\mathcal{H}$ là một siêu cây hỗn hợp colorable thì $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

8.8. Tính unique colorable

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ và không có bất kỳ cạnh bị bao hàm nào, nghĩa là không có cạnh nào được chứa trong một cạnh khác nào đó cùng loại.

Một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ được gọi là **unique colorable** nếu nó chỉ có chính xác một phép tô màu nghiêm ngặt và không tính đến việc hoán vị các màu.

Điều này tương đương với việc $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị unique colorable nếu nó chỉ có chính xác một phân hoạch khả dĩ của tập đỉnh X thành các lớp màu. Chúng ta sẽ quy ước rằng cụm từ “phép tô màu duy nhất” có ý nghĩa tương đương với cụm từ “phân hoạch duy nhất” với số các lớp màu tương ứng. Điều này có nghĩa là chúng ta có thể bỏ qua việc hoán vị các màu ngoài trừ có quy ước khác. Như vậy, thuật ngữ “unique colorable” được kế thừa trực tiếp từ các phép tô màu đồ thị với nghĩa là “phân hoạch khả dĩ duy nhất”.

Hiển nhiên, nếu $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị unique colorable thì

$$\chi(\mathcal{H}) = \bar{\chi}(\mathcal{H}) = \chi, r_{\chi}(\mathcal{H}) = 1,$$

$$R(\mathcal{H}) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

Như vậy, $P(\mathcal{H}, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - \chi + 1) = \lambda^{(\chi)}$.

Một đồ thị cổ điển G , được xem như một $\mathcal{D}$ – đồ thị, là unique colorable nếu và chỉ nếu G là một đồ thị đầy đủ K_n (điều này cũng đúng với tất cả các $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị). Nói cách khác, các siêu đồ thị hỗn hợp unique colorable chỉ đơn thuần là đại diện cho một dạng tổng quát của khái niệm clique. Như chúng ta đã biết, các siêu đồ thị r – uniform đầy đủ là một dạng tổng quát các đồ thị đầy đủ K_n ; tuy nhiên, các tính chất của các phép tô màu của K_n^r còn rất xa để có thể trở nên tốt đẹp như những siêu đồ thị hỗn hợp unique colorable. Điều này phản ánh thực tế rằng K_n^r là unique colorable nếu và chỉ nếu $r = 2$.

Kết quả 8.8.1.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp unique colorable $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với một phép tô màu nghiêm ngặt c duy nhất.

Khi đó, hợp của hai lớp màu bất kỳ đều có chứa một $\mathcal{D}$ – cạnh; bất kỳ phân hoạch nào của bất kỳ lớp màu nào có giao với một $\mathcal{C}$ – cạnh đều có đúng hai đỉnh chung với lớp màu này và có tối đa một đỉnh chung với bất kỳ lớp màu nào khác.

Chứng minh kết quả 8.8.1.

Tính đúng đắn của khẳng định trên có thể được suy ra trực tiếp từ cách định nghĩa của một phép tô màu thực sự của một siêu đồ thị hỗn hợp. □

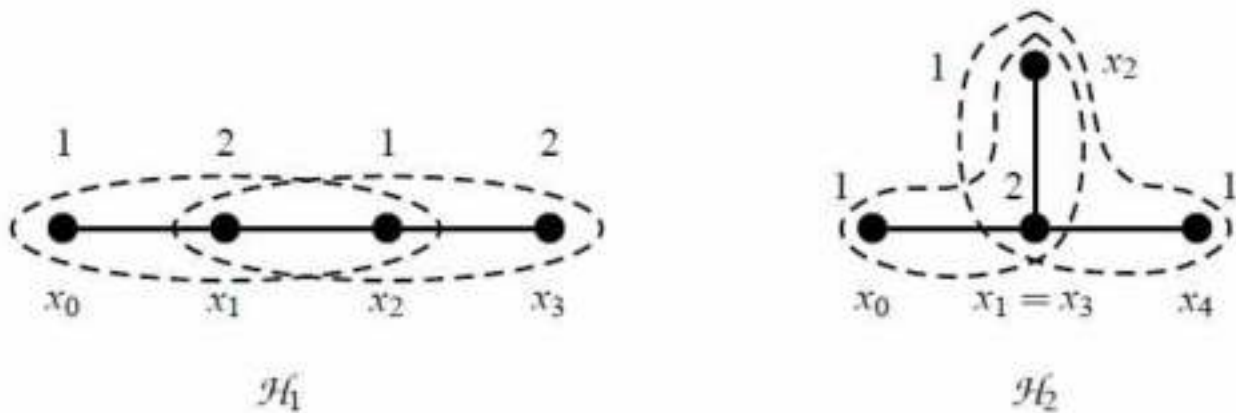
Trong một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, một dãy các đỉnh $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y, k \geq 1$, được gọi là **(x, y) – invertor** nếu và chỉ nếu $x_i \neq x_{i+1}$ và $(x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{D}$, với mọi $i = 0, 1, \dots, k - 1$, và, hơn nữa, điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$x_j \neq x_{j+1} \neq x_{j+2} \neq x_j \Rightarrow \{x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\} \in \mathcal{C}, j = 0, 1, \dots, k-2.$$

Một (x, y) – inverter được gọi là **lẻ** (hoặc **chẵn**) nếu k là một số lẻ (hoặc chẵn); nó được gọi là một **tuần hoàn** nếu $x = y$; nếu $k \geq 2$ thì $x_1, \dots, x_{k-1}$ được gọi là các **đỉnh trong**.

Nếu một siêu đồ thị hỗn hợp có một (x, y) – inverter chẵn thì, trong mọi phép tô màu thực sự, các đỉnh x và y đều được tô bởi cùng một màu; trong trường hợp này, (x, y) – inverter sẽ “chuyển” màu của đỉnh x đến đỉnh y . Ngược lại, nếu có một (x, y) – inverter lẻ thì, trong mọi phép tô màu thực sự, các đỉnh x và y đều được tô bởi các màu khác nhau; trong trường hợp này, (x, y) – inverter sẽ “loại trừ” khả năng màu của đỉnh x là màu của đỉnh y . Lưu ý rằng các inverter có thể là các siêu đồ thị con cảm sinh (hoặc từng phần) và chúng sẽ tạo ra các siêu đồ thị con unique colorable (hoặc uncolorable).

Chẳng hạn, xét các inverter như trong hình vẽ bên dưới.



Hình vẽ minh họa.

Nhận thấy rằng $\mathcal{H}_1$ là một inverter lẻ x_0, x_1, x_2, x_3 trong khi $\mathcal{H}_2$ là một inverter chẵn x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 . Các màu sẽ được hiển thị bởi các số 1 và 2. Trong $\mathcal{H}_1$, mọi $\mathcal{D}$ – cạnh đều đại diện cho một đường đi đơn nối giữa x_0 và x_3 còn, trong $\mathcal{H}_2$, (x_0, x_4) – đường đi đi qua cạnh $\{x_1, x_2\}$ hai lần, nghĩa là nó không thể là một đường đi đơn. Một tính chất chung quan trọng có thể dễ dàng nhận thấy cho cả hai siêu đồ thị $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ là ba đỉnh liên tiếp khác nhau đều tạo ra một $\mathcal{C}$ – cạnh. Cả hai $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ đều là các siêu đồ thị hỗn hợp unique colorable với chỉ duy nhất một phép tô màu nghiêm ngặt như trong hình vẽ minh họa. Trong mọi phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}_1$, các đỉnh x_0 và x_3 đều được tô bởi các màu khác nhau. Ngược lại, trong bất kỳ phép tô màu thực sự nào của $\mathcal{H}_2$, các đỉnh x_0 và x_4 đều được tô bởi cùng một màu. Chúng ta nói rằng $\mathcal{H}_1$ “loại trừ” việc đỉnh x_0 có cùng màu với đỉnh x_3 ; $\mathcal{H}_2$ “chuyển” màu của đỉnh x_0 sang cho đỉnh x_4 . Chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng $\chi = \bar{\chi} = 2$ với cả hai inverter. Hơn nữa, $R(\mathcal{H}_1) = R(\mathcal{H}_2) = (0, 1, 0, 0)$, $P(\mathcal{H}_1, \lambda) = P(\mathcal{H}_2, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)$.

Điều khẳng định thứ hai chỉ ra rằng, từ quan điểm của các phép tô màu, các inverter chỉ đơn thuần là mở rộng các thuộc tính của đồ thị đầy đủ K_2 .

Phép nhúng vào các siêu đồ thị hỗn hợp unique colorable

Trong các $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị, với mỗi chỉ số n , chúng ta chỉ có thể có duy nhất một đồ thị unique colorable K_n ; hơn nữa, mọi đồ thị con cảm sinh của K_n cũng đều là một đồ thị unique colorable. Tuy nhiên, tình huống diễn ra rất khác trong các siêu đồ thị hỗn hợp. Trong mục con này của bài viết, chúng ta sẽ chỉ ra rằng mọi siêu đồ thị hỗn hợp colorable đều có thể xem như một siêu đồ thị con cảm sinh nào đó của một siêu đồ thị hỗn hợp unique

colorable. Cụ thể, chúng ta sẽ nhúng một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ vào một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}'$ sao cho $\mathcal{H}'$ chỉ có duy nhất một phép tô màu nghiêm ngặt. Chính xác hơn:

Kết quả 8.8.2. (Tuza – Voloshin - Zhou)

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp colorable $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ và $c = X_1 \cup \dots \cup X_t$ là một phép tô màu nghiêm ngặt nào đó.

Khi đó, tồn tại ít nhất một siêu đồ thị hỗn hợp unique colorable $\mathcal{H}' = (X', \mathcal{C}', \mathcal{D}')$ thỏa mãn các tính chất sau:

1) $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị con cảm sinh của $\mathcal{H}'$;

2) $\chi(\mathcal{H}') = \bar{\chi}(\mathcal{H}') = t$ và mở rộng của phép tô màu c không gì khác chính là phép tô màu nghiêm ngặt duy nhất của $\mathcal{H}'$.

Chứng minh kết quả 8.8.2.

Để mở rộng $\mathcal{H}$ thành một siêu đồ thị $\mathcal{H}'$ thỏa mãn tất cả các yêu cầu như ở trên, đầu tiên, chúng ta chọn ra một cây khung T_i nằm bên trong mỗi lớp phân hoạch X_i của phép tô màu c . Với mỗi cạnh xy của cây khung T_i , chúng ta chọn ra một (x, y) – inverter chắn với tất cả các đỉnh các đỉnh trong không nằm bên trong X . Các inverter chắn khác nhau sẽ không thể có chung các đỉnh trong. Các inverter này đảm bảo rằng các đỉnh nằm trong cùng một lớp phân hoạch X_i sẽ luôn được tô bởi cùng một màu.

Tại thời điểm này, các đỉnh trong của các inverter có thể nhận được các màu mới. Do đó, số các màu có thể được sử dụng đối với $\mathcal{H}'$ có thể tăng lên. Để tránh điều này có thể xảy ra, chúng ta sẽ chèn thêm một $\mathcal{C}$ – cạnh $\{x = x_1, x_2, z\}$ có kích thước bằng 3 vào mỗi (x, y) – inverter chắn, trong đó z là một đỉnh bất kỳ nào đó sao cho hai đỉnh x, z cùng nằm trong các lớp màu X_i khác nhau của c . Các $\mathcal{C}$ – cạnh này ngụ ý rằng sẽ không có bất kỳ một màu mới nào sẽ xuất hiện bên ngoài X .

Kế tiếp, với mọi cặp (i, j) sao cho X_i và X_j là hai lớp màu phân biệt của c , chúng ta sẽ chọn ra hai đỉnh $x_i \in X_i, x_j \in X_j$ và xây dựng một (x_i, x_j) – inverter lẻ trên chúng. Khi đó, bất kỳ hai đỉnh nào nằm trong các lớp màu khác nhau của c cũng sẽ được gán bởi các màu khác nhau. Một lần nữa, các đỉnh trung gian mới được thêm vào trong các inverter lẻ sẽ phải khác nhau đối với các cặp đỉnh khác nhau của $\mathcal{H}$, nên chúng cũng không thể có trong X . Do các màu nằm trên các inverter thay đổi luân phiên nhau nên các màu nằm trên một inverter lẻ đều sẽ giống với hai màu ở các đầu mút. Do đó, không có màu mới nào nằm bên ngoài X có thể xuất hiện trên các đỉnh trong của các inverter mới.

Hiển nhiên, một mở rộng như vậy của c sẽ chính là phép tô màu nghiêm ngặt duy nhất của $\mathcal{H}'$ với chính xác t lớp màu bởi vì mỗi lớp màu của c đều đơn sắc (điều này suy ra từ sự hiện diện của các inverter chắn) và không có cặp đỉnh nào nằm trong các lớp màu phân biệt của c có thể được tô bởi cùng một màu (điều này suy ra từ sự hiện diện của các inverter lẻ). □

Tính chất unique colorable của các siêu cây hỗn hợp

Trong một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$, với hai đỉnh x, y bất kỳ, có thể có nhiều (x, y) – inverter khác nhau (điều này suy ra từ việc một siêu đồ thị con được tạo ra bởi một (x, y) – inverter cũng sẽ là một (x, y) – inverter). Hai (x, y) – inverter được xem là khác nhau nếu chúng đại diện cho hai dãy đỉnh khác nhau. Một (x, y) – inverter ngắn nhất sẽ có chứa số đỉnh nhỏ nhất có thể được. Nhắc lại rằng một (x, y) – inverter với $x = y$ sẽ

được gọi là một inverter chu trình. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng các inverter này đóng một vai trò rất quan trọng trong các siêu cây hỗn hợp unique colorable. Đồng thời, nhắc lại rằng các siêu cây hỗn hợp reduce đều là colorable (Kết quả 8.7.7).

Trong một siêu cây hỗn hợp, một inverter tuần hoàn được gọi là **đơn** nếu tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh đều khác nhau, bất kỳ $\mathcal{D}$ – cạnh nào được sử dụng dọc theo inverter chính xác đúng hai lần và sự lặp lại này là tuần tự.

Giả sử cho trước một inverter tuần hoàn đơn $\mu = (z_0, z_1, \dots, z_k = z_0)$, $k \geq 6$, trong một siêu cây hỗn hợp $\mathcal{H}$.

Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng $z_0 \neq z_1 \neq z_2 \neq z_0$. Từ cách định nghĩa của một inverter tuần hoàn đơn, chúng ta dễ dàng suy ra rằng $z_0 \neq z_2 \neq \dots \neq z_{k-2}$ và $z_1 = z_3 = \dots = z_{k-1} = y$, trong đó y là tâm của một star nào đó nằm trong cây host T .

Kết quả 8.8.3.

Nếu $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ là một siêu cây reduce với $|\mathcal{D}| \leq n - 2$ thì $r_2(\mathcal{H}) \geq 2$.

Chứng minh kết quả 8.8.3.

Giả sử $T = (X, \mathcal{E})$ là một cây host của siêu cây hỗn hợp $\mathcal{H}$. Do $|\mathcal{D}| \leq n - 2$ nên sẽ phải tồn tại một cạnh e trong T sao cho $e = \{x, y\} \notin \mathcal{D}$. Bắt đầu với các đỉnh x, y , chúng ta sẽ xây dựng hai phép tô màu khác nhau sao cho các màu 1 và 2 tạo ra hai phân hoạch khác nhau. Thứ nhất, kí hiệu $c(x) = c(y) = 1$ và tô màu tất cả các đỉnh khác thay phiên nhau dọc theo cây T bởi các màu 2, 1, 2, ... Thứ hai, áp dụng quy trình tương tự bắt đầu với $c(x) = 1$ và $c(y) = 2$. □

Kết quả 8.8.4. (Niculitsa - Voloshin)

Một siêu cây hỗn hợp reduce $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ là unique colorable nếu và chỉ nếu, với hai đỉnh $x, y \in X$ bất kỳ, luôn tồn tại ít nhất một (x, y) – inverter.

Chứng minh kết quả 8.8.4.

($\Rightarrow$) Giả sử c là phân hoạch khả dĩ duy nhất của siêu cây hỗn hợp reduce $\mathcal{H}$. Nhắc lại rằng $c(x)$ kí hiệu cho lớp màu của đỉnh x trong phân hoạch khả dĩ, hoặc tương đương, màu của đỉnh x . Chúng ta sẽ chỉ ra rằng, với hai đỉnh $x, y \in X$ bất kỳ, luôn tồn tại ít nhất một (x, y) – inverter.

Giả sử siêu đồ thị $\mathcal{H}$ có chứa hai đỉnh $u, v \in X$ nào đó sao cho không tồn tại bất kỳ một (u, v) – inverter nào trong $\mathcal{H}$. Xét (u, v) – đường đi duy nhất nằm trong cây host T của $\mathcal{H}$. Giả thiết phản chứng của bài toán chỉ ra rằng, trong $\mathcal{H}$, không tồn tại bất kỳ một $\mathcal{D}$ – đường đi nào nối giữa hai đỉnh u, v hoặc, trong dãy đỉnh

$u = x_1, x_2, \dots, x_p = v$, tồn tại một bộ ba đỉnh đôi một phân biệt nhau x_j, x_{j+1}, x_{j+2} không nằm trong $\mathcal{C}$. Nếu không tồn tại bất kỳ một $\mathcal{D}$ – đường đi nào nối giữa hai đỉnh u, v thì $\mathcal{H}$ sẽ có hai phân hoạch khả dĩ khác nhau (Kết quả 8.8.3), mâu thuẫn.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng, trong dãy đỉnh $u = x_1, x_2, \dots, x_p = v$, mọi cặp đỉnh liên tiếp nhau đều là một $\mathcal{D}$ – cạnh và có một bộ ba đỉnh đôi một phân biệt nhau x_j, x_{j+1}, x_{j+2} sao cho $\{x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\} \notin \mathcal{C}$. Hiển nhiên, x_{j+1} không thể là một đỉnh pendant trong T . Kí hiệu T_1 và T_2 là hai thành phần liên thông thu được bằng cách xóa đỉnh x_{j+1} ra khỏi cây host T . Chúng ta sẽ xem xét hai trường hợp sau.

1) $c(x_j) = c(x_{j+2})$. Hiển nhiên, số các lớp màu trong phân hoạch khả dĩ duy nhất c của $\mathcal{H}$ sẽ bằng 2. Tô màu lại đỉnh x_{j+2} và tất cả các đỉnh trong thành phần liên thông T_2 có khoảng cách chẵn đến x_{j+2} bởi màu mới. Phép tô màu thu được này sẽ là một phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}$ và nó cũng sẽ tạo ra một phân hoạch khả dĩ khác với c , mâu thuẫn.

2) $c(x_j) \neq c(x_{j+2})$. Do $\{x_j, x_{j+1}\}, \{x_{j+1}, x_{j+2}\} \in \mathcal{D}$ nên $c(x_j) \neq c(x_{j+1}) \neq c(x_{j+2})$. Do đó, $\mathcal{H}$ có thể được tô bởi ít nhất ba màu. Tuy nhiên, mọi siêu cây hỗn hợp đều có thể được tô bởi hai màu và, một lần nữa, chúng ta lại có được hai phân hoạch khả dĩ khác nhau, mâu thuẫn.

($\Leftarrow$) Giả sử hai đỉnh $x, y \in \mathcal{H}$ bất kỳ đều được nối với nhau bởi một (x, y) – invertor. Giả sử $\mathcal{H}$ có chứa ít nhất hai phân hoạch khả dĩ khác nhau c_1 và c_2 . Khi đó, có hai đỉnh, tạm giả sử là x', y' , sao cho $c_1(x') = c_1(y')$ nhưng $c_2(x') \neq c_2(y')$. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, xét một (x', y') – invertor $x' = x_0, x_1, \dots, x_k = y'$. Từ cách định nghĩa của một invertor, chúng ta dễ dàng suy ra rằng nếu k là một số chẵn thì, trong tất cả các phép tô màu có thể có, các đỉnh x' và y' đều được tô bởi cùng một màu; nếu k là một số lẻ, trong tất cả các phép tô màu có thể có, các đỉnh x' và y' đều được tô bởi hai màu khác nhau. Do đó, trong tất cả các phép tô màu có thể có, $c(x') = c(y')$ hoặc $c(x') \neq c(y')$, mâu thuẫn. $\square$

Kết quả 8.8.5.

Nếu $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ là một siêu cây hỗn hợp unique colorable reduce với cây host $T = (X, \mathcal{E})$ thì $\mathcal{D} = \mathcal{E}$.

Nhắc lại rằng, trong một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$, một $\mathcal{C}$ – cạnh $C \in \mathcal{C}$ được gọi là redundant nếu $R(\mathcal{H}) = R(\mathcal{H} - C)$.

Kết quả 8.8.6.

Nếu $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ là một siêu cây hỗn hợp unique colorable reduce thì không có bất kỳ một $\mathcal{D}$ – cạnh nào là redundant.

Kết quả 8.8.7.

Trong một siêu cây hỗn hợp unique colorable reduce $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, bất kỳ một $\mathcal{C}$ – cạnh nào có kích thước ≥ 4 đều là redundant.

Kết quả 8.8.8.

Trong một siêu cây hỗn hợp unique colorable reduce $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, một $\mathcal{C}$ – cạnh C có kích thước bằng 3 là redundant nếu và chỉ nếu C – cạnh C được chứa trong một invertor tuần hoàn đơn nào đó.

Chứng minh kết quả 8.8.8.

($\Rightarrow$) Giả sử $C = \{x_1, x_2, x_3\}$ là một $\mathcal{C}$ – cạnh redundant. Từ cách định nghĩa của một siêu cây hỗn hợp unique colorable reduce, $\mathcal{H}' = (X, \mathcal{C}', \mathcal{D})$ với $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus \{C\}$ sẽ là một siêu cây hỗn hợp unique colorable. Khi đó, tồn tại một (x_1, x_3) – invertor $x_1 = z_0, z_1, \dots, z_k = x_3$ nối giữa hai đỉnh x_1 và x_3 trong $\mathcal{H}'$. Xây dựng một (x_1, x_1) –

invertoir theo quy tắc như sau: $x_1 = z_0, z_1, \dots, z_k = x_3, x_2, x_1$. Invertoir này chính là invertoir tuần hoàn đơn của $\mathcal{H}$ có chứa C cần tìm.

($\Leftarrow$) Ngược lại, giả sử $\mathcal{C}$ – cạnh $C = \{x_1, x_2, x_3\}$ được chứa trong một invertoir tuần hoàn đơn $x_1 = z_0, z_1, \dots, z_k = x_3, x_2, x_1$. Khi đó, các đỉnh x_1 và x_3 được nối với nhau bởi hai invertoir phân biệt là (x_1, x_3) – invertoir $\{x_1, x_2, x_3\} = C$ và $(x_1, x_3)'$ – invertoir $x_1 = z_0, z_1, \dots, z_k = x_3$. Trong mỗi (x, y) – invertoir có chứa C , thay thế $\mathcal{C}$ – cạnh này bởi $(x_1, x_3)'$ – invertoir. Do đó, $\mathcal{H}' = (X, \mathcal{C} \setminus \{C\}, \mathcal{D})$ là unique colorable, nghĩa là $\mathcal{C}$ – cạnh C là một cạnh redundant. $\square$

Xét một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$. Giả sử $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_i$ là một phép i – tô màu thực sự của $\mathcal{H}$ ($\chi(\mathcal{H}) \leq i \leq \bar{\chi}(\mathcal{H})$) và chọn ra một lớp màu X_j bất kỳ.

Đồ thị touch của một lớp màu X_j được định nghĩa là đồ thị tuyến tính $L_j = (X_j, E_j)$ trong đó tập cạnh E_j được định nghĩa như sau: $\{x, y\} \in E_j$ nếu và chỉ nếu tồn tại một $C \in \mathcal{C}$ nào đó sao cho $C \cap X_j = \{x, y\}$ và $|C \cap X_k| \leq 1$ với mọi $k \neq j$.

Kết quả 8.8.9.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ và một phép $\bar{\chi}$ – tô màu của $\mathcal{H}$.

Khi đó, tất cả $\bar{\chi}$ đồ thị touch đều là các đồ thị liên thông.

Chứng minh kết quả 8.8.9.

Nếu có ít nhất một đồ thị touch nào đó là một đồ thị không liên thông thì chúng ta có thể xây dựng được một phép tô màu nghiêm ngặt mới của $\mathcal{H}$ với $\bar{\chi} + 1$ màu bằng cách gán nhãn một màu mới cho các đỉnh của một thành phần liên thông nào đó. $\square$

Lưu ý rằng tính liên thông của một đồ thị touch đối với một lớp màu ngụ ý rằng chúng ta không thể tách lớp màu thành hai lớp nhỏ hơn được.

Kết quả 8.8.10.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp unique colorable $\mathcal{H}$ và c là phân hoạch duy nhất của nó.

Khi đó, tất cả $\bar{\chi}$ đồ thị touch đều là các đồ thị liên thông.

Kết quả 8.8.11.

Nếu một siêu đồ thị hỗn hợp reduce $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ là unique colorable thì, với mọi phép 2 – tô màu, các đồ thị touch L_1 và L_2 đều là các đồ thị liên thông.

Kết quả 8.8.12.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp unique colorable $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Khi đó, $|\mathcal{C}| \geq n - \chi$.

Chứng minh kết quả 8.8.12.

Giả sử $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị hỗn hợp unique colorable với $\chi(\mathcal{H}) = \chi$. Xét phép χ – tô màu duy nhất

$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_\chi$ và xây dựng các đồ thị touch $L_1 = (X_1, E_1), L_2 = (X_2, E_2), \dots, L_\chi = (X_\chi, E_\chi)$.

Nhận thấy rằng số cạnh nhỏ nhất có thể được chứa trong L_i để đảm bảo cho L_i là một đồ thị liên thông là $|X_i| - 1$. Trong trường hợp này, với mọi $i = 1, 2, \dots, \chi$, mỗi L_i đều là một cây. Do mọi cạnh nằm trong L_i đều tương ứng với một $\mathcal{C}$ – cạnh nào đó của $\mathcal{H}$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng số $\mathcal{C}$ – cạnh tối thiểu sẽ là:

$$|X_1| - 1 + |X_2| - 1 + \dots + |X_\chi| - 1 = |X| - \chi.$$

□

Kết quả 8.8.13.

Mọi siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ với $|\mathcal{C}| < n - \chi(\mathcal{H})$ đều không thể là unique colorable.

Kết quả 8.8.14.

Số $\mathcal{C}$ – cạnh nhỏ nhất có thể trong bất kỳ siêu cây hỗn hợp unique colorable reduce $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ nào cũng đều là $n - 2$.

Kết quả 8.8.15.

Trong một siêu cây hỗn hợp unique colorable reduce $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ bất kỳ, số $\mathcal{C}$ – cạnh redundant luôn là $|\mathcal{C}| - n + 2$.

Chứng minh kết quả 8.8.15.

Thật vậy, với mỗi đồ thị touch L_i ($i = 1, 2$), xây dựng một cây khung T_i . Mỗi chu trình cơ bản chứa trong L_i đều tạo ra một invertor tuần hoàn đơn trong $\mathcal{H}$. Do đó, mọi $\mathcal{C}$ – cạnh của $\mathcal{H}$ đều sẽ là redundant nếu kích thước của nó ≥ 4 , hoặc tương đương, một số cạnh của L_i sẽ là một dây cung của T_i . □

Lưu ý rằng một $\mathcal{C}$ – cạnh redundant có thể trở nên không redundant nếu như chúng ta xóa đi một số $\mathcal{C}$ – cạnh redundant khác khỏi $\mathcal{C}$.

Một siêu cây hỗn hợp reduce $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ được gọi là đầy đủ nếu mọi cạnh của cây host T đều tạo thành một $\mathcal{D}$ – cạnh và mọi đường đi xác định trên các bộ ba đỉnh của T đều tạo thành một $\mathcal{C}$ – cạnh trong $\mathcal{H}$.

Do đó, với $T = (X, \mathcal{E})$ là cây host tương ứng của siêu cây hỗn hợp reduce đầy đủ $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, chúng ta dễ dàng chứng minh được rằng $\mathcal{D} = \mathcal{E}$. Tương tự như đối với các đồ thị và các siêu đồ thị, tính đầy đủ ở đây ngụ ý rằng chúng ta không thể bổ sung thêm bất kỳ $\mathcal{C}$ – cạnh hoặc $\mathcal{D}$ – cạnh nào mà vẫn đảm bảo tính reduce của $\mathcal{H}$.

Kí hiệu M là số $\mathcal{C}$ – cạnh có thể có của một siêu cây hỗn hợp reduce đầy đủ $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Khi đó, $M = \sum_{\substack{x \in T \\ d(x) \geq 2}} \binom{d(x)}{2}$, trong đó $d(x)$ là bậc của đỉnh x trong cây host T .

Nhận thấy rằng, với mọi $k > 1$, chúng ta dễ dàng xây dựng được một siêu cây hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với $|\mathcal{D}| = n - 1$, $n - 2 \leq |\mathcal{C}| \leq M$, $\bar{\chi}(\mathcal{H}) = k$. Do đó, các giới hạn trên của $|\mathcal{D}|$ và $|\mathcal{C}|$ không đủ để đảm bảo cho một siêu cây là unique colorable.

Kết quả 8.8.16.

Giả sử cho trước một siêu cây hỗn hợp unique colorable reduce $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với số $\mathcal{C}$ – cạnh nhỏ nhất có thể được, $T = (X, \mathcal{E})$ là một cây host tương ứng của $\mathcal{H}$, các đồ thị touch T_1 và T_2 đều là các cây.

Khi đó, tồn tại một đỉnh $x \in T$, đồng thời là pendant trong T và trong T_1 hoặc T_2 , sao cho siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} - x$, thu được từ $\mathcal{H}$ bằng cách xóa mạnh đỉnh x khỏi $\mathcal{H}$, cũng là một siêu cây hỗn hợp unique colorable.

Chứng minh kết quả 8.8.16.

Đầu tiên, chúng ta giả sử rằng mọi đỉnh pendant của cây host T đều không phải là một đỉnh pendant trong T_1 hoặc T_2 . Điều này có nghĩa là mọi đỉnh pendant của cây host T đều nằm trong ít nhất hai $\mathcal{C}$ – cạnh. Khi đó, chúng ta có thể bắt đầu ở bất kỳ một đỉnh pendant nào như vậy và xây dựng một invertor tuần hoàn (điều này suy ra từ tính hữu hạn của cây T). Điều này ngụ ý rằng phải có một đồ thị touch T_i nào đó có chứa một chu trình, nghĩa là $\mathcal{H}$ không thể là một siêu cây hỗn hợp unique colorable với số $\mathcal{C}$ – cạnh nhỏ nhất có thể được, mâu thuẫn. Do đó, tồn tại một đỉnh $x \in X$ là pendant trong T và trong T_1 hoặc T_2 . Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử rằng x là một đỉnh pendant trong T_1 . Khi đó, x nằm trong đúng một

$\mathcal{C}$ – cạnh $C = \{x, y, z\}$. Hiển nhiên, $\{x, y\}, \{y, z\} \in \mathcal{D}$. Do đó, trong phân hoạch khả dĩ duy nhất c của $\mathcal{H}$, $c(x) = c(z)$. Bằng cách xóa mạnh đỉnh x khỏi $\mathcal{H}$, chúng ta thu được siêu đồ thị $\mathcal{H} - x$. Hiển nhiên, $\mathcal{H} - x$ là một siêu cây hỗn hợp với $|\mathcal{C}(\mathcal{H} - x)| = |\mathcal{C}(\mathcal{H})| - 1$. Nếu $\mathcal{H} - x$ không phải là unique colorable thì nó sẽ thừa nhận ít nhất hai phép tô màu nghiêm ngặt nào đó. Nhận thấy rằng, trong bất kỳ một mở rộng nào của một phép tô màu thực sự của $\mathcal{H} - x$ thành một phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}$, chúng ta luôn luôn có $c(x) = c(z)$. Do đó, cả hai phép tô màu của $\mathcal{H} - x$ sẽ tạo ra các phép tô màu nghiêm ngặt khác nhau của siêu cây hỗn hợp $\mathcal{H}$ ban đầu, mâu thuẫn. $\square$

Một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ được gọi là **unique colorable orderable** nếu tồn tại một dãy sắp thứ tự các đỉnh $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ của tập đỉnh X sao cho mọi siêu đồ thị con hỗn hợp $\mathcal{H}_i$ được tạo ra bởi các đỉnh $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, đều là unique colorable.

Dễ dàng nhận thấy rằng nếu chúng ta bổ sung thêm các đỉnh trong thứ tự quy ước trong dãy σ và tô màu liên tiếp chúng thì, mỗi lần thực hiện như vậy, chúng ta đều thu được chính xác một khả năng tô màu cho đỉnh tiếp theo. Điều này tương đương với việc chúng ta có thể phân tích $\mathcal{H}$ bằng cách loại bỏ các đỉnh khỏi $\mathcal{H}$ theo thứ tự ngược lại đối với σ , nghĩa là $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$, và, tại mỗi bước loại bỏ như vậy, chúng ta luôn thu được một siêu đồ thị hỗn hợp unique colorable. Lưu ý rằng không phải mọi siêu đồ thị hỗn hợp unique colorable đều là unique colorable orderable nhưng bất kỳ một siêu đồ thị unique colorable orderable thì cũng đều là unique colorable.

Từ Kết quả 8.8.16), chúng ta nhận thấy rằng có thể nhận dạng một siêu cây hỗn hợp unique colorable $\mathcal{H}$ chỉ bằng cách loại bỏ dần các đỉnh pendant của $\mathcal{D}$ – đồ thị $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ theo một thứ tự đặc biệt được quy ước như dưới đây:

Thuật toán nhận dạng siêu cây hỗn hợp unique colorable bằng cách sử dụng dãy sắp thứ tự unique colorable

INPUT: Siêu cây hỗn hợp reduce $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$.

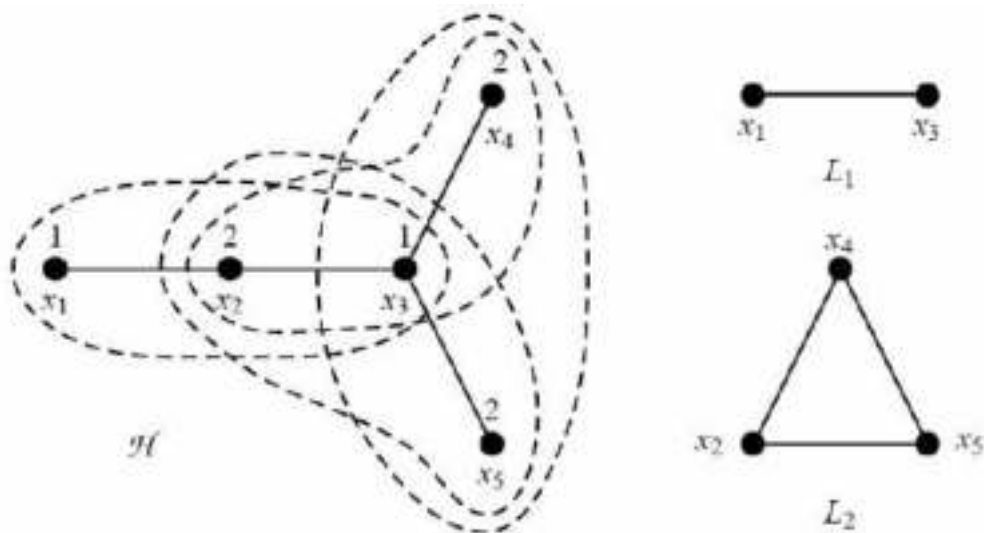
OUTPUT: Dãy sắp thứ tự unique colorable σ của $\mathcal{H}$ hoặc xuất ra “ $\mathcal{H}$ không unique colorable”.

1. Nếu tồn tại một đỉnh $x \in X$ không thuộc bất kỳ một $\mathcal{C}$ – cạnh có kích thước bằng 3 hoặc một $\mathcal{D}$ – cạnh có kích thước bằng 2 nào thì trả về “ $\mathcal{H}$ không unique colorable”. Trường hợp ngược lại, xóa khỏi $\mathcal{C}$ tất cả các cạnh có kích thước ≥ 4 .
2. Tô màu $\mathcal{D}$ – đồ thị $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ bởi hai màu 1, 2.
3. Xây dựng các đồ thị touch L_1 và L_2 .
4. Nếu các đồ thị $L_i, i = 1, 2$, đều không liên thông thì trả về “ $\mathcal{H}$ không unique colorable”.
5. Với mỗi đồ thị touch $L_i, i = 1, 2$, xây dựng cây khung T_i .
6. $i := 1$.
7. Nếu tồn tại một đỉnh pendant x trong cả $T_i, \mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ thì xóa nó ra khỏi $T_i, \mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ và bổ sung thêm x vào dãy sắp thứ tự σ .
8. Nếu có ít nhất một trong các cây T_1, T_2 là không rỗng thì gán $i = 3 - i$ và chuyển sang bước 7 của thuật toán; trong trường hợp ngược lại, trả về “ $\mathcal{H}$ không unique colorable” và dãy sắp thứ tự unique colorable σ .

Nhận xét.

Tất cả các dây cung của đồ thị touch L_i , ứng với cây khung $T_i, i = 1, 2$, đều tương ứng với các $\mathcal{C}$ – cạnh redundant trong $\mathcal{H}$. Các cây T_1 và T_2 sẽ đảm bảo cho sự tồn tại duy nhất của một (x, y) – inverter với mọi $x, y \in X$. Kết quả 8.8.16) đảm bảo cho, tại bất kỳ bước nào của thuật toán, sự tồn tại của một đỉnh pendant x trong cả $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ và một trong T_1 và T_2 . Lưu ý rằng không phải mọi phép loại bỏ các đỉnh pendant ra khỏi $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ đều tạo ra một dãy sắp thứ tự unique colorable trong $\mathcal{H}$.

Chẳng hạn xét siêu cây hỗn hợp unique colorable $\mathcal{H}$ và các đồ thị touch L_1, L_2 tương ứng như trong hình vẽ.



Hình vẽ minh họa siêu cây hỗn hợp unique colorable $\mathcal{H}$ và các đồ thị touch L_1, L_2 tương ứng.

Đồ thị L_1 là một cây, nên $T_1 = L_1$. Đồ thị L_2 không phải là một cây. Điều này chỉ ra rằng $\mathcal{H}$ phải chứa một $\mathcal{C}$ – cạnh redundant nào đó. Bất kỳ cạnh nào trong các $\mathcal{C}$ – cạnh $\{x_1, x_3, x_4\}, \{x_4, x_3, x_5\}, \{x_2, x_3, x_5\}$ cũng đều là redundant. Trong đồ thị L_2 , chọn ra dây cung $\{x_2, x_5\}$ của cây khung T_2 . Tại thời điểm bắt đầu của thuật toán, đỉnh x_1 là pendant trong cả $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ và L_1 . Sau khi xóa đỉnh x_1 ra khỏi $\mathcal{H}$, đồ thị L_1 chỉ còn chứa duy nhất một đỉnh x_3 . Tuy nhiên, x_3 lại không phải một đỉnh pendant trong $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$. Do đó, thuật toán sẽ chuyển từ cây khung T_1 sang cho cây khung T_2 . Kế tiếp, x_2 sẽ là một đỉnh pendant trong cả $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ và L_2 , nên nó sẽ là đỉnh bị xóa tiếp theo, v.v... Do đó, thuật toán sẽ phân tích $\mathcal{H}$ theo thứ tự x_1, x_2, x_4, x_3, x_5 . Như vậy, dãy sắp thứ tự unique colorable cần tìm chính là $\sigma = (x_5, x_3, x_4, x_2, x_1)$.

Từ Kết quả 8.8.16) và Thuật toán nhận dạng nêu ở trên, chúng ta dễ dàng suy ra:

Kết quả 8.8.17.

Một siêu cây hỗn hợp reduce là unique colorable nếu và chỉ nếu nó là unique colorable orderable.

Hơn nữa, bằng việc kết hợp các Kết quả 8.8.4), Kết quả 8.8.17) và mối liên hệ giữa đa thức sắc số và sắc phổ, chúng ta dễ dàng thu được kết quả sau:

Kết quả 8.8.18.

Giả sử cho trước một siêu cây hỗn hợp reduce $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Khi đó, năm khẳng định sau đây là tương đương với nhau:

- 1) $R(\mathcal{H}) = (0, 1, 0, \dots, 0)$;
- 2) $P(\mathcal{H}, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)$;
- 3) $\mathcal{H}$ là unique colorable;
- 4) Mọi cặp đỉnh $x, y \in X$ đều được nối với nhau bởi một (x, y) – invertor;
- 5) $\mathcal{H}$ là unique colorable orderable.

8.9. Tính hoàn hảo

Nhắc lại rằng, trong lý thuyết tô màu đồ thị, các đồ thị hoàn hảo đóng một vai trò quan trọng về mặt lý thuyết và các thuật toán về tìm kiếm tổ hợp. Trong ngôn ngữ của các siêu đồ thị hỗn hợp, một $\mathcal{D}$ – đồ thị G được gọi là hoàn hảo nếu, với mọi đồ thị con cảm sinh G' của nó (bao gồm cả chính bản thân G), sắc số dưới của nó luôn bằng với kích thước của clique tối đại của nó, nghĩa là $\chi(G') = \omega(G')$.

Khái niệm về tính hoàn hảo của các đồ thị rất khó để có thể mở rộng cho các $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị tổng quát bởi vì, nhìn nhận từ quan điểm của các phép tô màu, không có khái niệm hoàn toàn tương tự và đơn giản như khái niệm về các đồ thị đầy đủ K_n .

Chẳng hạn, $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị K_n^r , $r \geq 3$, là một dạng tổng quát hóa của clique K_n và xem nó như một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \emptyset, \binom{X}{r})$. Siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ này có nhiều phép tô màu thực sự và các tính chất của nó cũng không đẹp bằng các tính chất của các phép tô màu của clique $\mathcal{H} = (X, \emptyset, \binom{X}{2})$.

Tuy nhiên, chúng ta lại có thể tìm được một khái niệm hoàn toàn tương tự với tính hoàn hảo cho các siêu đồ thị hỗn hợp tùy ý ứng với sắc số trên. Do đó, khi nói về tính hoàn hảo của các đồ thị, chúng ta sẽ ngầm hiểu rằng tính hoàn hảo này liên quan đến sắc số dưới còn, khi nói về tính hoàn hảo của các siêu đồ thị, chúng ta sẽ hiểu rằng tính hoàn hảo này liên quan đến sắc số trên.

Nhắc lại rằng, từ cách định nghĩa của một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, một tập $S \subseteq X$ được gọi là **$\mathcal{C}$ – ổn định** (hoặc **$\mathcal{C}$ – độc lập**) nếu nó không chứa bất kỳ một $\mathcal{C}$ – cạnh $C \in \mathcal{C}$ nào.

Kích thước lớn nhất có thể có của một tập $\mathcal{C}$ – ổn định nằm trong $\mathcal{H}$ được gọi là **chỉ số $\mathcal{C}$ – ổn định** (hoặc **$\mathcal{C}$ – độc lập của $\mathcal{H}$**), kí hiệu bởi $\alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$.

Từ cách định nghĩa này, một tập $\mathcal{C}$ – ổn định tối đa chính là tập đa sắc lớn nhất có thể có tính trên tất cả các phép tô màu thực sự. Nếu chúng ta so sánh nó với khái niệm về một tập $\mathcal{D}$ – ổn định tối đa thì một tập $\mathcal{D}$ – ổn định tối đa chính là tập đơn sắc lớn nhất có thể có tính trên tất cả các phép tô màu thực sự.

Kết quả 8.9.1.

Với mọi siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, $\bar{\chi}(\mathcal{H}) \leq \alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$.

Chứng minh kết quả 8.9.1.

Xét một phép $\bar{\chi}$ – tô màu nghiêm ngặt của $\mathcal{H}$ và chọn ra một đỉnh bất kỳ từ mỗi lớp màu để tạo ra một tập S . Do S là một tập đa sắc nên nó sẽ không chứa bất kỳ một $\mathcal{C}$ – cạnh nào. Điều này có nghĩa là S là một $\mathcal{C}$ – tập ổn định. Do kích thước của tập S không thể lớn hơn kích thước của một $\mathcal{C}$ – tập ổn định tối đại nên chúng ta dễ dàng suy ra tính đúng đắn của đánh giá ở trên. $\square$

Nhận thấy rằng các siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ với $\bar{\chi}(\mathcal{H}) = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ có thể được xây dựng một cách dễ dàng. Hơn nữa, chúng ta cũng có thể dễ dàng nhận ra rằng chỉ số $\alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ đóng một vai trò đối với $\bar{\chi}(\mathcal{H})$ gần tương tự như vai trò của chỉ số clique tối đại ω đối với sắc số χ trong một đồ thị cổ điển G . Cụ thể hơn, nó là dạng ngược lại của đánh giá $\chi(G) \geq \omega(G)$ (**Mục 4.6. Đồ thị hoàn hảo**). Tuy nhiên, sự khác biệt đáng kể nhất phải kể đến ở đây đó là đánh giá $\chi(G) \geq \omega(G)$ chỉ đúng cho các đồ thị, nghĩa là các $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị 2 – uniform trong khi đánh giá $\bar{\chi}(\mathcal{H}) \leq \alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ lại đúng cho mọi siêu đồ thị hỗn hợp.

Từ quá trình xây dựng cấu hình Mycielskiv (**Mục 4.6. Đồ thị hoàn hảo**), chúng ta đã biết rằng luôn tồn tại các đồ thị G sao cho hiệu số $\chi(G) - \omega(G)$ có thể lớn tùy ý ngay cả khi G không có chứa các tam giác. Một kết quả tương tự có thể được tìm thấy liên quan đến sắc số trên và chỉ số $\mathcal{C}$ – ổn định cho các $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị.

Kết quả 8.9.2.

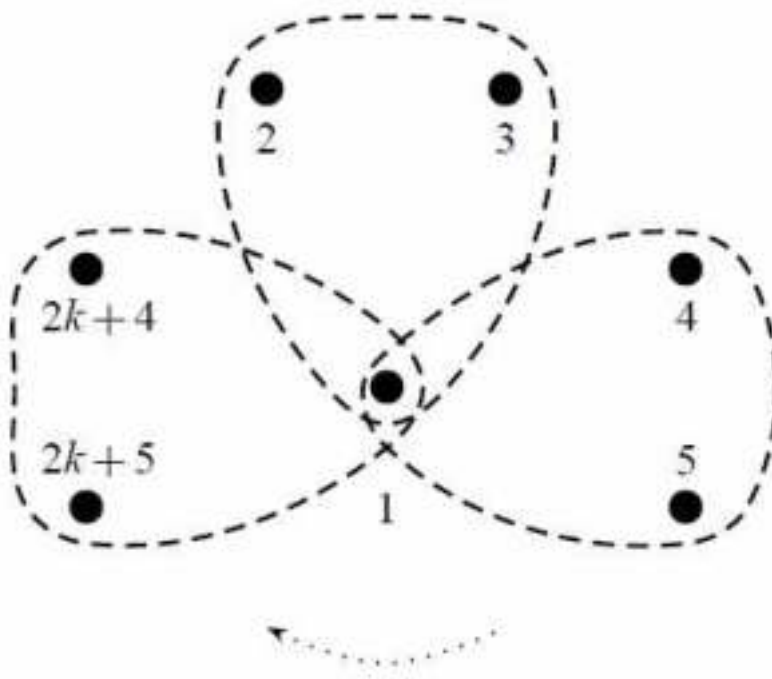
Với mọi số nguyên $k \geq 0$ và $\bar{\chi} \geq k + 1$, luôn tồn tại một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị 3 – uniform $\mathcal{H}$ sao cho

$$\alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) - \bar{\chi}(\mathcal{H}) > k.$$

Chứng minh kết quả 8.9.2.

Giả sử cho trước một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị 3 – uniform $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C})$ với $X = \{1, 2, \dots, 2k + 5\}$ và $C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{1, 4, 5\}$, $\dots$, $C_{k+2} = \{1, 2k + 4, 2k + 5\}$ sao cho $C_i \cap C_j = \{1\}$, $i, j \in I = \{1, 2, \dots, k + 2\}$, $i \neq j$.

Nói cách khác, $\mathcal{H}$ là một monostar 3 – uniform với tâm duy nhất là đỉnh 1 như trong hình vẽ bên dưới.



Hình vẽ minh họa $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị 3 – uniform $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C})$.

Do đỉnh 1 đại diện cho một transversal tối tiểu nên tất cả các đỉnh khác sẽ tạo thành một tập ổn định. Do đó, $\alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = 2k + 4$. Hơn nữa, do không có hai cạnh nào có hai đỉnh chung với nhau nên, trong mọi phép tô màu thực sự, chúng ta luôn phải lặp lại một màu nào đó trong mỗi cạnh. Do số các cạnh bằng $k + 2$ nên, trong mọi phép tô màu thực sự, số các màu tối đa có thể có sẽ là $2k + 5 - (k + 2) = k + 3$, nghĩa là $\bar{\chi}(\mathcal{H}) = k + 3$.

Như vậy, $\alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) - \bar{\chi}(\mathcal{H}) = 2k + 4 - (k + 3) = k + 1 > k$. □

Một siêu đồ thị hỗn hợp colorable $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ được gọi là **hoàn hảo** nếu, với mọi siêu đồ thị con cảm sinh $\mathcal{H}'$ của $\mathcal{H}$ (bao gồm cả chính bản thân $\mathcal{H}$), chúng ta luôn có đẳng thức $\bar{\chi}(\mathcal{H}') = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}')$.

Chẳng hạn, mọi siêu đồ thị hỗn hợp colorable $\mathcal{H} = (X, \binom{X}{r}, \mathcal{D})$, $r \geq 2$, đều hoàn hảo. Thật vậy, với mỗi $|Y| \geq r$, $\bar{\chi}(\mathcal{H}_Y) = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_Y) = r - 1$ và, với mỗi $|Y| < r$, $\bar{\chi}(\mathcal{H}_Y) = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_Y) = |Y|$.

Một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với $\mathcal{C} \neq \emptyset$ được gọi là một **$\mathcal{C}$ – bistar** nếu tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh của nó đều có chung với nhau hai đỉnh nào đó (các đỉnh này gọi là các tâm của $\mathcal{C}$ – bistar).

Kết quả 8.9.3.

Mọi $\mathcal{C}$ – bistar $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ đều là một siêu đồ thị hỗn hợp hoàn hảo.

Chứng minh kết quả 8.9.3.

Do chúng ta có thể tô màu tâm bởi một màu nào đó và các đỉnh còn lại bởi các màu phân biệt khác nên $\bar{\chi}(\mathcal{H}) = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = n - 1$. Xét một tập $Y \subseteq X$ bất kỳ. Nếu $\mathcal{H}_Y$ có chứa ít nhất một $\mathcal{C}$ – cạnh nào đó thì $\bar{\chi}(\mathcal{H}_Y) = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_Y) = |Y| - 1$. Trong trường hợp ngược lại, $\bar{\chi}(\mathcal{H}_Y) = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_Y) = |Y|$. □

Các siêu đồ thị hỗn hợp không hoàn hảo tối thiểu.

Nhắc lại rằng chúng ta thường sử dụng $\tau(\mathcal{H}_{\mathcal{C}})$ để kí hiệu cho chỉ số transversal của $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$, nghĩa là kích thước nhỏ nhất có thể có của một tập các đỉnh con của $\mathcal{H}$ sao cho mọi $\mathcal{C}$ – cạnh của siêu đồ thị hỗn hợp

$\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ đều có chứa ít nhất một đỉnh nào đó thuộc tập con này.

Kí hiệu $\tau_2(\mathcal{H}_{\mathcal{C}})$ là **chỉ số bitransversal của $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$** , nghĩa là kích thước nhỏ nhất có thể có của một tập các đỉnh con của siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ sao cho mọi $\mathcal{C} -$ cạnh của $\mathcal{H}$ đều có chứa ít nhất hai đỉnh nào đó thuộc tập con này.

Một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với $\mathcal{C} \neq \emptyset$ được gọi là một $\mathcal{C} -$ **monostar** nếu tất cả các $\mathcal{C} -$ cạnh của nó đều có chung với nhau một đỉnh nào đó. Đỉnh này được gọi là **tâm** của $\mathcal{C} -$ monostar. Do đó, nếu

$\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ là một $\mathcal{C} -$ monostar thì $\tau(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) = 1$ và $\tau_2(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) \geq 3$. Tuy nhiên, nếu $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ là một $\mathcal{C} -$ bistar thì nó sẽ có hai đỉnh chung với tất cả các $\mathcal{C} -$ cạnh, nghĩa là thì $\tau(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) = 1$ và $\tau_2(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) = 2$.

Như vậy, các lớp $\mathcal{C} -$ monostar và $\mathcal{C} -$ bistar này chỉ có thể có giao rỗng với nhau.

Kết quả 8.9.4.

Mọi $\mathcal{C} -$ monostar $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ đều không thể là một siêu đồ thị hỗn hợp hoàn hảo.

Chứng minh kết quả 8.9.4.

Từ cách định nghĩa của một $\mathcal{C} -$ monostar, $\alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) = |X| - 1$. Do $\mathcal{H}$ luôn có chứa ít nhất hai $\mathcal{C} -$ cạnh (điều này suy ra trực tiếp từ cách định nghĩa của $\mathcal{H}$) nên, với mọi phép tô màu thực sự, hoặc chúng ta sẽ có ba đỉnh nào đó được tô bởi cùng một màu hoặc chúng ta sẽ có một màu nào đó bị lặp lại ở một $\mathcal{C} -$ cạnh và một màu khác được lặp lại trong một $\mathcal{C} -$ cạnh khác. Trong cả hai trường hợp trên, số màu tối đa có thể sử dụng đều không vượt quá $|X| - 2$. Điều này chỉ ra rằng $\bar{\chi}(\mathcal{H}) \leq |X| - 2$, nên $\bar{\chi}(\mathcal{H}) \neq \alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. $\square$

Nhận thấy rằng mọi siêu đồ thị con của một $\mathcal{C} -$ monostar $\mathcal{H}$ cũng đều là một $\mathcal{C} -$ monostar, nghĩa là nó luôn có chứa ít nhất hai $\mathcal{C} -$ cạnh nào đó của $\mathcal{H}$. Như vậy, nó cũng không thể là một siêu đồ thị hỗn hợp hoàn hảo. Điều này chỉ ra rằng một siêu đồ thị hỗn hợp không hoàn hảo có thể trở thành một siêu đồ thị hỗn hợp hoàn hảo sau khi chúng ta xóa mạnh một đỉnh là giao điểm chung của hai $\mathcal{C} -$ cạnh nào đó.

Một $\mathcal{C} -$ siêu đồ thị hỗn hợp $r -$ uniform $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C})$, $|X| = n \geq 3, r \geq 2$, được gọi là **cycloid** và kí hiệu nó lại bởi C_n^r nếu $X = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ và $\mathcal{C} = \{i, i + 1(mod n), \dots, i + r - 1(mod n)\} : i = 0, 1, \dots, n - 1\}$.

Nói cách khác, một $\mathcal{C} -$ siêu đồ thị hỗn hợp $r -$ uniform $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C})$, $|X| = n \geq 3, r \geq 2$, được gọi là cycloid nếu tồn tại một đồ thị host $C_n = (X, E)$, một chu trình đơn không có dây cung, sao cho $\mathcal{C}$ trùng với họ tất cả các đường đi có độ dài bằng $r - 1$ nằm trong C_n . Do đó, các chu trình C_n thông thường có thể được xem như một siêu đồ thị hỗn hợp cycloid C_n^2 với mọi $n \geq 3$.

Kết quả 8.9.5.

Một siêu đồ thị hỗn hợp cycloid $C_n^r = (X, \mathcal{C})$, $3 \leq r \leq n$, là hoàn hảo nếu và chỉ nếu $2r \geq n + 2$.

Chứng minh kết quả 8.9.5.

Trường hợp 1: $2r \geq n + 2$.

Nhận thấy rằng nếu $r = n$ thì tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng $r \leq n - 1$. Do đó, $|C_i \cap C_j| \geq 2, i, j \in I$. Xét hai cặp đỉnh $\{x_1, x_2\}$ và $\{x_3, x_4\}$ sao cho cặp $\{x_1, x_2\}$ nằm đối diện với cặp $\{x_3, x_4\}$ trong chu trình host của C_n^r trong đó x_1 là một đỉnh láng giềng của x_2, x_3

là một đỉnh láng giềng của x_4 . Đánh giá $2r \geq n + 2$ chỉ ra rằng, với mọi $C_i \in \mathcal{C}$, $|C_i \cap \{x_1, x_2\}| \geq 2$ hoặc $|C_i \cap \{x_3, x_4\}| \geq 2$. Do đó, C_n^r là hợp của hai $\mathcal{C}$ – bistar với các tâm phân biệt nhau. Từ điều kiện bổ sung $r \leq n - 1$, chúng ta suy ra rằng không có hai đỉnh nào thuộc tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh, nên $\bar{\chi}(C_n^r) < n - 1$. Mặt khác, chúng ta có thể tô màu các đỉnh x_1, x_2 bởi một màu thứ nhất, các đỉnh x_3, x_4 bởi một màu thứ hai và tất cả $n - 4$ đỉnh còn lại bởi $n - 4$ màu phân biệt. Do đó, $\bar{\chi}(C_n^r) = n - 2$. Do C_n^r không phải là một $\mathcal{C}$ – monostar và các đỉnh x_1, x_3 lại tạo thành một transversal tối thiểu nên $\tau(C_n^r) = 2$. Điều này ngụ ý rằng $\alpha(C_n^r) = \bar{\chi}(C_n^r)$

$= n - 2$. Sau cùng, mọi siêu đồ thị con cảm sinh của C_n^r cũng đều là một $\mathcal{C}$ – bistar, nên nó cũng sẽ hoàn hảo (Kết quả 8.9.3). Như vậy, C_n^r cũng sẽ hoàn hảo.

Trường hợp 2: $2r = n + 1$.

Nhận thấy rằng C_n^r không có chứa bất kỳ một $\mathcal{C}$ – monostar nào như một siêu đồ thị con cảm sinh.

Với $r = 3, 4$, chúng ta có thể dễ dàng kiểm chứng trực tiếp được rằng C_n^r không thể nào là $\mathcal{C}$ – hoàn hảo.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng $r \geq 5$. Do $\tau(C_n^r) = 2$ nên $\alpha(C_n^r) = n - 2$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $\bar{\chi}(C_n^r) < n - 2$. Giả sử phản chứng rằng $\bar{\chi}(C_n^r) = n - 2$. Xét một phép $\bar{\chi}$ – tô màu nghiêm ngặt của C_n^r . Có hai khả năng có thể xảy ra ở đây: có một cặp đỉnh được tô bởi một màu, một cặp đỉnh khác được tô bởi một màu khác và tất cả $n - 4$ đỉnh còn lại được tô bởi $n - 4$ màu khác nữa; có ba đỉnh nào đó được tô bởi cùng một màu và tất cả $n - 3$ đỉnh còn lại được tô bởi $n - 3$ màu khác. Chúng ta sẽ khảo sát chi tiết hai khả năng nêu ở trên.

Trường hợp 2.1. Cặp $\{x_1, x_2\}$ được tô bởi một màu nào đó còn cặp $\{x_3, x_4\}$ được tô bởi một màu khác.

Khi đó, C_n^r là hợp của hai $\mathcal{C}$ – bistar với các tâm không giao nhau. Giả sử rằng $x_1, x_2 \in X$ đại diện cho tâm của $\mathcal{C}$ – bistar thứ nhất; x_3, x_4 đại diện cho tâm của $\mathcal{C}$ – bistar thứ hai.

Giả sử rằng các đỉnh x_1, x_2, x_3, x_4 này được đặt trên C_n^r theo chiều kim đồng hồ theo đúng thứ tự này.

Kí hiệu n_{ij} là số các đỉnh nằm giữa các đỉnh x_i và x_j , $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Nhận thấy rằng nếu $n_{12} = 0$ và $n_{34} = 0$ thì chúng ta có thể dễ dàng tìm được một $\mathcal{C}$ – cạnh $C \in \mathcal{C}$ sao cho $|C \cap \{x_1, x_2\}| \leq 1$ và $|C \cap \{x_3, x_4\}| \leq 1$. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử rằng $n_{12} + n_{34} \geq 1$. Chúng ta có $n_{12} + n_{23} + n_{34} + n_{41} + 4 = n = 2r - 1$. Do bất kỳ một $\mathcal{C}$ – cạnh nào cũng phải chứa $\{x_1, x_2\}$ hoặc $\{x_3, x_4\}$ nên

$$n_{12} + n_{23} + n_{34} + 2 < r,$$

$$n_{12} + n_{14} + n_{34} + 2 < r.$$

Bằng cách lấy tổng hai đánh giá nêu trên, chúng ta dễ dàng suy ra được rằng $2r - 1 + n_{12} + n_{34} < 2r$. Điều này dẫn chúng ta đi đến đánh giá $r < r$, mâu thuẫn.

Nếu các đỉnh x_1, x_2, x_3, x_4 được đặt trên C_n^r theo bất kỳ một thứ tự nào khác thì chúng ta cũng dễ dàng tìm được một $\mathcal{C}$ – cạnh $C \in \mathcal{C}$ sao cho $|C \cap \{x_1, x_2\}| \leq 1$ và $|C \cap \{x_3, x_4\}| \leq 1$. Do đó, C_{2r-1}^r không thể nào là hợp của hai $\mathcal{C}$ – bistar với các tâm phân biệt với $r \geq 3$.

Trường hợp 2.2. Các đỉnh x_1, x_2, x_3 được tô bởi cùng một màu và chúng được đặt trên C_n^r theo chiều kim đồng hồ theo đúng thứ tự này.

Khi đó, các đỉnh x_1, x_2, x_3 đóng vai trò như một $\mathcal{C}$ – bitransversal tối tiểu của C_n^r .

Kí hiệu n_{ij} là số các đỉnh nằm giữa các đỉnh x_i và $x_j, i, j = 1, 2, 3$.

Chúng ta có $n_{12} + n_{23} + n_{31} + 3 = n = 2r - 1$. Do bất kỳ một $\mathcal{C}$ – cạnh nào cũng phải chứa hai đỉnh nào đó trong số ba đỉnh x_1, x_2, x_3 nên

$$n_{12} + 1 + n_{23} < r,$$

$$n_{23} + 1 + n_{31} < r,$$

$$n_{31} + 1 + n_{12} < r.$$

Bằng cách lấy tổng các đánh giá nêu trên, chúng ta dễ dàng suy ra được rằng $r < 5$, mâu thuẫn. Do đó, C_{2r-1}^r không thể được tô bởi $n - 2$ màu sao cho ba đỉnh x_1, x_2, x_3 được tô bởi cùng một màu còn tất cả các đỉnh còn lại thì được tô bởi các màu phân biệt khác. Điều này cũng chỉ ra rằng C_n^r không thể là hoàn hảo.

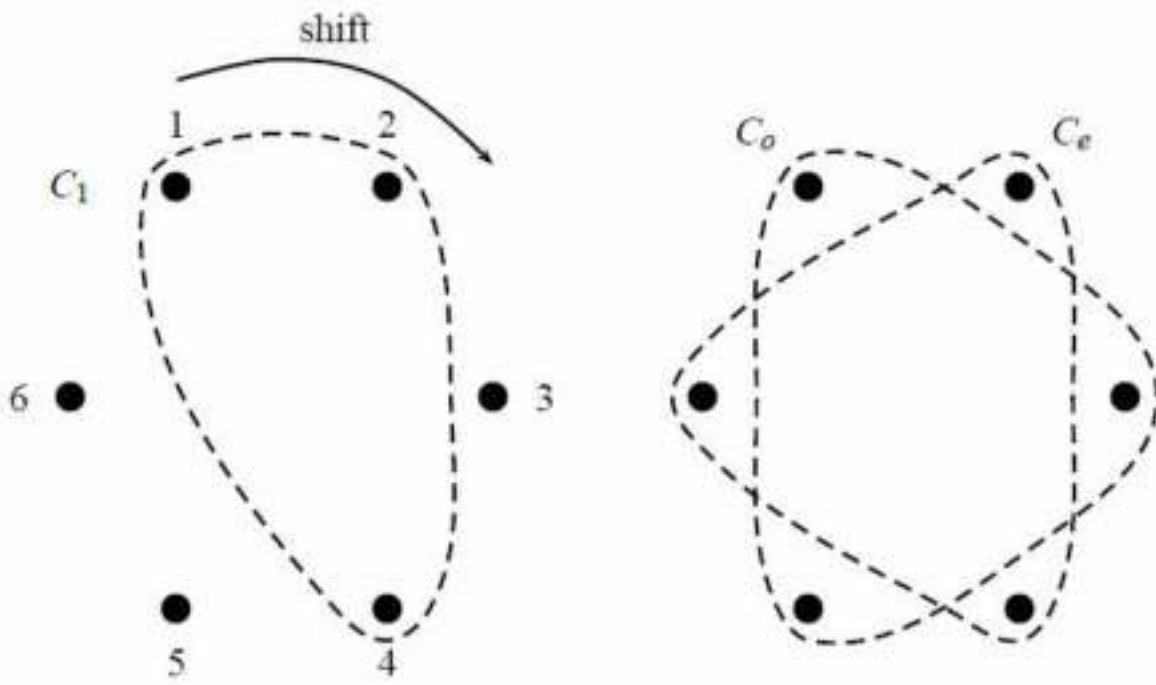
Trường hợp 3: $2r \leq n$.

Trong trường hợp này, tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh đều có chứa một đỉnh cố định. Do đó, chúng sẽ tạo thành một siêu đồ thị con cảm sinh có dạng một $\mathcal{C}$ – monostar. Như vậy, C_n^r không thể là hoàn hảo. $\square$

Tiếp theo, chúng ta sẽ giới thiệu một ví dụ khác về các siêu đồ thị hỗn hợp không hoàn hảo tối thiểu được đề xuất bởi Král’.

Giả sử cho trước một số nguyên dương $r \geq 3$. Chúng ta sẽ xây dựng một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}^r = (X, C)$ theo cách sau:

Kí hiệu $X = \{1, 2, 3, \dots, 2r\}$ và giả sử các đỉnh $1, 2, 3, \dots, 2r$ được đặt trên một chu trình nào đó trong mặt phẳng theo chiều kim đồng hồ theo đúng thứ tự này. Họ các cạnh C gồm $2r + 2$ cạnh, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_{2r}, C_0, C_e\}$, sao cho $C_1 = \{1, 2, 4, 6, 8, \dots, 2r - 2\}$. Do đó, C_1 có chứa hai đỉnh liên tiếp 1 và 2, bỏ qua đỉnh 3 và chứa tất cả r đỉnh chẵn sau đó (ngoại trừ đỉnh $2r$). Hơn nữa, cạnh C_2 thu được từ C_1 bằng cách quay C_1 đi 1 đơn vị theo chiều kim đồng hồ quanh chu trình, cạnh C_3 thu được từ C_2 bằng cách quay C_2 đi 1 đơn vị theo chiều kim đồng hồ quanh chu trình, v.v..., cạnh C_{2r} thu được từ C_{2r-1} bằng cách quay C_{2r-1} đi 1 đơn vị theo chiều kim đồng hồ quanh chu trình. Nói cách khác, các cạnh $C_2, C_3, \dots, C_{2r}$ đều là các bản sao của C_1 thu được bằng cách quay nó quanh chu trình. Sau cùng, cạnh C_0 chứa tất cả các đỉnh lẻ còn cạnh C_e chứa tất cả các đỉnh chẵn. Hiển nhiên, $\mathcal{H}^r$ là một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị r – uniform $(r + 1)$ – regular.



Hình ảnh minh họa siêu đồ thị $\mathcal{H}^r$ cho trường hợp $r = 3$. Để tránh nhầm lẫn, chúng ta sẽ không biểu diễn trực tiếp các cạnh $C_2, \dots, C_6$ và biểu diễn riêng biệt các cạnh C_0 và C_e .

Kết quả 8.9.6. (Kráľ)

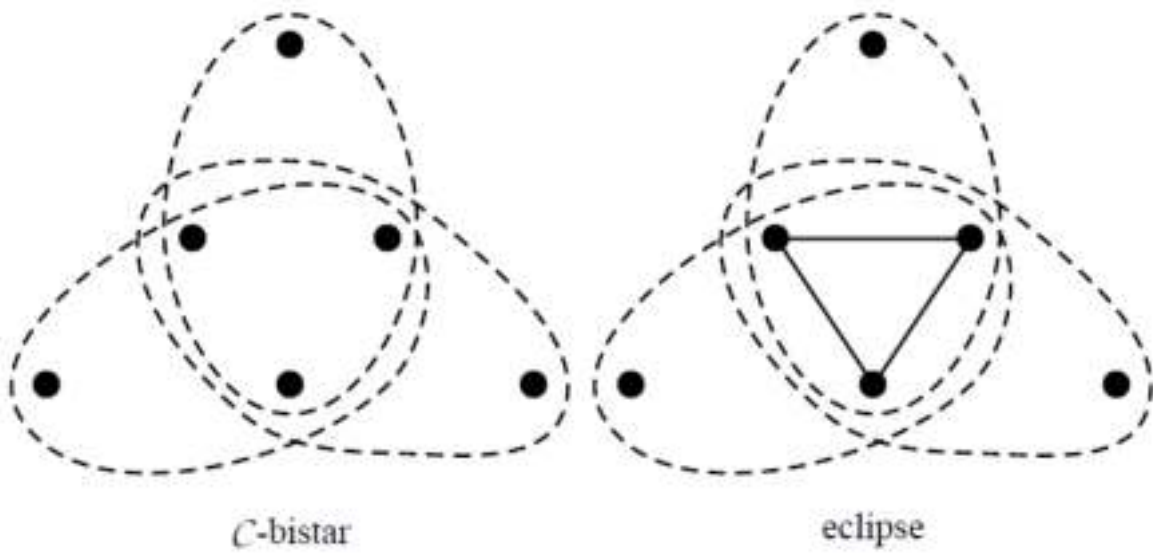
$\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H}^r$ không có chứa bất kỳ một cycloid nào xác định trên $2r - 1$ đỉnh cũng như không có chứa bất kỳ một monostar nào như một siêu đồ thị con cảm sinh. Hơn nữa, $\bar{\chi}(\mathcal{H}^r) = 2r - 4 < 2r - 3 = \alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}^r)$.

Tính hoàn hảo của các siêu cây hỗn hợp.

Một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ được gọi là thỏa mãn **tính chất bi - Helly** nếu, với bất kỳ họ con nào của các cạnh, điều kiện sau đây luôn được thỏa mãn: “Nếu hai cạnh bất kỳ của họ con này đều có ít nhất hai đỉnh chung với nhau thì tất cả các cạnh của họ này cũng sẽ có ít nhất hai đỉnh chung với nhau”.

Một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ được gọi là **eclipse** nếu giao của tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh của nó tạo ra một $\mathcal{D}$ – đồ thị đầy đủ.

Hiển nhiên, mọi eclipse đều có chứa ít nhất một $\mathcal{C}$ – cạnh; nếu nó chỉ chứa duy nhất một $\mathcal{C}$ – cạnh thì nó sẽ phải là uncolorable. Mọi $\mathcal{C}$ – monostar đều là một trường hợp đặc biệt của một eclipse. Mọi $\mathcal{C}$ – bistar với mỗi tâm đều là một $\mathcal{D}$ – cạnh với kích thước bằng 2 cũng đều là một eclipse.



Hình vẽ minh họa cách để chúng ta có thể nhận được một eclipse từ một $\mathcal{C}$ – bistar cho trước.

Kết quả 8.9.7.

Mọi siêu đồ thị eclipse $\mathcal{H}$ đều không thể là một siêu đồ thị hỗn hợp hoàn hảo.

Chứng minh kết quả 8.9.7.

Do giao của tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh là khác rỗng nên $\tau(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) = 1$. Do đó, $\alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}_{\mathcal{C}}) = n - 1$. Nếu $\mathcal{H}$ chỉ chứa duy nhất một $\mathcal{C}$ – cạnh thì nó không thể là uncolorable, nên $\bar{\chi}(\mathcal{H}) = 0$. Nếu $\mathcal{H}$ có chứa nhiều hơn một $\mathcal{C}$ – cạnh thì, với bất kỳ phép tô màu thực sự nào, giao của tất cả các $\mathcal{C}$ – cạnh phải là đa sắc. Điều này chỉ ra rằng không thể có hai $\mathcal{C}$ – cạnh nào được tô bởi cùng một màu. Do đó, không tồn tại bất kỳ một phép tô màu nào với $n - 1$ màu. Trong tất cả các trường hợp, chúng ta luôn có $\bar{\chi}(\mathcal{H}) \neq n - 1$. $\square$

Hiển nhiên, nếu một eclipse là một siêu cây hoặc bất kỳ một siêu đồ thị con nào đó của một siêu cây thì nó sẽ là một $\mathcal{C}$ – monostar hoặc một $\mathcal{C}$ – bistar nhận $\mathcal{D}$ – đồ thị K_2 làm tâm duy nhất.

Kết quả 8.9.8.

Nếu một siêu cây hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ không có chứa bất kỳ một eclipse nào thì nó sẽ là hoàn hảo.

Chứng minh kết quả 8.9.8.

Giả sử cho trước một siêu cây hỗn hợp không có chứa bất kỳ một eclipse nào $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$. Do mọi siêu đồ thị con cảm sinh của một siêu cây hỗn hợp cũng đều là một siêu cây hỗn hợp nên chúng ta chỉ cần chứng minh rằng $\mathcal{H}$ có thể được tô bởi $\alpha_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ màu là đủ.

Từ Kết quả 6.1.2), siêu cây $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = (X, \mathcal{C}, \emptyset)$ sẽ thỏa mãn tính chất Helly, nghĩa là, với mọi họ con $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$ sao cho $C \cap C' \neq \emptyset$ với mỗi cặp $C, C' \in \mathcal{C}_1$, chúng ta luôn có $\bigcap_{C \in \mathcal{C}_1} C \neq \emptyset$. Trên thực tế, với mỗi họ con $\mathcal{C}_1$ như vậy, chúng ta sẽ luôn có $|\bigcap_{C \in \mathcal{C}_1} C| \geq 2$ (trong trường hợp ngược lại, $\mathcal{C}_1$ sẽ tạo thành một siêu đồ thị eclipse).

Như vậy, $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ sẽ là một siêu đồ thị bi – Helly. Hơn nữa, điều kiện $C \cap C' \neq \emptyset$ ngụ ý rằng $|C \cap C'| \geq 2$, với mọi cặp $C, C' \in \mathcal{C}$.

Xét bài toán xác định một transversal tối tiểu của $\mathcal{H}_C$. Để giải quyết bài toán này, chúng ta sẽ xây dựng đồ thị tuyến tính của $\mathcal{H}_C$, nghĩa là đồ thị $L(\mathcal{H}_C) = (C, \mathcal{E})$ trong đó $(C, C') \in \mathcal{E} \Leftrightarrow C \cap C' \neq \emptyset$, với mỗi cặp $C, C' \in \mathcal{C}$. Do tính chất Helly của $\mathcal{H}_C$ nên một phủ clique tối tiểu của $L(\mathcal{H}_C)$ sẽ tương ứng với một transversal tối tiểu của $\mathcal{H}_C$. Kí hiệu $K_1, K_2, \dots, K_t$ là các clique của một phủ tối tiểu nào đó của $L(\mathcal{H}_C)$. Như vậy, $\tau(\mathcal{H}_C) = t$, nên $\alpha_C(\mathcal{H}) = |X| - t$.

Do tính chất bi – Helly của $\mathcal{H}_C$ nên mọi clique của đồ thị tuyến tính $L(\mathcal{H}_C)$ đều tạo thành một $\mathcal{C}$ – bistar đóng vai trò như một siêu đồ thị con từng phần trong $\mathcal{H}$ với chứa ít nhất một tâm (một $\mathcal{C}$ – bitransversal). Do $\mathcal{H}$ không có chứa bất kỳ một eclipse nào nên mọi $\mathcal{C}$ – bistar như vậy đều có chứa ít nhất một tâm không phải là một $\mathcal{D}$ – cạnh.

Kí hiệu $\{x_i, y_i\}$ là $\mathcal{C}$ – bitransversal tương ứng với clique $K_i, i = 1, 2, \dots, t$ sao cho $\{x_i, y_i\} \notin \mathcal{D}$. Nhận thấy rằng tất cả các cặp $\{x_i, y_i\}$ này sẽ phải phân biệt nhau (điều này suy ra từ việc $K_i \neq K_j$ kéo theo $\{x_i, y_i\} \cap \{x_j, y_j\} = \emptyset$). Tô màu các đỉnh x_1, y_1 bởi màu thứ nhất; tô màu các đỉnh x_2, y_2 bởi màu thứ hai;; tô màu các đỉnh x_t, y_t bởi màu thứ t ; sau cùng, tô màu mỗi đỉnh trong số tất cả các đỉnh còn lại bởi một màu nào đó trong số các màu $t + 1, t + 2, \dots, |X| - t$. Do đó, chúng ta thu được một phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}$ với $|X| - t = \alpha_C(\mathcal{H})$ màu, đpcm. □

Kết quả 8.9.9.

Nếu $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ là một siêu cây hỗn hợp hoàn hảo, kí hiệu $v(\mathcal{H}_C)$ và $\tau(\mathcal{H}_C)$ lần lượt là kích thước tối đại của một cặp ghép và kích thước tối tiểu của một transversal của $\mathcal{H}_C$ thì

$$\bar{\chi}(\mathcal{H}) = \alpha_C(\mathcal{H}) = |X| - \tau(\mathcal{H}_C) = |X| - v(\mathcal{H}_C).$$

Chứng minh kết quả 8.9.9.

Do $\mathcal{H}_C$ là một siêu cây nên hiển nhiên nó cũng sẽ thỏa mãn tính chất König (Kết quả 6.1.11), nghĩa là $v(\mathcal{H}_C) = \tau(\mathcal{H}_C)$. Do đó, khẳng định trên là hiển nhiên. □

Nhận xét.

Sự hiện diện hay vắng mặt của các monostar trong một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị không trực tiếp quyết định tính hoàn hảo của $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị đó. Chẳng hạn, xét $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C})$ với $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$, $C_1 = \{1, 2, 3\}, C_2 = \{2, 3, 4, 5\}, C_3 = \{1, 4, 5\}$. Chúng ta có thể thấy rằng $C_1 \cap C_3 = \{1\}$ và chúng ta có được một siêu đồ thị con từng phần có dạng một monostar. Tuy nhiên, $\mathcal{H}$ lại hoàn hảo (điều này suy ra từ việc $\bar{\chi}(\mathcal{H}) = \alpha_C(\mathcal{H}) = 3$). Mặt khác, siêu đồ thị cycloid C_5^3 lại có chứa các monostar như các siêu đồ thị con từng phần nhưng nó lại không có chứa bất kỳ một monostar nào dưới dạng một siêu đồ thị con cảm sinh và đồng thời nó cũng không hoàn hảo (Kết quả 8.9.5).

Sau cùng, chúng ta sẽ kết thúc mục này của bài viết bằng việc trình bày rõ ràng sáu ví dụ khác nhau về các $\mathcal{C}$ – siêu đồ 3 – uniform tối tiểu không hoàn hảo:

$$V_1 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}\}) \text{ (monostar);}$$

$$V_2 = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}\}) \text{ (monostar);}$$

$$V_3 = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}\}) \text{ (monostar);}$$

$V_4 = (\{1,2,3,4,5\}, \{\{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,4,5\}, \{1,2,5\}\})$ (monostar);

$V_5 = (\{1,2,3,4,5\}, \{\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}, \{4,5,1\}, \{5,1,2\}\})$ (cycloid C_5^3);

$\mathcal{H}^1 = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{\{1,2,4\}, \{2,3,5\}, \{3,4,6\}, \{4,5,1\}, \{5,6,2\}, \{6,1,3\}, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\})$ (cấu hình Král')

Như chúng ta có thể nhận thấy ở trên, tính hoàn hảo của các siêu đồ thị phức tạp hơn rất nhiều so với tính hoàn hảo của các đồ thị đã được khảo sát ở mục trước (**4.6. Đồ thị hoàn hảo**).

8.10. Sắc phổ

Nhận thấy rằng mỗi phép i – tô màu nghiêm ngặt của một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ đều tương ứng với một phân hoạch khả dĩ của tập đỉnh thành i lớp màu không rỗng. Từ cách định nghĩa sắc phổ của các đồ thị, chúng ta cũng sẽ chọn số các phân hoạch khả dĩ của tập đỉnh thành i lớp màu, $1 \leq i \leq n$, làm sắc phổ của một siêu đồ thị hỗn hợp. Các thành phần dương của sắc phổ sẽ bắt đầu với số các phân hoạch khả dĩ của tập các đỉnh thành $\chi(\mathcal{H})$ lớp màu và kết thúc với số các phân hoạch khả dĩ của tập các đỉnh thành $\bar{\chi}(\mathcal{H})$ lớp màu. Dễ dàng nhận thấy rằng, với bất kỳ $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị hoặc bất kỳ $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị nào, phân đoạn con này của sắc phổ không có chứa khoảng trống, nghĩa là không có số 0 nằm giữa các số nguyên dương còn lại. Tuy nhiên, sắc phổ của các siêu đồ thị hỗn hợp lại có thể chứa khoảng trống. Điều này có nghĩa là mặc dù chúng ta có biết trước các sắc số trên và sắc số dưới thì cũng không đủ căn cứ để kết luận: “Liệu có tồn tại một phép tô màu sử dụng số màu trung gian nằm giữa sắc số trên và sắc số dưới hay không?”.

Một cách hình thức hơn, những nhận định trên có thể được diễn tả lại như sau:

Tập các giá trị k sao cho $\mathcal{H}$ có ít nhất một phép k – tô màu nghiêm ngặt được gọi là **tập khả dĩ của $\mathcal{H}$** , kí hiệu bởi $S(\mathcal{H})$. Nói cách khác, $S(\mathcal{H})$ là tập các chỉ số k sao cho $r_k(\mathcal{H}) > 0$.

Một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ được gọi là **có khoảng trống tại điểm k** nếu $S(\mathcal{H})$ có chứa các phần tử lớn hơn và nhỏ hơn k nhưng bỏ qua k . Sắc phổ $R(\mathcal{H})$ được gọi là **liên tục** nếu $S(\mathcal{H})$ không có khoảng trống tại bất kỳ điểm nào. Trong trường hợp ngược lại, $R(\mathcal{H})$ được gọi là **gián đoạn**.

Kết quả 8.10.1.

Với mọi siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, cả $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = (X, \mathcal{C})$ và $\mathcal{H}_{\mathcal{D}} = (X, \mathcal{D})$ đều có sắc phổ liên tục.

Chứng minh kết quả 8.10.1.

Để chứng minh sắc phổ của $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ là liên tục, chúng ta sẽ thực hiện như sau: Bắt đầu với một phép $\bar{\chi}$ – tô màu nghiêm ngặt bất kỳ, thực hiện tuần tự việc hợp nhất hai lớp màu bất kỳ của phép tô màu nghiêm ngặt này càng lâu càng tốt và chỉ kết thúc thuật toán khi còn lại một lớp màu duy nhất. Do, tại mỗi bước của thuật toán, chúng ta luôn nhận được một phép tô màu thực sự nên sắc phổ của $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ sẽ phải liên tục.

Để chứng minh sắc phổ của $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ là liên tục, chúng ta sẽ thực hiện như sau: Bắt đầu với một phép $\bar{\chi}$ – tô màu nghiêm ngặt bất kỳ, thực hiện tuần tự việc tách một lớp màu bất kỳ có chứa ít nhất hai đỉnh thành hai lớp màu mới và chỉ kết thúc thuật toán khi có $|X|$ lớp màu với mỗi lớp màu đều có kích thước bằng 1. Do, tại mỗi bước của thuật toán, chúng ta luôn nhận được một phép tô màu thực sự nên sắc phổ của $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ cũng sẽ phải liên tục. $\square$

Nhận thấy rằng phần thứ hai của khẳng định trên là chính là dạng tổng quát hóa trực tiếp của Kết quả 4.1.1) cho sắc phổ của các đồ thị.

Cách xây dựng đơn giản một siêu đồ thị hỗn hợp có khoảng trống.

Một trong những cách đơn giản nhất để chúng ta có thể tạo ra một siêu đồ thị hỗn hợp có khoảng trống trong sắc phổ là **nhân đôi một $\mathcal{D}$ – cạnh** bất kỳ lên nhiều lần.

Đầu tiên, chúng ta sẽ định nghĩa một phép toán như thế nào được gọi nhân đôi một $\mathcal{D}$ – cạnh. Giả sử cho trước một $\mathcal{D}$ – cạnh $\{a, b\}$ như trong hình vẽ bên dưới. Chúng ta thay thế các đỉnh a, b bởi các cặp đỉnh a, a' và b, b' tương ứng như trong hình vẽ. Do đó, $\mathcal{D}$ – cạnh $\{a, b\}$ sẽ trở thành $\mathcal{D}$ – cạnh $\{a, a', b, b'\}$. Chúng ta cũng bổ sung thêm tất cả các bộ ba xác định trên các đỉnh a, a', b, b' dưới dạng các $\mathcal{C}$ – cạnh.

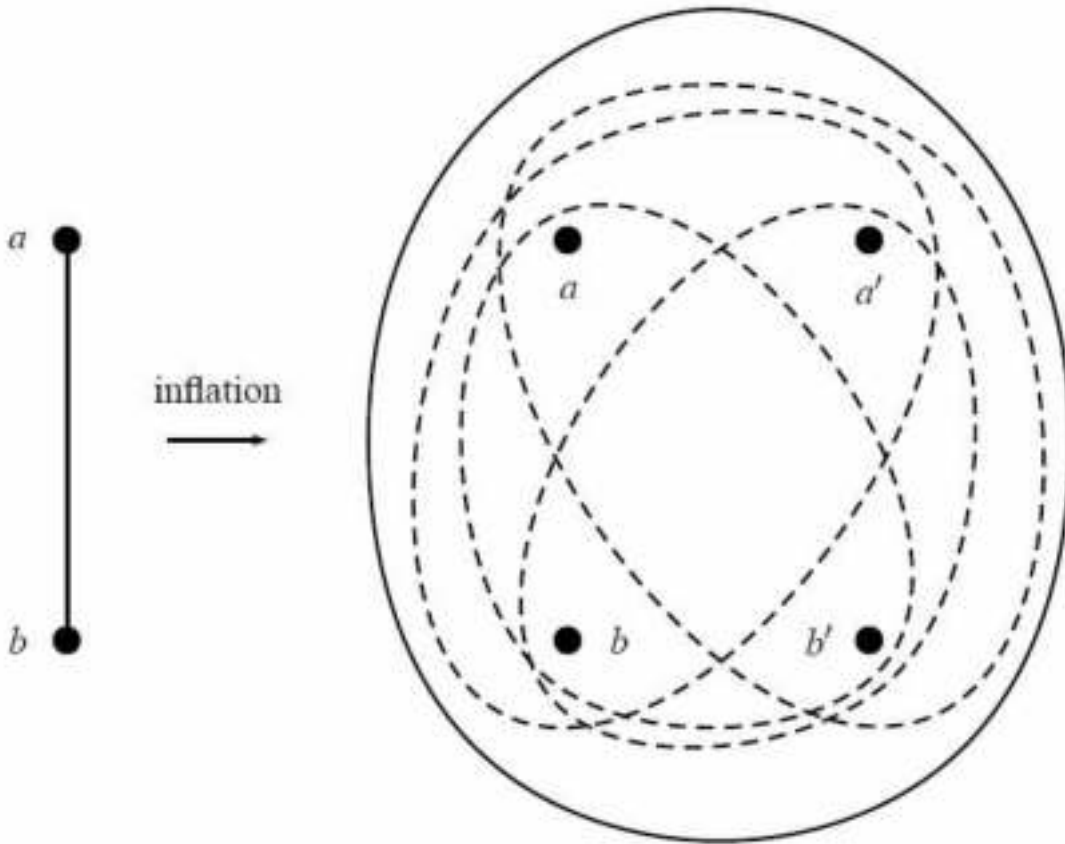
Kí hiệu $\mathcal{H} = (X, K_4^3, K_4^4)$ với $X = \{a, a', b, b'\}$ là siêu đồ thị hỗn hợp nhận được sau khi thực hiện thuật toán.

Như vậy, phép nhân đôi $\mathcal{D}$ – cạnh $\{a, b\}$ thật ra chính là việc thay thế $\mathcal{D}$ – cạnh $\{a, b\}$ bởi siêu đồ thị $\mathcal{H}$.

Chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $R(\mathcal{H}) = (0, 7, 0, 0)$ và tất cả bảy phân hoạch khả dĩ lần lượt được tạo ra bởi bảy phép 2 – tô màu nghiêm ngặt được nêu dưới đây:

$$1122, 1112, 1121, 1222, 2122, 1212, 1221,$$

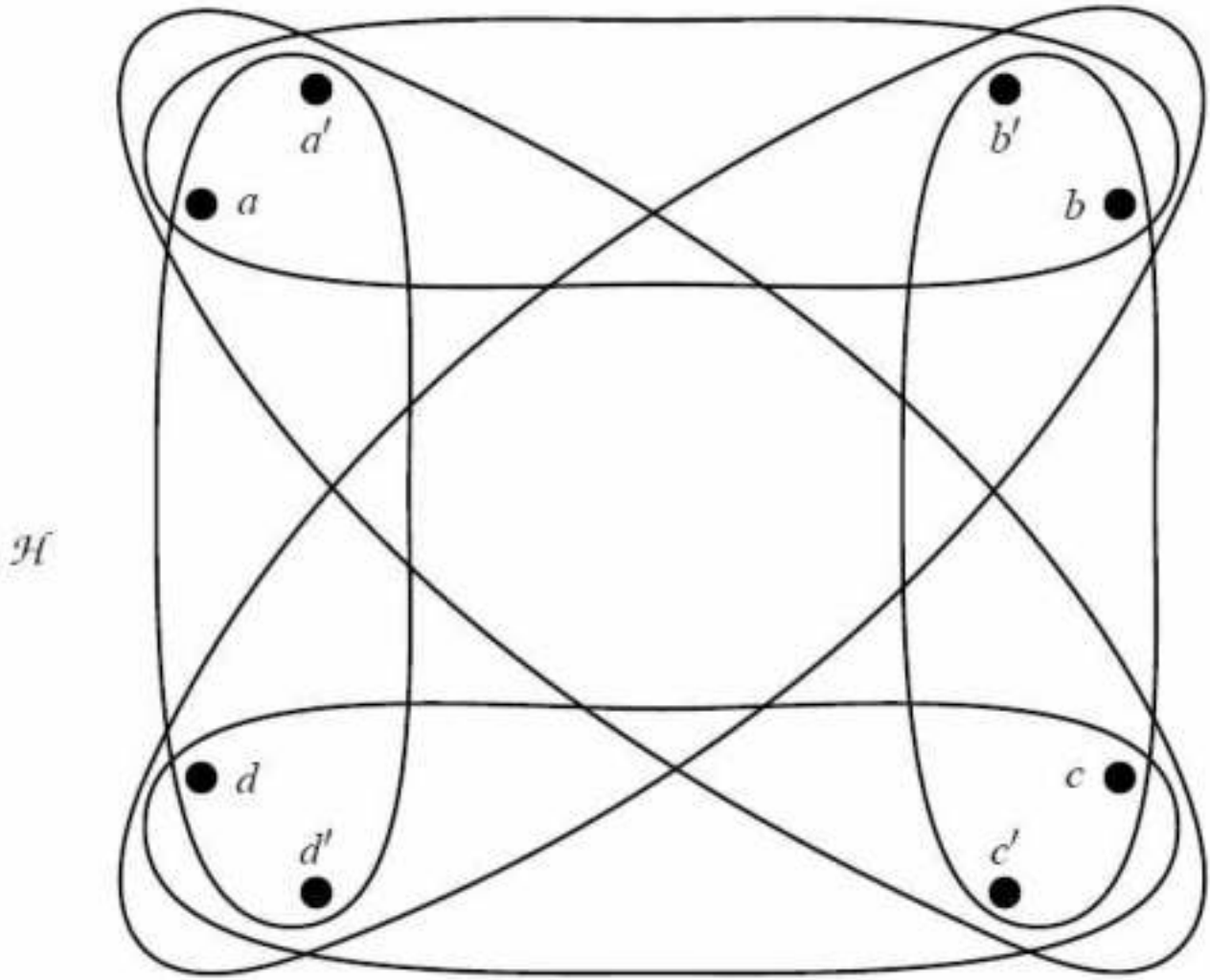
trong đó thứ tự được tính theo thứ tự a, a', b, b' .



Hình vẽ minh họa phép nhân đôi $\mathcal{D}$ – cạnh $\{a, b\}$ thành $\mathcal{D}$ – cạnh $\{a, a', b, b'\}$.

Kế tiếp, chúng ta chọn ra một $\mathcal{D}$ – đồ thị K_4 xác định trên các đỉnh a, b, c, d và nhân đôi tất cả các $\mathcal{D}$ – cạnh của nó như trong hình vẽ bên dưới (để tránh gây ra các nhầm lẫn không đáng có, chúng ta sẽ không biểu diễn các $\mathcal{C}$ – cạnh). Kí hiệu $\mathcal{H}$ là siêu đồ thị hỗn hợp nhận được.

Khi đó, $\mathcal{H}$ sẽ có chứa bốn cặp đỉnh $\{a, a'\}, \{b, b'\}, \{c, c'\}, \{d, d'\}$, trong đó các đỉnh a', b', c', d' lần lượt là các bán sao của các đỉnh a, b, c, d khi thực hiện phép nhân đôi siêu đồ thị K_4 .



Hình vẽ minh họa phép nhân đôi siêu đồ thị K_4 thành siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$.

Xét một phép tô màu thực sự bất kỳ của $\mathcal{H}$. Nhận thấy rằng, trong bất kỳ phép tô màu thực sự nào của $\mathcal{H}$, nếu có một cặp đỉnh nào đó có hai đỉnh được tô bởi hai màu khác nhau, tạm giả sử các đỉnh của cặp $\{a, a'\}$ được tô bởi các màu 1 và 2, thì mỗi một trong các đỉnh còn lại đều được tô bởi một trong các màu 1 và 2. Điều này suy ra từ việc nếu xuất hiện bất kỳ một màu mới ở bất kỳ một đỉnh còn lại nào, tạm giả sử đỉnh c được tô bởi màu 3, thì ngay lập tức chúng ta sẽ thu được một $\mathcal{C}$ – cạnh đa sắc $\{a, a', c\}$. Như vậy, chúng ta chỉ cần xem xét các phép tô màu thực sự trong đó mỗi cặp nêu trên đều đơn sắc là đủ. Thật đáng ngạc nhiên, nếu chúng ta không tính đến các hoán vị của các màu thì chỉ có duy nhất một phép tô màu như vậy: 11223344.

Thật vậy, do không thể có hai cặp đỉnh nào có thể được tô bởi cùng một màu (điều này suy ra từ việc mỗi hai cặp đỉnh bất kỳ đều là một $\mathcal{D}$ – cạnh) nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $\mathcal{H}$ có một số phép 2 – tô màu ($r_2 \geq 2$), một phép 4 – tô màu ($r_4 = 1$) và không có bất kỳ một phép 3 – tô màu nào ($r_3 = 0$), nghĩa là có khoảng trống trong sắc phổ của $\mathcal{H}$. Bằng cách lập luận tương tự như trên, chúng ta cũng dễ dàng suy ra rằng không có bất kỳ một phép 5 – tô màu, 6 – tô màu, 8 – tô màu nào, nghĩa là sắc phổ của $\mathcal{H}$ sẽ có dạng:

$$R(\mathcal{H}) = (0, r_2, 0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Để dàng nhận thấy rằng siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ chưa phải là siêu đồ thị hỗn hợp nhỏ nhất có chứa khoảng trống. Chúng ta cũng có thể nhận thấy rằng một siêu đồ thị hỗn hợp có chứa khoảng trống nhỏ nhất có thể thu được bằng cách bắt đầu với cùng một $\mathcal{D}$ – đồ thị K_4 và chỉ thực hiện nhân đôi mỗi $\mathcal{D}$ – cạnh $\{c, d\}$ (nghĩa là chúng ta chỉ nhân đôi các đỉnh c, d) và bổ sung thêm các bộ ba $\{a, c, c'\}, \{a, d, d'\}, \{b, c, c'\}, \{b, d, d'\}$ như các $\mathcal{C}$ – cạnh. Do đó, các bộ ba này sẽ trở thành các bi – cạnh. Nhắc lại rằng, trong bất kỳ $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị K_4^3 nào, mọi cạnh đều là redundant. Điều này có nghĩa là có thể xóa một $\mathcal{C}$ – cạnh nào đó khỏi phép nhân đôi của cạnh $\{c, d\}$ mà chúng ta vẫn có khoảng trống. Ký hiệu $\mathcal{H}_{2,4}$ là siêu đồ thị hỗn hợp nhỏ nhất có chứa khoảng trống nhận được trong đó chỉ số 2,4 có nghĩa là $S(\mathcal{H}) = \{2,4\}$.

Bằng cách phát triển xa hơn các ý tưởng nêu ở trên, chúng ta cũng có thể xây dựng được các ví dụ về các siêu đồ thị hỗn hợp nhỏ nhất có chứa khoảng trống trong sắc phổ của chúng trong một bối cảnh tổng quát hơn như sau:

Các siêu đồ thị hỗn hợp nhỏ nhất có chứa khoảng trống.

Giả sử cho trước hai số nguyên dương s, t sao cho $2 \leq s \leq t - 2$. Trong mục con này của bài viết, chúng ta sẽ xây dựng một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}_{s,t}$ với tập khả dĩ $S(\mathcal{H}_{s,t}) = \{s, t\}$ và đồng thời chứng minh rằng $\mathcal{H}_{s,t}$ là siêu đồ thị có số đỉnh nhỏ nhất trong số tất cả các siêu đồ thị hỗn hợp s – colorable có khoảng trống tại điểm $t - 1$ với số đỉnh nhỏ nhất này là $2t - s$.

Chúng ta sẽ bắt đầu với việc xây dựng chi tiết một siêu đồ thị hỗn hợp với $2t - 2$ đỉnh và tập khả dĩ $\{2, t\}$. Như thường lệ, K_n có thể được xem như một siêu đồ thị hỗn hợp $\left(X, \emptyset, \binom{X}{2}\right)$ với tập khả dĩ $S(K_n) = \{n\}$. Đầu tiên, chúng ta mô tả lại ý tưởng tiếp cận vấn đề một cách đơn giản như sau:

Bắt đầu với K_t , mở rộng $t - 2$ đỉnh bất kỳ bằng cách nhân đôi chúng lên và chỉ để lại hai đỉnh đặc biệt nào đó không được nhân đôi. $\mathcal{D}$ – cạnh gồm hai đỉnh đặc biệt vẫn được giữ lại còn các $\mathcal{D}$ – cạnh khác đều được mở rộng thành các $\mathcal{D}$ – cạnh với kích thước bằng 3 hoặc 4 (đỉnh đặc biệt cộng với cặp đỉnh hoặc hợp của hai cặp đỉnh). Bổ sung thêm tất cả các bộ ba bao gồm ba đỉnh phát sinh từ hai đỉnh ban đầu như các $\mathcal{C}$ – cạnh (đỉnh đặc biệt cộng với cặp đỉnh hoặc ba đỉnh nào đó từ hai cặp đỉnh).

Điều này hầu như mô tả hoàn toàn đầy đủ ý tưởng xây dựng của chúng ta nhưng chúng ta vẫn sẽ trình bày nó một cách hình thức hơn để tạo điều kiện thuận lợi cho việc triển khai các phép chứng minh. Ký hiệu $[m] := \{1, \dots, m\}$.

Phép xây dựng thứ nhất: Xây dựng một siêu đồ thị $\mathcal{H}_{2,t}$ với tập đỉnh $\{x_1, x_2, a_1, \dots, a_{t-2}, b_1, \dots, b_{t-2}\}$.

Kí hiệu:

T là tập tất cả các bộ ba có dạng $x_r a_i b_i$ với $r \in \{1, 2\}$ và $i \in [t - 2]$;

U là tập tất cả các bộ tứ có dạng $a_i b_i a_j b_j$ với $i, j \in [t - 2]$;

W là hợp của các bộ ba được chứa trong các tập $\{a_i, b_i, a_j, b_j\}$ với $i, j \in [t - 2]$.

Khi đó, $T \cup W$ là tập các $\mathcal{C}$ – cạnh chứa trong $\mathcal{H}_{2,t}$ còn $T \cup U \cup \{x_1 x_2\}$ là tập các $\mathcal{D}$ – cạnh chứa trong $\mathcal{H}_{2,t}$.

Kết quả 8.10.2.

$$S(\mathcal{H}_{2,t}) = \{2, t\}.$$

Chứng minh kết quả 8.10.2.

Xét một phép tô màu c bất kỳ của $\mathcal{H}_{2,t}$. Nếu $c(a_i) \neq c(b_i)$ với một chỉ số $i \in [t-2]$ nào đó thì các $\mathcal{C}$ – cạnh nằm trong T và W có chứa a_i và b_i sẽ buộc tất cả các đỉnh khác phải được tô bởi cùng một màu với a_i hoặc b_i . Như vậy, trong trường hợp này chúng ta có nhiều nhất là hai màu. Sự tồn tại của các $\mathcal{D}$ – cạnh ngăn cản việc c là một phép 1 – tô màu thực sự. Bằng cách đặt $c(a_i) = c(x_1) = 1$ và $c(b_i) = c(x_2) = 2$, chúng ta dễ dàng chứng minh được rằng c là một phép 2 – tô màu thực sự.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử rằng $c(a_i) = c(b_i)$ với mọi $i \in [t-2]$.

Khi đó, các $\mathcal{D}$ – cạnh trong U sẽ buộc các màu này phải phân biệt nhau với mọi i và các $\mathcal{D}$ – cạnh trong T cùng với $\{x_1, x_2\}$ sẽ yêu cầu thêm các màu bổ sung cho x_1 và x_2 . Điều này sẽ buộc phép tô màu c phải sử dụng t màu và là một phép tô màu thực sự. $\square$

Để mở rộng phép xây dựng này đến sắc số dưới s , chúng ta sẽ sử dụng một bộ đề cơ bản liên quan đến phép tổ hợp của các tập khả dĩ. **Hợp của hai siêu đồ thị hỗn hợp** $\mathcal{H}_1 = (X_1, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1)$ và $\mathcal{H}_2 = (X_2, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}_2)$ với các **tập đỉnh rời nhau** được định nghĩa là một siêu đồ thị $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với $X = X_1 \cup X_2, \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2,$

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup R$ trong đó R là tập tất cả các cặp đỉnh bao gồm một đỉnh nằm trong X_1 và một đỉnh nằm trong X_2 .

Kết quả 8.10.3.

Nếu $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ là hai siêu đồ thị hỗn hợp thì tập khả dĩ của hợp của $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ chính là $\{i + j : i \in S(\mathcal{H}_1), j \in S(\mathcal{H}_2)\}$.

Chứng minh kết quả 8.10.3.

Nhận thấy rằng các $\mathcal{D}$ – cạnh được thêm vào giữa các tập đỉnh của $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ ngăn cấm các màu xuất hiện đồng thời trong cả hai tập này. Do đó, mọi phép tô màu thực sự của hợp của các phép tô màu thực sự của các siêu đồ thị $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ đều sử dụng các tập màu rời nhau. $\square$

Hợp $\mathcal{H}'$ của một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với một đỉnh $z \notin X$ bất kỳ được gọi là một **phép chuyển dịch sơ cấp trong sắc phổ của $\mathcal{H}$** . Hiển nhiên, phép chuyển dịch sơ cấp chính là kết quả khi chúng ta dịch chuyển sắc phổ sang phải một đơn vị cho tất cả các thành phần dương và bổ sung thêm phần tử 0 ở vị trí trên cùng bên trái. Điều này có nghĩa là nếu $R(\mathcal{H}) = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ thì $R(\mathcal{H}') = (0, r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Kết quả 8.10.4.

Nếu $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị hỗn hợp s – colorable với khoảng trống tại điểm $t-1$ thì $n \geq 2t - s$.

Chứng minh kết quả 8.10.4.

Xét một phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}$ sử dụng k màu, trong đó k là phần tử nhỏ nhất của tập khả dĩ lớn hơn $t-1$. 1. Nếu $n < 2t - s$ thì việc sử dụng ít nhất t màu sẽ yêu cầu phải có ít nhất $s+1$ lớp màu có kích thước bằng 1. Hai lớp màu như vậy có thể được kết hợp lại với nhau để thu được một phép tô màu thực sự mới sử dụng $k-1$

màu trừ khi chúng tạo thành một $\mathcal{D}$ – cạnh có kích thước bằng 2. Do $k - 1$ không nằm trong tập khả dĩ nên $\mathcal{H}$ sẽ phải chứa K_{s+1} . Như vậy, $\mathcal{H}$ không thể là s – colorable. Điều mâu thuẫn này chỉ ra rằng $n \geq 2t - s$.

Với $s = 2$, Kết quả 8.10.2) chỉ ra rằng Phép xây dựng thứ nhất là hoàn toàn chặt. Với $s > 2$, kí hiệu $\mathcal{H}_{s,t}$ là hợp của K_{s-2} và $\mathcal{H}_{2,t-s+2}$. Từ Kết quả 8.10.3), tập khả dĩ của $\mathcal{H}_{s,t}$ là $\{s - 2\} + \{2, t - s + 2\} = \{s, t\}$. Như vậy, số các đỉnh nằm trong $\mathcal{H}_{s,t}$ sẽ là $s - 2 + 2(t - s + 2) - 2 = 2t - s$. $\square$

Kết quả 8.10.5.

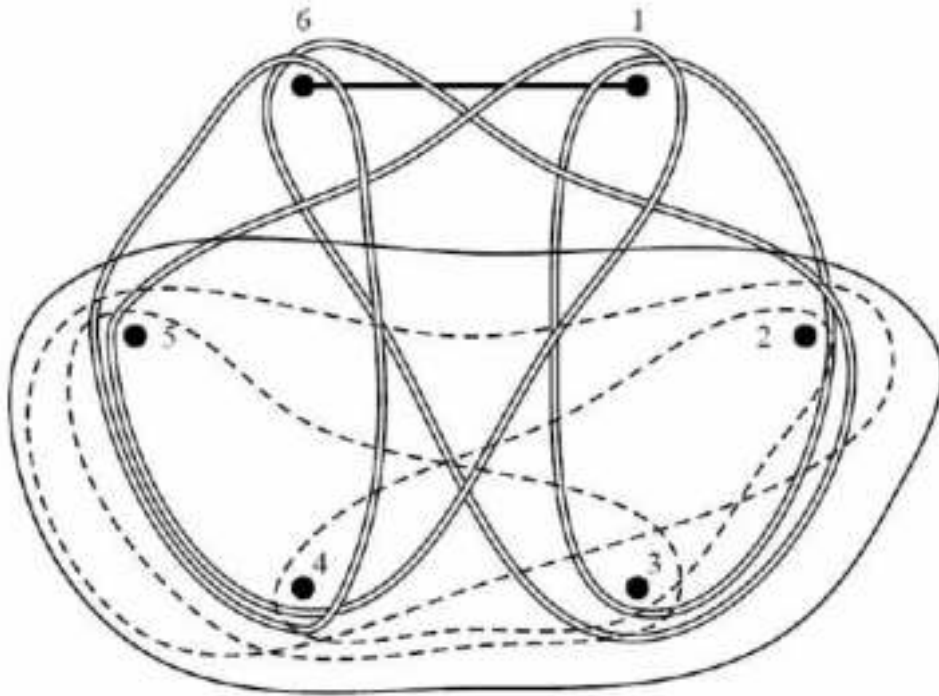
$\mathcal{H}_{2,4}$ là siêu đồ thị hỗn hợp có số đỉnh nhỏ nhất và bằng 6 trong số tất cả các siêu đồ thị hỗn hợp có khoảng trống trong tập khả dĩ của nó.

Chứng minh kết quả 8.10.5.

Nhận thấy rằng mọi siêu đồ thị hỗn hợp có khoảng trống trong tập khả dĩ của nó đều là một siêu đồ thị hỗn hợp s – colorable có khoảng trống tại điểm $t - 1$ với $t - 1 > s \geq 2$ (lưu ý rằng $s \geq 2$, trường hợp ngược lại chúng ta sẽ không thể khoảng trống trong tập khả dĩ). Như vậy, $t \geq 4$ và $t - s \geq 2$. Từ Kết quả 8.10.4), $n \geq t + (t - s) \geq 6$. $\square$

Như chúng ta đã đề cập từ trước đó, phép phân tích kỹ hơn sẽ cho phép chúng ta có thể loại bỏ một $\mathcal{C}$ – cạnh ra khỏi ví dụ 6 – đỉnh mà không làm thay đổi sắc phổ của nó. Như vậy, chúng ta chỉ cần khảo sát các 6 $\mathcal{C}$ – cạnh và 7 $\mathcal{C}$ – cạnh là đủ. Siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}_{2,4}$ sẽ có cấu trúc như sau: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\},$

$\{1, 4, 5\}, \{6, 2, 3\}, \{6, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{1, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{6, 2, 3\}, \{6, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$. Các tập con $\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{6, 2, 3\}, \{6, 4, 5\}$ đều là các bi – cạnh.



Hình vẽ minh họa siêu đồ thị hỗn hợp tối tiểu có khoảng trống trong sắc phổ $\mathcal{H}_{2,4}$.

Chúng ta có thể dễ dàng chứng minh được rằng có bốn phép 2 – tô màu nghiêm ngặt là 112122, 112212, 212121, 212211 và một phép 4 – tô màu nghiêm ngặt 122334 (các dãy sắp thứ tự đều được tính theo thứ tự

đỉnh 1,2,3,4,5,6). Do đó, chúng ta có thể dễ dàng suy ra được sắc phổ $R(\mathcal{H}_{2,4}) = (0,4,0,1,0,0)$ và đa thức sắc số $P(\mathcal{H}_{2,4}, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 10)$.

Như vậy, $\mathcal{H}_{2,4}$ là siêu đồ thị hỗn hợp nhỏ nhất trong số tất cả các siêu đồ thị hỗn hợp có khoảng trống trong tập khả dĩ của nó: việc loại bỏ bất kỳ một đỉnh hoặc một cạnh thuộc bất kỳ loại nào cũng đều sẽ loại bỏ khoảng trống ra khỏi tập khả dĩ của nó. Như chúng ta đã đề cập trong Kết quả 8.10.5), nếu một siêu đồ thị hỗn hợp có chứa ít hơn sáu đỉnh thì sẽ không thể có khoảng trống trong sắc phổ của nó. Tuy nhiên, chúng ta sẽ nhận thấy rằng thậm chí $\mathcal{H}_{2,4}$ cũng không phải là tối tiểu nếu xét theo tổng số cạnh.

Các tập khả dĩ và thuật toán doubling – shifting.

Việc tồn tại những khoảng trống trong sắc phổ đặt ra cho chúng ta bài toán: “Tìm điều kiện để một tập các số nguyên dương cho trước là một tập khả dĩ của một siêu đồ thị hỗn hợp nào đó?”. Trong mục con này của bài viết, chúng ta sẽ mô tả một số tính chất đặc trưng cơ bản của các tập khả dĩ và đề xuất một thuật toán đơn giản để tạo ra một siêu đồ thị hỗn hợp nhận một tập cho trước làm tập khả dĩ của nó.

Hiển nhiên, siêu đồ thị hỗn hợp n – đỉnh tầm thường $(X, \emptyset, \emptyset)$ có tập khả dĩ là $\{1, 2, \dots, n\}$. Chúng ta sẽ xây dựng các siêu đồ thị hỗn hợp nhận các tập cho trước khác làm tập khả dĩ của nó bằng cách sử dụng các siêu đồ thị hỗn hợp tầm thường n – đỉnh nêu trên, phép toán hợp nêu trong Kết quả 8.10.3 và một phép toán bổ sung khác. Phép toán này hoạt động tương tự như cách chúng ta xây dựng $\mathcal{H}_{2,t}$ từ K_t . Trong phép xây dựng thứ nhất, việc mở rộng hai trong số các đỉnh chỉ để nhằm mục đích tránh để tạo ra ít đỉnh hơn. Do đây là một phép xây dựng rất lớn nên chúng ta sẽ thích sự đơn giản có được bằng cách mở rộng tất cả các đỉnh thành từng cặp một.

Phép xây dựng thứ hai: Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$. Chúng ta xây dựng một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}' = (X', \mathcal{C}', \mathcal{D}')$ với $X' = \bigcup_{v \in X} \{v^-, v^+\}$. Với mỗi cạnh $D \in \mathcal{D}$, chúng ta bổ sung thêm $D' = \bigcup_{v \in D} \{v^-, v^+\}$ vào $\mathcal{D}'$. Với mỗi cạnh $C \in \mathcal{C}$, chúng ta bổ sung thêm $C' = \{v^- : v \in C\}$ vào $\mathcal{C}'$. Cuối cùng, với mỗi cặp sắp thứ tự $u, v \in X$, chúng ta bổ sung thêm các bộ ba $\{v^-, v^+, u^-\}$ và $\{v^-, v^+, u^+\}$ vào $\mathcal{C}'$.

Phép xây dựng thứ hai này thường được gọi là **phép nhân đôi**. Nó có tác dụng chính là bổ sung lại phần tử 2 vào tập khả dĩ S . Đây chính xác là những gì mà phép xây dựng thứ nhất đã làm với K_t và phân tích trình bày thêm ở đây cũng chính là dạng tổng quát hóa của Kết quả 8.10.2).

Kết quả 8.10.6.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ với tập khả dĩ S .

Khi đó, nếu $\chi(\mathcal{H}) \geq 2$ thì siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}'$ thu được từ $\mathcal{H}$ qua phép xây dựng thứ hai sẽ có tập khả dĩ là $S \cup \{2\}$.

Chứng minh kết quả 8.10.6.

Xét một phép tô màu thực sự c của $\mathcal{H}'$. Nếu $c(v^-) \neq c(v^+)$ với một đỉnh v nào đó của $\mathcal{H}$ thì các $\mathcal{C}$ – cạnh là các bộ ba có v^- và v^+ sẽ buộc tất cả các đỉnh khác phải được tô bởi màu $c(v^-)$ hoặc $c(v^+)$. Như vậy, một phép tô màu như vậy sẽ chỉ sử dụng chính xác hai màu. Chúng ta nhận được một phép 2 – tô màu nghiêm ngặt bằng cách đặt $c(u^-) = c(v^-)$ và $c(u^+) = c(v^+)$ với mọi u . Do mỗi thành viên của $\mathcal{D}'$ đều bao gồm đầy đủ các cặp nên các ràng buộc trên các $\mathcal{D}$ – cạnh đều được thỏa mãn. Ngoài ra, mỗi thành viên của $\mathcal{C}'$ đều có chứa hai đỉnh với các chỉ số thuộc cùng một loại.

Phần còn lại của phép chứng minh, chúng ta sẽ xem xét các phép tô màu thực sự sao cho $c(v^-) = c(v^+)$ với mỗi đỉnh v của $\mathcal{H}$. Xét một phép tô màu $\tilde{c}$ của $\mathcal{H}$ xác định bởi công thức $\tilde{c}(v) = c(v^-)$. Với mỗi thành viên của $\mathcal{D}'$, điều kiện ràng buộc được thỏa mãn bởi phép tô màu c nếu và chỉ nếu phép tô màu $\tilde{c}$ cũng thỏa mãn điều kiện ràng buộc ứng với phần tử tương ứng của $\mathcal{D}$. Khẳng định tương tự cũng đúng cho các thành viên của $\mathcal{C}'$ sinh ra từ các thành viên của $\mathcal{C}$. Từ cách định nghĩa của phép xây dựng thứ hai, các điều kiện ràng buộc đối với các bộ ba mới xuất hiện trong $\mathcal{C}'$ đương nhiên sẽ tự động được thỏa mãn. Như vậy, c là một phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}'$ nếu và chỉ nếu $\tilde{c}$ là một phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}$. Lưu ý rằng, phép tô màu $\tilde{c}$ sử dụng cùng một số màu như phép tô màu c .

Lập luận tương tự, chúng ta có thể mở rộng mỗi phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}$ thành một phép tô màu thực sự của $\mathcal{H}'$ sử dụng cùng một số màu bằng cách sao chép màu của mỗi đỉnh vào cả hai bản sao của nó. Điều này ngụ ý rằng mọi số nguyên dương lớn hơn 2 đều là khả dĩ đối với $\mathcal{H}$ nếu và chỉ nếu nó là khả dĩ đối với $\mathcal{H}'$. $\square$

Kết quả 8.10.7.

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ là siêu đồ thị hỗn hợp thu được từ $\mathcal{H}$ qua phép xây dựng thứ hai và $R(\mathcal{H}) = (0, \dots, 0, r_{\chi}, \dots, r_{\bar{\chi}}, 0, \dots, 0)$.

Khi đó, $R(\mathcal{H}') = (0, r_2(\mathcal{H}'), 0, \dots, 0, r_{\chi}, \dots, r_{\bar{\chi}}, 0, \dots, 0)$.

Chứng minh kết quả 8.10.7.

Nhận thấy rằng phép chứng minh của Kết quả 8.10.6) thiết lập một song ánh giữa các phép tô màu nghiêm ngặt của $\mathcal{H}$ với ít nhất ba màu và các phép tô màu nghiêm ngặt của $\mathcal{H}'$ với ít nhất ba màu. Số các phần tử 0 nằm ở phía bên phải của sắc phổ $R(\mathcal{H}')$ luôn lớn hơn $n(\mathcal{H})$ bởi vì $n(\mathcal{H}') = 2n(\mathcal{H})$. $\square$

Bằng cách sử dụng các phép shifting liên kết với các clique và các phép nhân đôi, chúng ta hoàn toàn có thể tạo ra tất cả các tập khả dĩ:

Kết quả 8.10.8. (Jiang)

Một tập hữu hạn các số nguyên dương là tập khả dĩ của một siêu đồ thị hỗn hợp nếu và chỉ nếu nó không có chứa phần tử 1 hoặc một khoảng có chứa phần tử 1.

Chứng minh kết quả 8.10.8.

Để đơn giản hóa vấn đề, chúng ta chỉ cần xem xét các tập hợp không có chứa phần tử 1. Chúng ta sẽ xây dựng một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}(T)$ nhận T làm tập khả dĩ tương ứng. Chúng ta sẽ chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp toán học dựa trên kích thước của tập T và, đối với mỗi kích thước như vậy, chúng ta cũng sử dụng một phép quy nạp khác dựa trên phần tử nhỏ nhất t của tập T .

Với $T = \{t\}$, chúng ta đặt $\mathcal{H}(T) = K_t$.

Với $|T| > 1$ và $t = 2$, chúng ta đặt $\mathcal{H}(T)$ là siêu đồ thị hỗn hợp thu được từ $\mathcal{H}(T - \{2\})$ bằng cách áp dụng phép xây dựng thứ hai. Kết quả 8.10.6) chỉ ra rằng điều này là hoàn toàn khả thi.

Với $|T| > 1$ và $t > 2$, chúng ta đặt $\mathcal{H}(T)$ là hợp của K_{t-2} với siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}(T')$ trong đó tập T' nhận được từ T bằng cách trừ đi $t - 2$ đơn vị từ mỗi phần tử của tập T . Kết quả 8.10.3) chỉ ra rằng điều này là hoàn toàn khả thi. $\square$

Kế tiếp, với mọi dãy tăng dần tùy ý các số nguyên dương, chúng ta sẽ trình bày một thuật toán đơn giản để xây dựng một siêu đồ thị hỗn hợp nhận tập tương ứng làm tập khả dĩ.

Thuật toán doubling – shifting

INPUT: Tập $S = \{n_1, n_2, \dots, n_p\}$ gồm các số nguyên dương tăng dần với $n_1 \geq 2$.

OUTPUT: Siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}$ nhận S làm tập khả dĩ.

Bước khởi tạo: $i = n_p - 1, \mathcal{H} = K_3$.

Vòng lặp: Nếu $i \neq 1$ thì:

1. Nếu $i \in S$ thì chúng ta sẽ thực hiện một phép nhân đôi.
2. Nếu $i \notin S$ thì chúng ta sẽ thực hiện một phép chuyển dịch sơ cấp.
3. $i = i - 1$.

Kết thúc thuật toán.

Các bi - siêu đồ thị uniform.

Tất cả các ví dụ được thảo luận cho đến nay đều đại diện cho các siêu đồ thị hỗn hợp với các $\mathcal{C}$ – cạnh và các $\mathcal{D}$ – cạnh có kích thước khác nhau, nghĩa là $\mathcal{H}$ không phải là một siêu đồ thị uniform. Kết quả tiếp theo chỉ ra rằng các bi – siêu đồ thị uniform cũng có thể có các khoảng trống trong sắc phổ của chúng.

Kết quả 8.10.9. (Gionfriddo - Voloshin)

Số đỉnh nhỏ nhất có thể có tính trên tất cả các bi – siêu đồ thị 3 – uniform có khoảng trống trong sắc phổ là 7.

Số cạnh nhỏ nhất có thể có tính trên tất cả các bi – siêu đồ thị 3 – uniform xác định trên 7 đỉnh có khoảng trống trong sắc phổ là 9.

Chứng minh kết quả 8.10.9.

Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh rằng không có bất kỳ một bi - siêu đồ thị 3 – uniform xác định trên 6 đỉnh với sắc phổ bị gián đoạn.

Giả sử cho trước một bi – siêu đồ thị 3 – uniform colorable $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ với $X = \{1, 2, \dots, 6\}$, tất cả các phần tử của $\mathcal{E}$ đều là các bộ ba (các bi – cạnh đều có kích thước bằng 3), $R(\mathcal{H}) = (r_1, r_2, \dots, r_6)$. Giả sử rằng sắc phổ $R(\mathcal{H})$ bị gián đoạn.

Hiển nhiên, $r_1 = 0, r_6 = 0$. Nếu $r_5 \neq 0$ thì, trong mọi phép 5 – tô màu nghiêm ngặt của $\mathcal{H}$, tất cả các bi – cạnh đều có chứa một cặp đỉnh đơn sắc nào đó, tạm giả sử là 1 và 2, và tất cả các lớp màu khác đều là các tập đơn. Các lớp màu này có thể dễ dàng được kết hợp lại với nhau. Do đó, $r_4 \neq 0, r_3 \neq 0, r_2 \neq 0$, mâu thuẫn. Như vậy, $r_5 = 0$. Nếu $r_4 \neq 0$ thì, trong mọi phép 4 – tô màu nghiêm ngặt của $\mathcal{H}$, sẽ có ít nhất hai lớp màu đơn nào đó. Điều này chỉ ra rằng $r_3 \neq 0$, mâu thuẫn. Do đó, không thể có các khoảng trống trong sắc phổ $R(\mathcal{H})$.

Kế tiếp, chúng ta sẽ chỉ ra rằng luôn tồn tại một bi – siêu đồ thị 3 – uniform xác định trên 7 đỉnh có khoảng trống trong sắc phổ. Xét một bi – siêu đồ thị 3 – uniform $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ được xác định như sau: $X = \{1, 2, \dots, 7\}$,

$\mathcal{E} = \{\{1,2,3\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \{1,2,7\}, \{3,4,2\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{3,4,7\}, \{5,6,7\}\}$. Trong mọi phép tô màu thực sự, chỉ có thể có hai khả năng sau cho các đỉnh 1 và 2: $c(1) \neq c(2)$ hoặc $c(1) = c(2)$. Giả sử $\{A, B, C, D, \dots\}$ là tập tất cả các màu đã được sử dụng. Nếu $c(1) = A, c(2) = B$ thì tất cả các đỉnh còn lại đều được tô bởi một màu nào đó nằm trong tập $\{A, B\}$, nghĩa là tất cả các phép tô màu đều là các phép 2 – tô màu. Nếu $c(1) = c(2) = A$ thì $c(3) = c(4) = B$. Do đó, $c(5), c(6), c(7) \in \{C, D\}$, nghĩa là chúng ta có được một phép 4 – tô màu nghiêm ngặt. Như vậy, không tồn tại bất kỳ một phép 3 – tô màu nghiêm ngặt nào. Do đó, $S(\mathcal{H}) = \{2,4\}$ (phép phân tích sâu sắc hơn còn chỉ ra rằng $R(\mathcal{H}) = (0,12,0,3,0,0,0)$ và $P(\mathcal{H}, \lambda) = 3\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 10)$).

Sau cùng, chúng ta sẽ chứng minh rằng 9 là số cạnh nhỏ nhất có thể có của một bi – siêu đồ thị 3 – uniform có khoảng trống trong sắc phổ tính trên tất cả các bi – siêu đồ thị 3 – uniform xác định trên 7 đỉnh. Giả sử cho trước một bi – siêu đồ thị hỗn hợp 3 – uniform $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ với $X = \{1,2, \dots, 7\}$ và $|\mathcal{E}| \leq 8$.

Giả sử $R(\mathcal{H}) = (r_1, r_2, \dots, r_7)$ có chứa ít nhất một khoảng trống nào đó. Chúng ta dễ dàng suy ra được rằng $r_1 = r_7 = 0$. Nếu $r_6 \neq 0$ (tương ứng $r_6 = 0, r_5 \neq 0$) thì sẽ có ít nhất 3 lớp màu nào đó là các tập đơn và chúng có thể dễ dàng được kết hợp lại với nhau để thu được một phép tô màu nghiêm ngặt với 3,4 và 5 màu (tương ứng 3 và 4 màu). Do đó, $R(\mathcal{H})$ không có chứa bất kỳ một khoảng trống nào, mâu thuẫn.

Như vậy, giả sử $r_7 = r_6 = r_5 = 0, r_4 \neq 0$. Nhận thấy rằng, trong một phép 4 – tô màu nghiêm ngặt bất kỳ, nếu số các lớp màu đơn ≥ 2 thì $r_3 \neq 0$, mâu thuẫn. Do đó, chúng ta chỉ cần kiểm tra duy nhất một phép 4 – tô màu (A, A, B, B, C, C, D) là đủ.

Nếu $\{1,2,7\} \notin \mathcal{E}$ (tương ứng $\{3,4,7\} \notin \mathcal{E}, \{5,6,7\} \notin \mathcal{E}$) thì sẽ tồn tại một phép 3 – tô màu (A, A, B, B, C, C, A) (tương ứng $(A, A, B, B, C, C, B), (A, A, B, B, C, C, C)$). Do đó, $r_3 \neq 0$, mâu thuẫn. Như vậy, trong mọi trường hợp, chúng ta đều có $\{1,2,7\}, \{3,4,7\}, \{5,6,7\} \in \mathcal{E}$.

Nhận thấy thêm rằng, trong số các bộ ba còn lại, chỉ có thể có tối đa 5 bộ ba của $\mathcal{H}$ thuộc một trong các họ sau:

123 341 561

124 342 562

125 345 563

126 346 564.

Do các họ trên bao gồm 3 cột nên sẽ có 1 cột nào đó chỉ chứa nhiều nhất một bộ ba của $\mathcal{H}$. Không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể chọn cột đầu tiên và giả sử $\{1,2,3\} \notin \mathcal{E}, \{1,2,4\} \notin \mathcal{E}, \{1,2,5\} \notin \mathcal{E}$. Nếu $\{3,4,1\}, \{3,4,2\} \notin \mathcal{E}$ thì sẽ tồn tại một phép 3 – tô màu: (A, A, A, B, C, C, B) , mâu thuẫn. Như vậy, $\{3,4,5\} \in \mathcal{E}$ hoặc $\{3,4,6\} \in \mathcal{E}$. Nếu $\{5,6,1\} \notin \mathcal{E}$ (tương ứng $\{5,6,2\} \notin \mathcal{E}$) thì sẽ tồn tại một phép 3 – tô màu: (B, A, C, C, B, B, A) (tương ứng (A, B, C, C, B, B, A)), mâu thuẫn. Như vậy, $\{5,6,1\}, \{5,6,2\} \in \mathcal{E}$. Nếu $\{1,2,6\} \in \mathcal{D}$ thì tất cả 8 bi – cạnh của $\mathcal{H}$ đã được vét cạn và chúng ta nhận được một phép 3 – tô màu (A, A, B, B, A, C, C) , hoàn tất phép chứng minh.

Giả sử $\{1,2,6\} \notin \mathcal{E}$. Nếu $\{3,4,1\} \notin \mathcal{E}$ (tương ứng $\{3,4,2\} \notin \mathcal{E}$) thì sẽ tồn tại một phép 3 – tô màu: (A, B, A, A, C, C, B) (tương ứng (B, A, A, A, C, C, B)), mâu thuẫn. Như vậy, $\{3,4,1\}, \{3,4,2\} \in \mathcal{E}$. Do đó, tất cả 8 bi – cạnh của $\mathcal{H}$ cũng đã được vét cạn và chúng ta nhận được một phép 3 – tô màu (A, B, C, C, A, B, B) , hoàn tất phép chứng minh. □

Chúng ta sẽ kết thúc mục con này của bài viết với một số kết quả quan trọng như sau:

Kết quả 8.10.10. (Král')

Nếu $\mathcal{H}$ là một siêu cây hỗn hợp thì sắc phổ của $\mathcal{H}$ là liên tục.

Kết quả 8.10.11. (Král')

Nếu $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị hỗn hợp sao cho mỗi đỉnh đều có bậc bằng 2 thì sắc phổ của $\mathcal{H}$ là liên tục.

Nếu chúng ta lấy đối ngẫu siêu đồ thị hỗn hợp nêu trong khẳng định trên thì đối ngẫu thu được sẽ là một đa đồ thị với hai loại đỉnh: các $\mathcal{C}$ – đỉnh và các $\mathcal{D}$ – đỉnh. Một phép tô màu thực sự bất kỳ của $\mathcal{H}$ sẽ trở thành một phép tô màu cạnh của đa đồ thị tương ứng sao cho mỗi $\mathcal{C}$ – đỉnh đều liên thuộc với hai cạnh được tô bởi cùng một màu và mỗi $\mathcal{D}$ – đỉnh đều liên thuộc với hai cạnh được tô bởi hai màu khác nhau. Chúng ta sẽ gọi một đa đồ thị như vậy là một **đa đồ thị hỗn hợp**. Do đó, khẳng định trên dẫn đến kết luận quan trọng sau:

Kết quả 8.10.12. (Král')

Sắc phổ trong bất kỳ phép tô màu cạnh của bất kỳ một đa đồ thị hỗn hợp nào cũng đều là liên tục.

8.11. Phép tô màu siêu đồ thị khả phẳng

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$. Kí hiệu **họ các cạnh cơ bản của $\mathcal{H}$** bởi $\mathcal{E} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. Chúng ta sẽ đồng ý rằng nếu một tập con các đỉnh là một bi – cạnh thì nó chỉ có thể xuất hiện trong $\mathcal{E}$ đúng một lần. Nhắc lại rằng siêu đồ thị $\mathcal{H}' = (X, \mathcal{E})$ được gọi là **siêu đồ thị cơ bản** của $\mathcal{H}$. Như chúng ta đã đề cập trong **Chủ đề 07. Siêu đồ thị khả phẳng**, một siêu đồ thị $\mathcal{H}'$ là khả phẳng nếu và chỉ nếu biểu diễn lưỡng phân $B(\mathcal{H}')$ của nó là một đồ thị khả phẳng.

Một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ được gọi là **khả phẳng** nếu siêu đồ thị cơ bản $\mathcal{H}' = (X, \mathcal{E})$ là khả phẳng.

Điều này có thể được nhìn nhận lại như sau: chúng ta có thể nhúng $\mathcal{H}'$ vào mặt phẳng và gán nhãn tất cả các cạnh của nó bằng B, C, D một cách hợp lý tùy thuộc vào việc chúng là các bi – cạnh, các $\mathcal{C}$ – cạnh hoặc các $\mathcal{D}$ – cạnh. Nhận thấy rằng, trong mặt phẳng, các $\mathcal{C}$ – cạnh có kích thước bằng 2 đều có thể được thu hẹp lại như mô tả trong thuật toán splitting – contraction và các bi – cạnh có kích thước bằng 2 đều dẫn đến tính uncolorable. Như vậy, nói chung, chúng ta chỉ cần xem xét các siêu đồ thị hỗn hợp reduce là đủ.

Những thảo luận đầu tiên về các phép tô màu của các siêu đồ thị khả phẳng có thể được tìm thấy trong các bài báo của nhà toán học Zykov. Các kết quả chính đạt được trong những thảo luận này có thể được diễn đạt lại bằng ngôn ngữ của các siêu đồ thị hỗn hợp như sau:

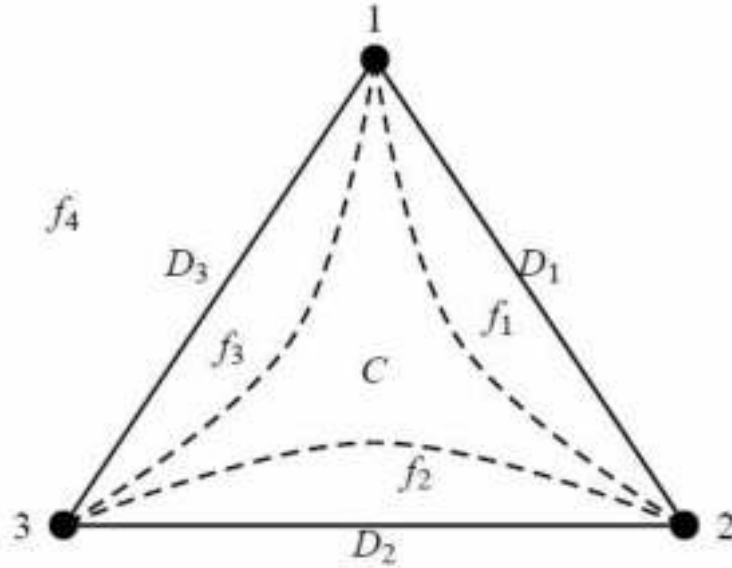
Kết quả 8.11.1. (Bulitco)

Các định lí bốn màu cho các $\mathcal{D}$ – đồ thị khả phẳng và cho các $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị khả phẳng là hoàn toàn tương đương với nhau.

Kết quả 8.11.2. (Burshtein – Kostochka)

Nếu một $\mathcal{D}$ – siêu đồ thị khả phẳng có chứa tối đa một $\mathcal{D}$ – cạnh có kích thước bằng 2 nào đó thì $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Nhận thấy rằng có tồn tại những siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable khả phẳng. Một phép nhúng phẳng của một siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable khả phẳng (reduce) không tầm thường nhỏ nhất $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left(X, \binom{X}{3}, \binom{X}{2}\right)$ với $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{C} = \{C\} = \{\{1, 2, 3\}\}$, $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$, bốn mặt là f_1, f_2, f_3, f_4 như trong hình vẽ bên dưới.



Hình vẽ minh họa siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable khả phẳng reduce nhỏ nhất $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left(X, \binom{X}{3}, \binom{X}{2}\right)$.

Nhận thấy rằng không quá khó để chúng ta có thể mở rộng ví dụ này để thu được một họ vô hạn các siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable khả phẳng. Cho đến nay, cấu trúc tổng quát của các siêu đồ thị hỗn hợp uncolorable khả phẳng vẫn chưa được khám phá một cách đầy đủ. Tuy nhiên, nếu một siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng là colorable thì chúng ta chỉ cần giải quyết một vấn đề duy nhất đó là xác định sắc số trên và dưới của nó. Việc đi tìm sắc số dưới là rất khó bởi vì nếu chúng ta công nhận các $\mathcal{D}$ – cạnh với kích thước bằng 2 thì nó sẽ chứa bài toán về định lý bốn màu như một trường hợp đặc biệt (xem mục **4. 5. Phép tô màu của các đồ thị khả phẳng**). Đối với sắc số trên, trường hợp thú vị đơn giản nhất là các $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị 3 – uniform. Trường hợp này có thể được xem như là một dạng tương tự với bài toán bốn màu theo nghĩa chúng ta sẽ xem xét số màu tối đại hơn là số màu tối tiểu. Tuy nhiên, tình hình trở nên khác khá nhiều so với bài toán bốn màu ở chỗ sắc số trên của một $\mathcal{C}$ – siêu đồ thị 3 – uniform phụ thuộc rất nhiều vào số đỉnh n .

Kế tiếp, chúng ta sẽ xem xét một trường hợp đơn giản nhưng đặc biệt quan trọng của các siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng là các bi – siêu đồ thị 3 – uniform khả phẳng tối đại.

Do mọi mặt của một siêu đồ thị khả phẳng tối đại đều có kích thước bằng 2 nên chúng ta có thể liên kết $\mathcal{H}$ với một đồ thị $G(\mathcal{H})$ xác định trên cùng một tập đỉnh với $\mathcal{H}$ sao cho mọi cạnh nằm trong $\mathcal{H}$ đều sẽ trở thành một mặt của G bằng cách thay thế mỗi mặt trong $\mathcal{H}$ bởi một cạnh trong G . Hơn nữa, do $\mathcal{H}$ là một siêu đồ thị 3 – uniform khả phẳng tối đại nên G sẽ phải là một đồ thị tam giác phân theo nghĩa thông thường (xem mục **3.4. Đồ thị tam giác phân phẳng/ Đồ thị đối ngẫu**). Thông thường, chúng ta sẽ sử dụng cả hai cách kí hiệu H và G thay thế cho nhau và chúng ta sẽ gọi chúng là các bi – tam giác phân bởi vì mọi cạnh của $\mathcal{H}$ đều là một bi – cạnh.

Chúng ta xem xét các phép tô màu của các bi – tam giác phân này. Chúng ta muốn tô màu các đỉnh của đồ thị tam giác phân G sao cho mọi mặt của nó đều có đúng hai đỉnh được tô bởi cùng một màu nào đó.

Chúng ta sẽ gọi một phép tô màu c_1 là một **phép mìn hóa** của một phép tô màu c_2 nếu mọi lớp màu của c_1 đều được chứa trong một lớp màu nào đó của c_2 . Nếu, với mọi lớp màu của phép tô màu c_2 , chúng ta đều xây dựng một đồ thị touch tương ứng (xem mục **8.8. Tính unique colorable**) thì các thành phần liên thông của đồ thị touch tương ứng sẽ đại diện cho tất cả các phép mìn hóa có thể có tiếp theo của c_2 . Chúng ta sẽ gọi một lớp màu của một phép tô màu c là **không thể phân chia** nếu nó là một lớp màu nằm trong mọi phép mìn hóa của phép tô màu c , nghĩa là đồ thị touch tương ứng của nó là một đồ thị liên thông. Nói cách khác, không có cách nào để chúng ta có thể tách các đỉnh của các lớp màu và thu được một phép tô màu thực sự khác. Nếu mọi lớp màu của c đều là không thể phân chia thì c được gọi là một **phép tô màu tối đại**. Lưu ý rằng số màu được sử dụng trong một phép tô màu tối đại không nhất thiết phải bằng $\bar{\chi}$.

Kết quả 8.11.3.

Trong một phép tô màu của một bi – tam giác phân bất kỳ, một lớp màu là không thể phân chia nếu và chỉ nếu nó tạo ra một đồ thị con liên thông tương ứng.

Chứng minh kết quả 8.11.3.

Nhận thấy rằng, trong một tam giác phân bất kỳ, hai đỉnh sẽ nằm trên cùng một mặt nếu và chỉ nếu chúng là hai đỉnh liên hợp với nhau. Do đó, một lớp màu không thể phân chia sẽ phải tạo ra một đồ thị con liên thông: trường hợp ngược lại, chúng ta chỉ cần tô màu lại một thành phần liên thông nào đó là đủ. Ngược lại, nếu một lớp màu tạo ra một đồ thị con liên thông thì chúng ta sẽ không thể tinh chỉnh lớp màu này thêm được nữa, bởi vì việc tô màu lại một tập đỉnh con bất kỳ nào của nó cũng sẽ dẫn đến hai đỉnh liên hợp nhau trong lớp màu cũ nhưng lại nhận được các màu mới phân biệt nhau. Do tất cả các mặt đều có kích thước bằng 3 nên điều này sẽ dẫn đến một mặt đa sắc. $\square$

Đối ngẫu của các đồ thị khả phẳng nêu trong các khẳng định sau đây đều đề cập đến khái niệm đối ngẫu phẳng “đỉnh – mặt” (xem mục **3.4. Đồ thị tam giác phân phẳng/Đồ thị đối ngẫu**). Trên thực tế, với một bi – siêu đồ thị hỗn hợp 3 – uniform khả phẳng tối đại $\mathcal{H}$ (một bi – tam giác phân) bất kỳ, nếu chúng ta xem đồ thị G như là một đối ngẫu “cạnh – mặt” (chúng ta cũng sẽ gọi nó là một bi – tam giác phân) thì chúng ta sẽ thu được đối ngẫu G^* là một đối ngẫu “đỉnh – mặt”. Theo cách này, một phép tô màu thực sự của bi – siêu đồ thị 3 – uniform khả phẳng tối đại $\mathcal{H}$ ban đầu sẽ trở thành một phép tô màu các đỉnh của đồ thị G sao cho mỗi mặt của nó đều có chứa hai đỉnh được tô bởi cùng một màu. Đến lượt mình, nó sẽ trở thành một phép tô màu các mặt của đồ thị G^* sao cho mỗi đỉnh đều nằm trong hai mặt nào đó được tô bởi cùng một màu.

Kết quả 8.11.4. (Kündgen)

Tồn tại một phép tương ứng 1-1 giữa các phép k – tô màu của một bi – tam giác phân G và các phép k – tô màu mặt của các 2 – nhân tử trong đối ngẫu G^* của nó. Điều này có nghĩa là một phép tô màu c_1 của G sẽ là một phép mìn hóa của một phép tô màu c_2 nếu và chỉ nếu các 2 – nhân tử tương ứng với chúng đồng nhất với nhau và phép tô màu mặt tương ứng với c_1 là một phép mìn hóa của phép tô màu mặt tương ứng với c_2 .

Chứng minh kết quả 8.11.4.

Ý tưởng chính của phép chứng minh được đề xuất bởi Penaud là người mà về cơ bản đã chỉ ra rằng tồn tại một phép tương ứng 1-1 giữa các phép 2 – tô màu của G và các 2 – nhân tử của G^* .

Nhận thấy rằng một 2 – nhân tử bất kỳ của G chỉ đơn giản là một tập hợp các đường cong Jordan khép kín, nên nó sẽ phân hoạch mặt phẳng thành các miền và nó cũng sẽ phân hoạch tập đỉnh $V(G)$ thành các tập không rỗng nào đó. Như vậy, mọi phép tô màu mặt thực sự của 2 – nhân tử này bởi k màu đều sẽ tương ứng với một phép k – tô màu nào đó của $V(G)$. Trên thực tế, một phép tô màu như vậy chính là một phép k – tô màu của bi – tam giác phân G , bởi vì nó xuất phát từ một phép tô màu mặt thực sự sao cho mọi mặt của G đều được tô bởi chính xác hai màu nào đó.

Ngược lại, với mọi phép k – tô màu cho trước, chúng ta luôn có thể khôi phục lại 2 – nhân tử và phép tô màu mặt tương ứng của nó. Do trong mọi mặt của G đều có chứa đúng hai đỉnh được tô bởi cùng một màu nên chúng ta sẽ nhận được một đồ thị con khung 2 – regular của G^* , nghĩa là một 2 – nhân tử của G^* (điều này có thể thu được bằng cách lấy đối ngẫu cạnh cho mọi cạnh nằm trong G liên thuộc với các đỉnh được tô bởi các màu khác nhau). Kế tiếp, nếu có hai đỉnh nào đó nằm trong cùng một miền (được tạo ra bởi 2 – nhân tử) thì sẽ tồn tại một đường cong nối giữa chúng và nó chỉ đi qua các đỉnh trong miền này. Khi đó, các đỉnh liên tiếp nằm trên đường cong này sẽ phải nằm trên cùng một mặt. Do đó, chúng phải liên hợp với nhau. Nhận thấy rằng các cạnh nối các đỉnh này không thể là đối ngẫu của bất kỳ một cạnh nào trong 2 – nhân tử: trường hợp ngược lại, chúng sẽ nằm trong các miền khác nhau (**Định lý Jordan**). Từ cách định nghĩa của các 2 – nhân tử, chúng ta dễ dàng suy ra rằng các đỉnh nằm liên tiếp trên đường cong này phải được tô bởi cùng một màu. Do đó, mọi đỉnh nằm trong cùng một miền nhất định đều phải được tô bởi cùng một màu. Do mọi miền của một 2 – nhân tử bất kỳ đều phải chứa ít nhất một đỉnh nào đó nên chúng ta có thể xác định được duy nhất một phép tô màu các miền và phép k – tô màu này cũng là một phép tô màu thực sự (điều này suy ra từ việc các mặt tách ra khỏi nhau bởi các đối ngẫu cạnh và do đó các mặt liên hợp với nhau sẽ phải chứa các đỉnh liên hợp được tô bởi các màu khác nhau).

Với phần thứ hai của khẳng định trên, dễ dàng nhận thấy rằng một phép mìn hóa bất kỳ của phép tô màu mặt của đồ thị đối ngẫu rõ ràng sẽ là một phép mìn hóa của phép tô màu của bi – tam giác phân. Giả sử c_1 là một phép mìn hóa của c_2 . Từ cách xây dựng của đối ngẫu 2 – nhân tử, dễ dàng suy ra rằng 2 – nhân tử tương ứng với c_1 sẽ phải chứa 2 – nhân tử tương ứng với c_2 . Do đó, chúng phải hoàn toàn đồng nhất với nhau. Sau cùng, phép tô màu mặt tương ứng với c_1 sẽ phải là một phép mìn hóa của phép tô màu mặt tương ứng với c_2 . $\square$

Như trong mục 4.3. **Đa thức sắc số**, kí hiệu $S(n, k)$ là số Stirling loại hai, nghĩa là số cách phân hoạch một tập hợp gồm n phần tử thành chính xác k tập con không rỗng. Đồng thời, kí hiệu $f_k(G^*)$ là số các 2 – nhân tử của G^* gồm đúng k thành phần (nghĩa là gồm k chu trình rời nhau) và $f(G^*) = \sum_{i \geq 1} f_i(G^*)$ là số các 2 – nhân tử của G^* .

Kết quả 8.11.5.

Mọi phép tô màu của một bi – tam giác phân G bất kỳ đều có thể được tinh chỉnh lại thành một phép tô màu tối đại duy nhất và chỉ có chính xác $f_{k-1}(G^*)$ phép k – tô màu tối đại như vậy của G .

Chứng minh kết quả 8.11.5.

Từ Định lý Jordan, mọi $2 -$ nhân tử cho trước gồm $k - 1$ chu trình phân biệt nhau đều chia mặt phẳng thành k miền. Từ Kết quả 8.11.3), phép tô màu gán các màu khác nhau cho mỗi mặt chính là phép tô màu tối đại duy nhất ứng với $2 -$ nhân tử này (điều này suy ra từ việc các đỉnh nằm trong mỗi miền đều tạo ra một đồ thị con liên thông (như trong phép chứng minh của Kết quả 8.11.3)). Điều này suy ra tính đúng đắn của phần thứ hai của khẳng định. Nhận thấy rằng tất cả các phép mìn hóa của cùng một phép tô màu cho trước nhất định sẽ phải tương ứng với cùng một $2 -$ nhân tử. Do đó, chúng ta cũng dễ dàng suy ra tính đúng đắn của phần thứ nhất của khẳng định. $\square$

Kết quả 8.11.6.

Mọi bi – tam giác phân G đều có chính xác $f(G^*)$ phép $2 -$ tô màu nghiêm ngặt. Tổng quát hơn, các thành phần của sắc phổ $R(G)$ sẽ được xác định bởi công thức $r_k(G) = \sum_{i \geq 1} S(i, k - 1) f_i(G^*)$, $1 \leq k \leq n(G)$ còn đa thức sắc số thì được xác định bởi công thức $P(\mathcal{H}, \lambda) = \sum_{i \geq 1} f_i(G^*) \lambda(\lambda - 1)^i$.

Chứng minh kết quả 8.11.6.

Tính đúng đắn của khẳng định được suy ra trực tiếp từ cả hai công thức tính tổng bằng cách đặt $k = 2$ hoặc $\lambda = 2$ tương ứng. Với công thức thứ nhất, chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng mọi $2 -$ nhân tử gồm i chu trình đều có thể được tô màu mặt bởi k màu khác nhau theo đúng $S(i, k - 1)$ cách là đủ. Để thấy được tính đúng đắn của nhận định trên, chúng ta hãy tạo ra một đồ thị có các đỉnh là các mặt của đối ngẫu của $2 -$ nhân tử và hai đỉnh sẽ liên hợp với nhau khi và chỉ khi các mặt tương ứng với chúng được tách ra khỏi nhau bởi một $2 -$ nhân tử nào đó. Đồ thị này sẽ là một đồ thị liên thông và có i cạnh. Từ Định lý Jordan, nó sẽ có chính xác $i + 1$ đỉnh. Do đó, nó sẽ phải có dạng một cây T nào đó. Kí hiệu $r_k(T)$ là số các phép $k -$ tô màu thực sự của T . Nhận thấy rằng do $r_1(K_1) = 1$ và $r_k(K_1) = 0$ với mọi $k \geq 2$ nên $r_k(T) = S(e(T), k - 1)$. Bằng cách loại bỏ một đỉnh pendant x bất kỳ khỏi cây T , chúng ta dễ dàng suy ra rằng $r_k(T) = (k - 1)r_k(T - x) + r_{k-1}(T - x)$ (điều này có thể được suy ra dễ dàng bằng một phép quy nạp đơn giản cho các số Stirling tương tự như cách mà chúng ta đã làm đối với Kết quả 4.3.7) và Kết quả 4.3.8). Với công thức thứ hai, nhắc lại rằng đa thức sắc số đối với một cây xác định trên $i + 1$ đỉnh được xác định bởi công thức $\lambda(\lambda - 1)^i$ (Kết quả 4.4.2). $\square$

Kết quả 8.11.7.

Sắc phổ của mọi bi – tam giác phân G đều liên tục. Hơn nữa, $\chi(G) = 2$ và $\bar{\chi}(G) = 1 + \max\{k: f_k(G^*) \geq 1\}$.

Chứng minh kết quả 8.11.7.

Do G^* là một đồ thị $3 -$ regular không có chứa cạnh cầu nên nó sẽ có một $2 -$ nhân tử nào đó (Định lý Petersen). Như vậy, mọi bi – tam giác phân đều sẽ là một $2 -$ colorable (**Kết quả 8.11.8**). Do đó, nó phải có sắc số dưới bằng 2. Nhận thấy rằng do mọi phép tô màu với sắc số trên đều là một phép tô màu tối đại nên chúng ta có thể dễ dàng suy ra giá trị của sắc số trên $\bar{\chi}(G)$ từ Kết quả 8.11.5). Nếu $k = \bar{\chi}(G)$ thì $f_{k-1}(G^*) \geq 1$. Do $S(k - 1, i - 1) \geq 1$ với mọi $2 \leq i \leq k$ nên chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $r_i(G) \geq 1$ trong khoảng này và sắc phổ của nó sẽ phải là liên tục. Hơn nữa, các phép $i -$ tô màu đều có thể thu được từ các phép $i -$ tô màu của cấu cây tương ứng. $\square$

Kết quả 8.11.8.

Mọi siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng không có chứa các cạnh có kích thước bằng 2 đều là $2 -$ colorable.

Chứng minh kết quả 8.11.8.

Không giảm tính tổng quát của vấn đề, giả sử siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng đang xét là một bi – siêu đồ thị tối đại (điều này suy ra từ nhận xét rằng việc bổ sung thêm các $\mathcal{C}$ – cạnh hoặc các $\mathcal{D}$ – cạnh chỉ làm giảm số màu của các phép 2 – tô màu). Tương tự, nếu G có chứa bất kỳ một mặt nào có kích thước lớn hơn 3 thì chúng có thể được chia lại thành các mặt có kích thước bằng 3 bằng cách bổ sung thêm các cạnh để thu được một bi – tam giác phân mới. Tính đúng đắn của khẳng định trên được suy ra trực tiếp từ Kết quả 8.11.7). $\square$

Kết quả 8.11.9.

Mọi siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng unique colorable đều phải có chứa ít nhất một cạnh có kích thước bằng 2.

Chứng minh kết quả 8.11.9.

Giả sử G là một siêu đồ thị khả phẳng unique colorable và không có chứa bất kỳ một cạnh nào có kích thước bằng 2. Một lần nữa, không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử G là một bi – tam giác phân. Từ Kết quả 8.11.7), $\bar{\chi}(G) = 2$. Khi đó, G^* chỉ có duy nhất một 2 – nhân tử nào đó (**Kết quả 8.11.6**), nên G^* cũng chỉ có thể có duy nhất một chu trình Hamiltonian. Tuy nhiên, điều này lại hoàn toàn mâu thuẫn với Kết quả 8.11.10) dưới đây. $\square$

Kết quả 8.11.10. (Thomason – Tutte – Smith)

Với mọi khối lập phương, số các chu trình Hamiltonian cùng đi qua một cạnh cho trước luôn là một số chẵn.

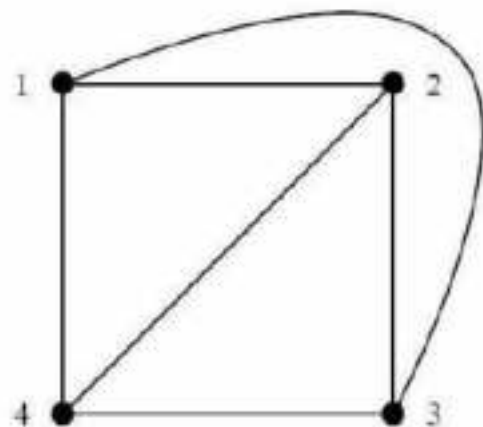
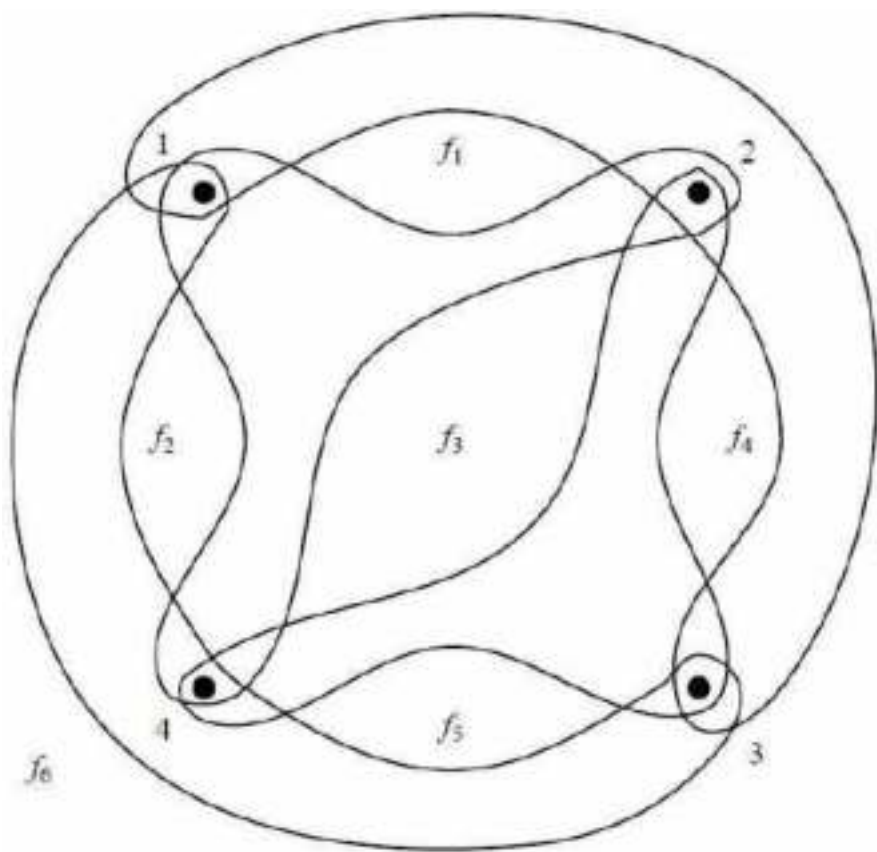
Chứng minh kết quả 8.11.10. (Thomason)

Kí hiệu uv là một cạnh cho trước nào đó. Xét một đồ thị có các đỉnh là các đường đi Hamiltonian bắt đầu tại u và đi qua cạnh uv . Hai đường đi như vậy được xem như là liên hợp với nhau nếu một đường đi nào đó có thể nhận được từ đường đi còn lại bằng cách bổ sung thêm một cạnh ở cuối đường đi và xóa đi một cạnh khác. Tiếp theo, các đỉnh có bậc bằng 1 trong đồ thị này sẽ tương ứng với các chu trình Hamiltonian có đi qua cạnh uv và tất cả các đỉnh còn lại đều có bậc bằng 2. Như vậy, số các chu trình Hamiltonian cùng đi qua cạnh uv sẽ phải là một số chẵn. $\square$

Như đối với các siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng uncolorable, có vô hạn các siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng unique colorable. Chúng ta cũng có thể dễ dàng nhận thấy điều này bằng cách xây dựng một phép nhúng phẳng của một (x, y) – invertor với chiều dài tùy ý để đại diện cho một siêu đồ thị hỗn hợp unique colorable (xem mục **8.8. Tính unique colorable**).

Kết quả 8.11.4) và các Kết quả 8.11.5) – Kết quả 8.11.9) có thể được minh họa lại một cách dễ hiểu trong ví dụ sau đây:

Giả sử $\mathcal{H} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D}) = K_4^3 = \left(X, \binom{X}{3}, \binom{X}{3}\right)$ là một bi – siêu đồ thị 3 – uniform khả phẳng tối đại (nghĩa là một bi – tam giác phân) với $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 1\}, \{4, 1, 2\}\}$ như trong hình vẽ bên dưới.

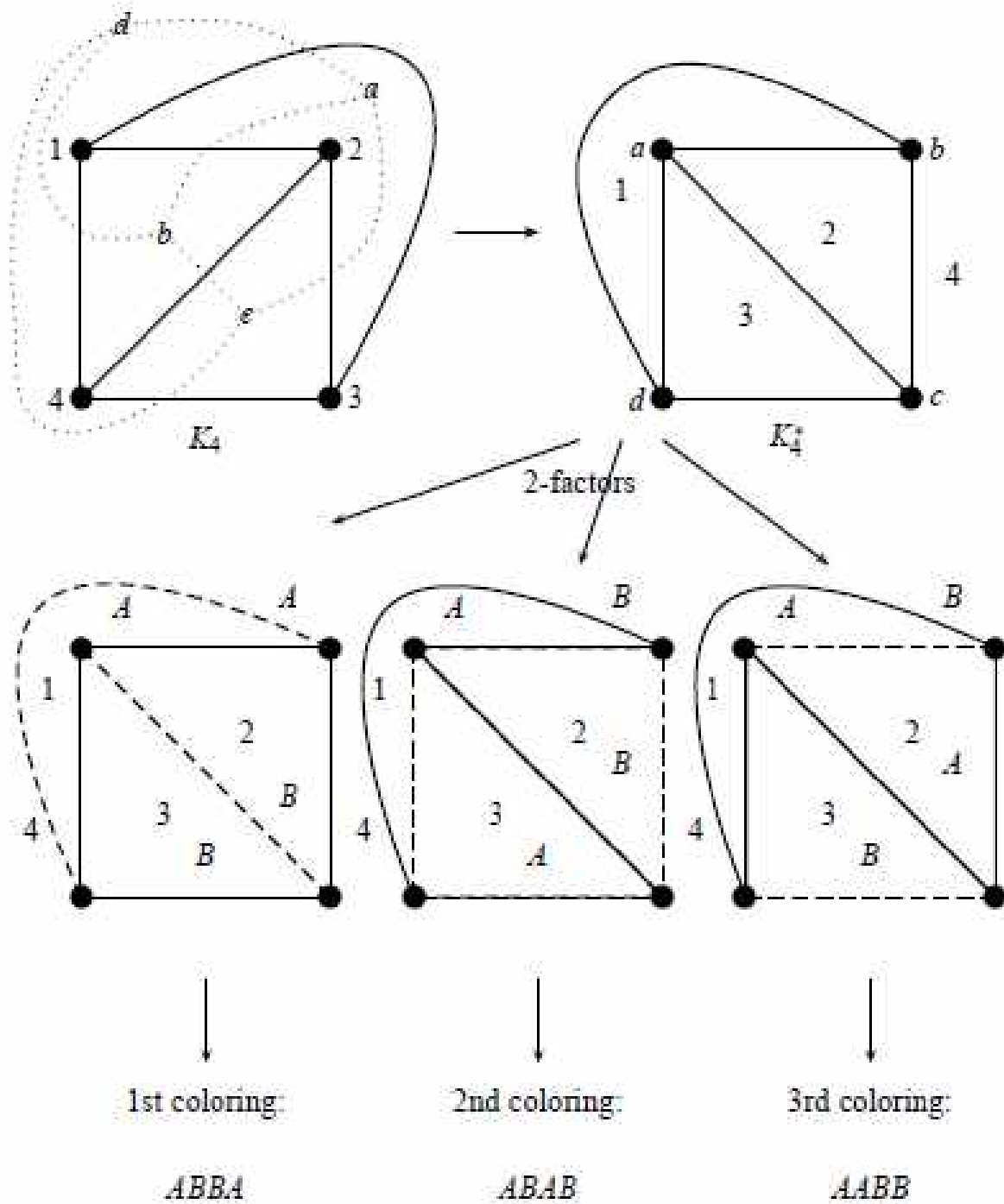


Hình ảnh minh họa siêu đồ thị khả phẳng tối đại K_4^3 và đối ngẫu “mặt – cạnh” K_4 của nó.

Kí hiệu a, b, c, d là bốn mặt nằm trong phép nhúng phẳng của K_4 như trong hình vẽ bên dưới. Đối ngẫu “đỉnh – mặt” K_4^* có đúng ba 2 – nhân tử với một thành phần duy nhất (nghĩa là K_4^* có đúng ba chu trình Hamiltonian). Các cạnh không tham gia vào trong các 2 – nhân tử sẽ được biểu diễn bằng các đường nét đứt. Trong 2 – nhân tử đầu tiên, các mặt 1 và 4 nằm bên ngoài các chu trình và được tô bởi màu A ; các mặt 2 và 3 nằm bên trong các chu trình và được tô bởi màu B . Trong 2 – nhân tử thứ hai, các mặt 1 và 3 nằm bên ngoài các chu trình và được tô bởi màu A ; các mặt 2 và 4 nằm bên trong các chu trình và được tô bởi màu B . Cuối cùng, trong 2 – nhân tử thứ ba, các mặt 1 và 2 nằm bên ngoài các chu trình và được tô bởi màu A ; các mặt 3 và 4 nằm bên trong các chu trình và được tô bởi màu B .

Điều này dẫn chúng ta đi đến kết luận rằng chỉ có ba phép tô màu nghiêm ngặt cho các đỉnh của K_4 và $\mathcal{H}$: $ABBA, ABAB, AABB$ (thứ tự được tính theo dãy thứ tự đỉnh 1,2,3,4).

Như vậy, $\chi(\mathcal{H}) = \bar{\chi}(\mathcal{H}) = 2$, sắc phổ $R(\mathcal{H}) = (0,3,0,0)$ và đa thức sắc số $P(\mathcal{H}, \lambda) = 3\lambda(\lambda - 1)$.



Hình vẽ minh họa.

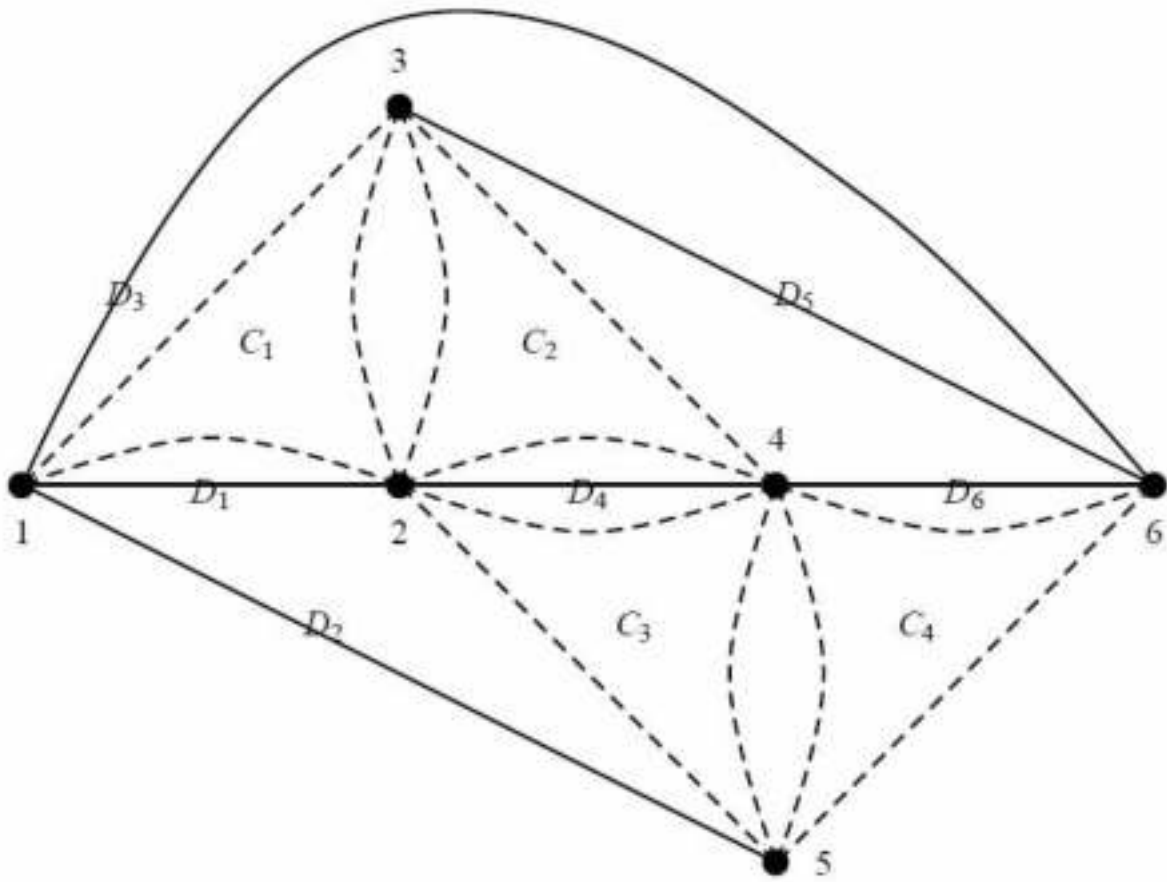
Các siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng có khoảng trống trong sắc phổ của chúng được giới thiệu lần đầu tiên bởi hai nhà toán học Kobler và Kündgen:

Kết quả 8.11.11. (Kobler – Kündgen)

Giả sử cho trước một siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}'_{2,4} = (X, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ với $X = \{1, 2, \dots, 6\}$, $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_4\} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$, $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_6\} = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}\}$.

Khi đó, $\mathcal{H}'_{2,4}$ là một siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng với tập khả dĩ là $S(\mathcal{H}'_{2,4}) = \{2, 4\}$.

Chứng minh kết quả 8.11.11.



Hình vẽ minh họa một phép nhúng phẳng của siêu đồ thị khả phẳng có khoảng trống trong sắc phổ $\mathcal{H}'_{2,4}$.

Giả sử c là một phép tô màu nghiêm ngặt bất kỳ của $\mathcal{H}'_{2,4}$. Nếu $c(2) \neq c(3)$ thì các màu còn lại đều không thể tránh được và chúng ta thu được phép 2 – tô màu nghiêm ngặt $\{1,3,4\} \cup \{2,5,6\}$. Nếu $c(2) = c(3)$ thì

$c(4) = c(5)$ và $c(2) \neq c(4)$. Điều này dẫn chúng ta đến phép 4 – tô màu nghiêm ngặt $\{1\} \cup \{2,3\} \cup \{4,5\} \cup \{6\}$. Chúng ta cũng có thể dễ dàng nhận thấy rằng những phân hoạch khả dĩ này đều là duy nhất. $\square$

Như vậy, chúng ta cũng dễ dàng tính được $R(\mathcal{H}'_{2,4}) = (0,1,0,1,0,0)$ và $P(\mathcal{H}'_{2,4}, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 7)$.

Kết quả 8.11.12. (Kobler – Kündgen)

Một tập không rỗng các số nguyên dương S sẽ là tập khả dĩ của một siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng nào đó nếu và chỉ nếu S là một khoảng có dạng $\{s, s + 1, \dots, t\}$ với $1 \leq s \leq 4$ hoặc có dạng $\{2, 4, 5, \dots, t\}$.

Chứng minh kết quả 8.11.12.

Giả sử cho trước một t – đỉnh $\mathcal{D}$ – đồ thị khả phẳng $G = (X, \mathcal{D})$. Khi đó, chúng ta dễ dàng tính được tập khả dĩ của G sẽ là $S(G) = \{\chi(G), \chi(G) + 1, \dots, t\}$ với $\chi(G) \leq 4$. Điều này chỉ ra tính đúng đắn của chiều thuận của khẳng định trên khi S có dạng là một khoảng. Nếu S có khoảng trống tại 3 thì chúng ta xét siêu đồ thị hỗn hợp thu được từ $\mathcal{H}'_{2,4}$ bằng cách đặt thêm các đỉnh $\{7, \dots, t + 2\}$ vào trong miền có chứa các đỉnh 2 và 3. Khi đó, chúng ta sẽ thu được các $\mathcal{C}$ – cạnh là $\{\{2, 3, 7\}, \{2, 3, 8\}, \dots, \{2, 3, t + 2\}\}$. Nếu chúng ta có được một phép 2 – tô màu trên $\mathcal{H}'_{2,4}$ thì phép tô màu này sẽ được mở rộng thành một phép 2 – tô màu của đồ thị lớn hơn. Hơn nữa, kể từ các phép 4 – tô màu, chúng ta sẽ luôn có được tất cả các giá trị khác trong tập khả dĩ.

Phần còn lại của phép chứng minh, chúng ta chỉ cần kiểm chứng lại tính đúng đắn của chiều đảo của khẳng định trên là đủ. Xét một siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng $\mathcal{H}$ với tập khả dĩ $S \neq \emptyset$. Nếu $1 \in S$ thì hiển nhiên S sẽ có dạng là một khoảng nào đó. Giả sử c là một phép t – tô màu nghiêm ngặt của $\mathcal{H}$ với t là giá trị lớn nhất nằm trong S . Chúng ta sẽ xây dựng một siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng $\mathcal{H}'$ sao cho $\{4, 5, \dots, t\} \subset S(\mathcal{H}') \subset S$. Khi đó, từ cách chọn của chỉ số t , chúng ta dễ dàng suy ra được S có dạng như đã nêu trong khẳng định trên.

Siêu đồ thị $\mathcal{H}'$ sẽ được chọn sao cho nó có cùng một tập đỉnh với $\mathcal{H}$. Chúng ta sẽ cố gắng để giữ nguyên mọi cạnh có kích thước bằng 2 của $\mathcal{H}$ và do $\mathcal{H}$ là colorable nên chúng sẽ phải là các $\mathcal{C}$ – cạnh hoặc các $\mathcal{D}$ – cạnh. Kế tiếp, chúng ta hãy xem xét tất cả các cạnh có chứa ≥ 3 đỉnh. Nếu miền tương ứng là một $\mathcal{C}$ – cạnh thì nó sẽ có chứa các đỉnh u, v sao cho $c(u) = c(v)$. Chúng ta sẽ thay thế miền này bởi $\mathcal{C}$ – cạnh $\{u, v\}$. Nếu miền tương ứng là một $\mathcal{D}$ – cạnh thì nó sẽ có chứa các đỉnh u, v sao cho $c(u) \neq c(v)$. Chúng ta sẽ thay thế miền này bởi $\mathcal{D}$ – cạnh $\{u, v\}$. Nếu miền tương ứng là một bi – cạnh thì nó sẽ có chứa các đỉnh u, v, w sao cho $c(u) = c(v) \neq c(w)$. Chúng ta sẽ thay thế miền này bởi $\mathcal{C}$ – cạnh và $\mathcal{D}$ – cạnh. Siêu đồ thị hỗn hợp $\mathcal{H}'$ mà chúng ta thu được là khả phẳng và cũng nhận c làm một phép t – tô màu nghiêm ngặt. Hơn nữa, do việc thu được $\mathcal{H}'$ từ $\mathcal{H}$ không làm thay đổi các điều kiện ràng buộc trên phép tô màu nên mọi phép tô màu của $\mathcal{H}'$ cũng đều là một phép tô màu của $\mathcal{H}$.

Như vậy, chúng ta có được một siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng có tất cả các cạnh ($\mathcal{C}$ – hoặc $\mathcal{D}$ –) đều có kích thước bằng 2. Bằng cách thu hẹp mọi $\mathcal{C}$ – cạnh, chúng ta thu được một $\mathcal{D}$ – đồ thị khả phẳng không có chứa cạnh khuyên G . Dễ dàng nhận thấy rằng có một phép tương ứng 1-1 giữa các phép tô màu nghiêm ngặt của G và các phép tô màu nghiêm ngặt của $\mathcal{H}'$. Do $S(G) = \{\chi(G), \chi(G) + 1, \dots, t\}$ nên chúng ta dễ dàng suy ra rằng $\{4, 5, \dots, t\} \subset S(\mathcal{H}')$. □

Điểm nổi bật đáng chú ý của khẳng định trên nằm ở chỗ nó đã chỉ ra rằng các khoảng trống (nếu có) trong sắc phổ của các siêu đồ thị hỗn hợp khả phẳng có thể chỉ xảy ra tại 3.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Vitaly I. Voloshin, Introduction to Graph Theory, Nova Kroshka Books, ???/2009.
- [2]. Vitaly I. Voloshin, Introduction to Graph and Hypergraph Theory, Nova Kroshka Books, ???/ 2013.