

Chủ đề 06. Lý thuyết Ramsey

Nhận thấy rằng, trong một buổi tiệc gồm sáu người, chúng ta luôn tìm được một nhóm ba người nào đó sao cho tất cả đều quen biết nhau hoặc tất cả đều là những người xa lạ với nhau. Nếu các cạnh của đồ thị đầy đủ xác định trên một tập vô hạn N được tô bởi màu đỏ và xanh thì chúng ta cũng sẽ tìm được một tập vô hạn $M \subset N$ sao cho tất cả các cạnh nối giữa các đỉnh của M đều được tô bởi cùng một màu. Cả hai khẳng định này đều là các trường hợp đặc biệt của một kết quả được Ramsey công bố vào năm 1930. Các kết quả ban đầu của Ramsey đã được mở rộng theo nhiều hướng khác nhau dẫn đến những gì mà ngày nay được gọi là **lý thuyết Ramsey**: một lý thuyết phong phú thể hiện một nguyên lý toán học sâu sắc cho rằng bất kể chúng ta có phân hoạch các đối tượng của một cấu trúc “lớn” thành một “vài” lớp sao cho một trong những lớp này có chứa một hệ thống con “lớn” – một dạng mở rộng đáng kể của nguyên lý chuồng bồ câu. Trong khi nguyên lý chuồng bồ câu của Dirichlet đảm bảo rằng chúng ta có thể tìm được “nhiều” đối tượng trong cùng một lớp mà không có bất kỳ một điều kiện nào về mối liên hệ giữa chúng với nhau; trong lý thuyết Ramsey, chúng ta sẽ tìm kiếm một cấu trúc con “lớn” trong cùng một lớp: chúng ta không chỉ muốn có vô số các cạnh màu đỏ mà chúng ta muốn tất cả các cạnh nối giữa các đỉnh của một tập vô hạn đều có màu đỏ. Chẳng hạn, trong ví dụ đầu tiên, chúng ta không chỉ muốn ba cặp quen biết mà chúng ta muốn ba người quen này tạo thành một “tam giác”, nghĩa là ba người này quen biết nhau từng đôi một.

Kết quả tinh túy đầu tiên của lý thuyết Ramsey xử lý các vấn đề toán học phong phú hơn các cấu trúc đồ thị là định lý van der Waerden, có trước các kết quả của Ramsey, chỉ ra rằng, với mọi k và p cho trước, nếu W là một số nguyên dương đủ lớn và tập gồm W số tự nhiên đầu tiên được phân hoạch thành k lớp bất kỳ thì chúng ta sẽ tìm được một lớp nào đó trong các lớp này có chứa một cấp số cộng nào đó với p số hạng.

Lý thuyết Ramsey là một lĩnh vực tổ hợp rộng lớn và đẹp đẽ, trong đó nhiều kỹ thuật được sử dụng từ nhiều nhánh toán học khác nhau và các kết quả không chỉ quan trọng trong lý thuyết đồ thị và tổ hợp mà còn đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết tập hợp, logic, giải tích, đại số và hình học nữa. Để chứng minh điều này, chúng ta sẽ tạm vượt ra khỏi lý thuyết đồ thị để trình bày một số kết quả nổi bật và sâu sắc bao gồm: định lý Erdős – Rado – dạng mở rộng của định lý Ramsey dạng cơ bản cho trường hợp sử dụng vô hạn màu; định lý Shelah – dạng mở rộng của định lý Hales – Jewett (bản thân định lý Hales – Jewett là một dạng mở rộng của định lý van der Waerden); các định lý của Galvin, Prikry, Hindman xoay quanh các tính chất Ramsey của các dãy vô hạn. Tuy nhiên, tất cả những gì mà chúng ta đang làm không gì nhiều hơn là làm xước mặt của lý thuyết Ramsey hiện đại.

6.1. Định lý Ramsey dạng cơ bản

Chúng ta hãy xem xét các phân hoạch của tập các cạnh của các đồ thị và các siêu đồ thị. Để tạo ra sự thuận tiện, một phân hoạch sẽ được gọi là một **phép tô màu**, nhưng chúng ta cũng nên nhớ rằng một phép tô màu định nghĩa theo cách này không liên quan gì đến khái niệm về các phép tô màu cạnh đã được xem xét trong **Chủ đề 05. Phép tô màu đồ thị**. Các cạnh liên hợp với nhau có thể được tô bởi cùng một màu và, thực tế, mục đích chính của chúng ta ở đây là chỉ ra rằng những đồ thị con lớn với tất cả các cạnh của chúng đều được tô bởi cùng một màu. Trong một phép 2 – tô màu, chúng ta thường chọn màu xanh và màu đỏ; một đồ thị con được gọi là **xanh** (hoặc **đỏ**) nếu tất cả các cạnh nó đều được tô bởi cùng màu xanh (hoặc đỏ).

Như chúng ta sẽ thấy, với mọi số tự nhiên s cho trước, chúng ta luôn có thể tìm được một số nguyên $R(s)$ sao cho nếu $n \geq R(s)$ thì mọi phép tô màu của tập các cạnh của K_n với hai màu xanh và đỏ đều có

chứa một K_s xanh hoặc một K_s đỏ. Khẳng định về một nhóm sáu người thật ra chính là $R(3) = 6$. Để chỉ ra sự tồn tại của $R(s)$ trong trường hợp tổng quát, với mọi s và t , chúng ta định nghĩa **số Ramsey** $R(s, t)$ là số nguyên n nhỏ nhất sao cho mọi phép 2 – tô màu của K_n với hai màu xanh và đỏ đều có chứa một K_s xanh hoặc một K_t đỏ. Hơn nữa, $R(s, t) = \infty$ nếu chúng ta không tìm bất kì số nguyên n sao cho mọi phép 2 – tô màu của K_n với hai màu xanh và đỏ đều có chứa một K_s xanh hoặc một K_t đỏ.

Rõ ràng là $R(s, t) = R(t, s)$, với mọi $s, t \geq 2$, và $R(s, 2) = R(2, s) = s$, bởi vì mọi phép 2 – tô màu của K_n với hai màu xanh và đỏ đều có chứa một cạnh xanh hoặc tất cả các cạnh đều được tô màu đỏ. Kết quả sau đây, được đề xuất bởi Erdős và Szekeres, chỉ ra rằng $R(s, t)$ là hữu hạn với mọi s và t , và đồng thời nó cũng đưa ra một chặn trên cho $R(s, t)$. Mặc dù về mặt định tính, nó chỉ là một trường hợp đặc biệt của định lý ban đầu của Ramsey, nhưng chặn trên mà nó mang lại tốt hơn đáng kể so với kết quả của Ramsey.

Kết quả 6.1.1. (Erdős - Szekeres)

Hàm $R(s, t)$ là hữu hạn với mọi $s, t \geq 2$. Hơn nữa, nếu $s > 2$ và $t > 2$ thì $R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$ và $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$.

Chứng minh kết quả 6.1.1.

Đầu tiên chúng ta sẽ chứng minh $R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$ và $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$, theo sau đó chúng ta cũng sẽ chứng minh được $R(s, t)$ là hữu hạn.

(i) Khi chứng minh $R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$, chúng ta có thể giả sử rằng $R(s - 1, t)$ và $R(s, t - 1)$ là hữu hạn. Kí hiệu $n = R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$ và xét một phép 2 – tô màu các cạnh của K_n với hai màu xanh và đỏ. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng phép 2 – tô màu này có chứa một K_s xanh hoặc một K_t đỏ. Kí hiệu x là một đỉnh bất kỳ của K_n . Do $d(x) = n - 1 = R(s - 1, t) + R(s, t - 1) - 1$ nên chúng ta sẽ tìm được ít nhất $n_1 = R(s - 1, t)$ cạnh màu xanh liên thuộc với x hoặc ít nhất $n_2 = R(s, t - 1)$ cạnh màu đỏ liên thuộc với x . Từ tính đối xứng của bài toán, chúng ta có thể giả định rằng xảy ra trường hợp đầu tiên. Xét đồ thị con K_{n_1} của K_n cảm sinh bởi n_1 đỉnh được nối với x bởi các cạnh màu xanh. Nếu K_{n_1} có chứa K_t đỏ thì bài toán của chúng ta được hoàn tất. Trường hợp ngược lại, từ định nghĩa của $R(s - 1, t)$, đồ thị K_{n_1} sẽ có chứa một K_{s-1} xanh tạo thành một K_s xanh cùng với x .

(ii) Nhận thấy rằng bất đẳng thức $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$ hiển nhiên đúng nếu $s = 2$ hoặc $t = 2$ (trên thực tế, chúng ta đạt được dấu đẳng thức bởi vì $R(s, 2) = R(2, s) = s$). Giả sử $s > 2, t > 2$ và bất đẳng thức $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$ đúng với mọi cặp (s', t') với $2 \leq s' + t' < s + t$. Khi đó, từ bất đẳng thức $R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$, chúng ta sẽ có

$$\begin{aligned} R(s, t) &\leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1) \\ &\leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}. \end{aligned}$$

□

Thông thường, chúng ta thường gọi $R(s) = R(s, s)$ là các **số Ramsey đường chéo** và $R(s, t), s \neq t$, là các **số Ramsey nằm ngoài đường chéo**. Không có gì ngạc nhiên khi số Ramsey đường chéo được quan tâm nhiều nhất và chúng cũng khó ước tính nhất. Nhắc lại rằng một đồ thị là **tầm thường** nếu nó là đầy đủ hoặc

rõ ràng, số Ramsey đường chéo $R(s)$ chính là số nguyên n nhỏ nhất sao cho mọi đồ thị với bậc n đều có chứa một đồ thị con tầm thường với bậc s .

Từ Kết quả 6.1.1), chúng ta nhận thấy rằng $R(s) \leq \binom{2s-2}{s-1} = \frac{2^{2s-2}}{\sqrt{s}}$. Mặc dù phép chứng minh ở trên rất đơn giản, nhưng đánh giá $R(s) \leq \frac{2^{2s-2}}{\sqrt{s}}$ hầu như không được cải thiện gì nhiều trong hơn 50 năm. Cải thiện tốt nhất được đưa ra bởi Thomason vào năm 1988: $R(s) \leq \frac{2^{2s}}{s}$, nếu s đủ lớn. Mặc dù cải thiện này so với $R(s) \leq \frac{2^{2s-2}}{\sqrt{s}}$ là nhỏ, nhưng đây là một kết quả khó nên chúng ta sẽ không trình bày phép chứng minh của kết quả này. Trong **Chủ đề 07. Đồ thị ngẫu nhiên**, chúng ta sẽ thấy rằng $R(s)$ không tăng theo cấp số nhân: $R(s) \geq 2^{s/2}$. Người ta tin rằng có một hằng số c , có lẽ thậm chí là $c = 1$, sao cho $R(s) = 2^{(c+o(1))s}$, nhưng điều này còn rất lâu mới được chứng minh.

Kết quả này có thể dễ dàng mở rộng cho các phép tô màu với số màu hữu hạn bất kỳ: với mọi $k, s_1, s_2, \dots, s_k$ cho trước, nếu n đủ lớn thì mọi phép tô màu của K_n với k màu đều có chứa một K_{s_i} được tô bởi màu thứ i nào đó. (Giá trị n nhỏ nhất như vậy thường được kí hiệu là $R_k(s_1, s_2, \dots, s_k)$) Thật vậy, nếu chúng ta đã chứng minh được điều này cho $k - 1$ màu thì, trong một phép k - tô màu bất kì của K_n , chúng ta sẽ thay thế hai màu đầu tiên bởi một màu mới. Nếu n đủ lớn (điều này phụ thuộc vào độ lớn của các số $s_1, s_2, \dots, s_k$) thì chúng ta sẽ tìm được một K_{s_i} được tô bởi màu thứ i nào đó, $3 \leq i \leq k$, hoặc một K_m ($m = R(s_1, s_2)$) được tô bởi màu mới. Nói cách khác, trong phép tô màu ban đầu, K_m này sẽ được tô bởi hai màu đầu tiên (ban đầu). Trong trường hợp đầu tiên, tính đúng đắn của khẳng định là hiển nhiên và, trong trường hợp thứ hai, chúng ta có thể tìm được một K_{s_i} trong K_m được tô bởi màu thứ i , với $i = 1$ hoặc 2 .

Điều này cho thấy rằng $R_k(s_1, s_2, \dots, s_k) \leq R_{k-1}(R(s_1, s_2), s_3, \dots, s_k)$.

Trên thực tế, Kết quả 6.1.1) cũng có thể được mở rộng cho các siêu đồ thị, nghĩa là cho các phép tô màu của tập $X^{(r)}$ (tập tất cả các r - tập của một tập hữu hạn X) với k màu. Đây cũng là một trong những kết quả được chứng minh bởi chính Ramsey. Kế tiếp, chúng ta sẽ tập trung sự chú ý của chúng ta vào điều này:

Kí hiệu $R^{(r)}(s, t)$ là giá trị n nhỏ nhất sao cho mọi phép 2 - tô màu của $X^{(r)}$ với hai màu xanh và đỏ đều có chứa một s - tập xanh hoặc một t - tập đỏ, với điều kiện $|X| = n$. Tất nhiên, một tập $Y \subset X$ sẽ được gọi là **xanh** (hoặc **đỏ**) nếu mọi phần tử của $Y^{(r)}$ đều được tô màu xanh (hoặc đỏ). Lưu ý rằng $R(s, t) = R^{(2)}(s, t)$. Như trong Kết quả 6.1.1), kết quả tiếp theo đây không chỉ đảm bảo rằng $R^{(r)}(s, t)$ là hữu hạn đối với tất cả các giá trị của các tham số (chắc chắn lúc đầu là không hiển nhiên) mà nó còn đưa ra một chặn trên cho $R^{(r)}(s, t)$. Phép chứng minh của nó gần như là một bản sao chính xác của phép chứng minh của Kết quả 6.1.1). Lưu ý rằng nếu $r > \min\{s, t\}$ thì $R^{(r)}(s, t) = \min\{s, t\}$ và nếu $r = s \leq t$ thì $R^{(r)}(s, t) = t$.

Kết quả 6.1.2.

Giả sử cho trước $1 < r < \min\{s, t\}$.

Khi đó, $R^{(r)}(s, t)$ là hữu hạn và $R^{(r)}(s, t) \leq R^{(r-1)}(R^{(r)}(s-1, t), R^{(r)}(s, t-1)) + 1$.

Chứng minh kết quả 6.1.2.

Nhận thấy rằng cả hai khẳng định trên sẽ được suy ra ngay lập tức nếu chúng ta chứng minh được bất đẳng thức trên với giả định cho rằng $R^{(r-1)}(u, v)$ là hữu hạn với mọi u, v và cả $R^{(r)}(s-1, t)$ và $R^{(r)}(s, t-1)$ đều hữu hạn.

Giả sử cho trước một tập X với $R^{(r-1)}(R^{(r)}(s-1, t), R^{(r)}(s, t-1)) + 1$ phần tử. Với bất kỳ một phép 2 – tô màu c cho trước nào của $X^{(r)}$ với hai màu xanh và đỏ, chọn ra một đỉnh $x \in X$ và xây dựng một phép 2 – tô màu c' của họ các $(r-1)$ – tập của $Y = X - \{x\}$ bằng cách gán cho mỗi $\sigma \in Y^{(r-1)}$ màu của phần tử $\sigma \cup \{x\} \in X^{(r)}$. Từ cách định nghĩa của hàm $R^{(r-1)}(u, v)$, chúng ta có thể giả định rằng Y có chứa một tập con màu xanh Z (đối với c') với $R^{(r)}(s-1, t)$ phần tử.

Kế tiếp, chúng ta hãy xem xét một phép thu hẹp của c trên $Z^{(r)}$. Nếu nó có chứa một t – tập màu đỏ thì phép chứng minh của chúng ta hoàn tất, bởi vì $Z^{(r)} \subset X^{(r)}$ nên một t – tập màu đỏ của Z cũng chắc chắn là một t – tập màu đỏ của X . Mặt khác, nếu Z không có bất kì một t – tập màu đỏ nào thì Z chắc chắn sẽ phải có một $(s-1)$ – tập màu xanh. Hợp của $(s-1)$ – tập màu xanh này cùng với $\{x\}$ sẽ chính là một s – tập màu xanh cần tìm của X , bởi vì $\{x\} \cup \sigma$ có màu đỏ với mọi $\sigma \in Z^{(r-1)}$. $\square$

Dễ dàng nhận thấy rằng Kết quả 6.1.2) và lập luận phân nhóm màu được mô tả sau Kết quả 6.1.1) ngụ ý khẳng định sau: Giả sử cho trước các số r và $s_1, s_2, \dots, s_k$. Khi đó, với $|X|$ đủ lớn, mọi phép tô màu của $X^{(r)}$ với k màu đều có chứa một tập $S_i \subset X$, $|S_i| = s_i$, với một chỉ số i , $1 \leq i \leq k$, sao cho tất cả các r – tập này đều có màu i . Giá trị nhỏ nhất của $|X|$ sao cho điều này xảy ra thường được kí hiệu bởi $R_k^{(r)}(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Do đó, $R^{(r)}(s, t) = R_2^{(r)}(s, t)$ và $R_k(s_1, s_2, \dots, s_k) = R_k^{(2)}(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Chặn trên cho $R_k^{(r)}(s_1, s_2, \dots, s_k)$ được suy ra từ Kết quả 6.1.2) (bởi lập luận phân nhóm màu) không phải là tốt nhất có thể. Bằng cách bắt chước phép chứng minh của Kết quả 6.1.1), chúng ta có thể dễ dàng thu được một chặn trên tốt hơn như sau:

$$R_k^{(r)}(s_1, s_2, \dots, s_k) \leq R_k^{(r-1)}(R_k^{(r)}(s_1-1, s_2, \dots, s_k), \dots, R_k^{(r)}(s_1, \dots, s_{k-1}, s_k-1)) + 1.$$

Có rất ít các số Ramsey tầm thường được biết đến, ngay cả trong trường hợp $r = 2$. Dễ dàng nhận thấy rằng $R(3,3) = 6$ và, với một số tính toán đơn giản, chúng ta có thể dễ dàng chỉ ra rằng $R(3,4) = 9$, $R(3,5) = 14$, $R(3,6) = 18$, $R(3,7) = 23$, $R(4,4) = 18$. Cần nhiều nỗ lực hơn nữa để chúng ta có thể chỉ ra rằng $R(3,8) = 28$, $R(3,9) = 36$. Ngoài ra, vào năm 1995, McKay và Radziszowski đã chứng minh được rằng $R(4,5) = 25$. Đây là những số Ramsey 2 – tô màu duy nhất được biết đến. Đối với những số Ramsey k – tô màu khác, tất cả những gì chúng ta biết được chỉ là các chặn trên của chúng. Phép chứng minh của một số chặn trên này cần một lượng lớn các tính toán khéo léo và thời gian tính toán đáng ngạc nhiên.

1 k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	51 60	59 69	66 78	73 89
4		18	25	35 41	49 61	53 84	69 115	80 149	96 191	106 238	118 291	129 349	134 417
5			43 49	58 87	80 143	95 216	114 316	442					
6				102 165	298	495	780	1171					
7					205 540	1031	1713	2826					
8						1870	282 3583	6090					
9							6625	565 12715					
10								23854	798				

Hình vẽ minh họa các giá trị và chặn trên của một số số Ramsey k – tô màu.

Ngay từ cái nhìn đầu tiên, việc có quá ít ỏi các số Ramsey chính xác có vẻ là một điều đáng ngạc nhiên. Tuy nhiên, có một số lý do khác nhau giải thích cho việc tại sao việc một số Ramsey lớn, chẳng hạn $R(6,6)$, sẽ không bao giờ có thể xác định được: Các phép 2 – tô màu của một đồ thị K_n không có chứa bất kì một đồ thị con đầy đủ đơn sắc nào là không có tính thứ tự: chúng trông như thể là chúng được chọn một cách ngẫu nhiên. Sự rối loạn này làm cho việc áp dụng một lập luận quy nạp đơn giản để đưa ra một chặn trên chính xác cho $R(s, t)$ là một việc không có khả năng. Mặt khác, việc tấn công trực tiếp bởi máy tính cũng chỉ mang lại thất bại, ngay cả đối với $R(5,5)$. Chẳng hạn, nếu chúng ta muốn chứng minh 48 là một chặn trên của $R(5,5)$ thì chúng ta sẽ phải kiểm tra hơn 2^{1000} đồ thị bậc 48: một nhiệm vụ vượt xa khả năng tính toán của máy tính.

Không quá dễ dàng để chúng ta có thể chứng minh một chặn dưới chung cho các số Ramsey. Do các phép tô màu của một đồ thị không có chứa bất kì một đồ thị con đầy đủ đơn sắc nào là không có tính thứ tự nên không có gì đáng ngạc nhiên khi các phương pháp ngẫu nhiên có thể được sử dụng để đưa ra một chặn dưới tốt hơn. Trong **Chủ đề 07. Đồ thị ngẫu nhiên**, chúng ta sẽ đưa ra một số ví dụ điển hình về vấn đề này.

Do rất khó để chúng ta có thể tìm được các ước lượng tốt cho $R(s, t)$ khi $s, t \rightarrow \infty$ nên không có gì đáng ngạc nhiên khi có rất ít các hàm Ramsey tăng trưởng đã được xác định chính xác. Trên thực tế, Erdős và Szekers đã chứng minh được rằng vế phải của đánh giá $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$ nhỏ hơn đúng 1 đơn vị so với giá trị của một hàm Ramsey tự nhiên. Để trình bày kết quả này, chúng ta sẽ giới thiệu một số thuật ngữ sau: Chúng ta sẽ gọi một tập $S \subset \mathbb{R}^2$ là **không suy biến** nếu hai điểm bất kỳ của nó đều có tọa độ x khác nhau. Một **k – cup** (hoặc một **k – tập lõm**) là một tập không suy biến gồm k đỉnh có dạng $\{(x_i, h(x_i)) : i = 1, \dots, k\}$, trong đó h là một hàm lồi. Kí hiệu $s(p, p') = (y - y')/(x - x')$ là **hệ số góc của đường thẳng đi qua các điểm $p = (x, y)$ và $p' = (x', y')$** . Khi đó, nếu $K = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ với $p_i = (x_i, y_i)$, $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, thì K là một k – cup nếu và chỉ nếu $s(p_1, p_2) \leq s(p_2, p_3) \leq \dots \leq s(p_{k-1}, p_k)$. Một **l – cap** (hoặc một **l – tập lõm**) được định nghĩa theo cách tương tự.

Kết quả tuyệt vời sau đây được đề xuất bởi Erdős và Szekeres về các k – cup và các l – cap. Phần thứ nhất được công bố vào năm 1935, phần thứ hai vào năm 1960.

Kết quả 6.1.3. (Erdős – Szekeres)

Với mọi $k, l \geq 2$, mọi tập không suy biến gồm $\binom{k+l-4}{k-2} + 1$ điểm đều có chứa một k – cup hoặc một l – cap. Hơn nữa, với mọi $k, l \geq 2$, luôn tồn tại một tập không suy biến $S_{k,l}$ gồm $\binom{k+l-4}{k-2}$ không có chứa bất kì một k – cup hoặc một l – cap nào.

Chứng minh kết quả 6.1.3.

Để thuận tiện, chúng ta sẽ dùng $\phi(k, l)$ để kí hiệu cho hệ số nhị thức $\binom{k+l-4}{k-2}$.

(i) Chúng ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học theo $k + l$ rằng mọi tập không suy biến gồm $\phi(k, l) + 1$ điểm đều có chứa một k – cup hoặc một l – cap. Do mọi tập không suy biến gồm 2 điểm luôn là một 2 – cup và một 2 – cap nên tính đúng đắn của khẳng định này là hiển nhiên nếu $\min\{k, l\} = 2$, bởi vì $\phi(k, 2) = \phi(2, l) = 1$ với mọi chỉ số $k, l \geq 2$. Giả sử $k, l \geq 3$ và khẳng định đã được chứng minh cho mọi giá trị nhỏ hơn của $k + l$. Kí hiệu S là một tập không suy biến gồm $\phi(k, l) + 1$ điểm và giả sử phản chứng rằng S không có chứa bất kì một k – cup hoặc một l – cap nào. Kí hiệu $L \subset S$ là tập các điểm cuối của các $(k - 1)$ – cup. Khi đó, S/L sẽ không có chứa bất kì một $(k - 1)$ – cup hoặc một l – cap nào. Từ giả thiết quy nạp của bài toán, $|S/L| \leq \phi(k - 1, l)$. Như vậy, $|L| \geq \phi(k, l) + 1 - \phi(k - 1, l) = \phi(k, l - 1) + 1$. Từ giả thiết quy nạp của bài toán, L sẽ có chứa một $(l - 1)$ – cap với q_1 là điểm đầu tiên, tạm giả sử là $\{q_1, q_2, \dots, q_{l-1}\}$. Do $q_1 \in L$ nên chúng ta sẽ tìm được một $(k - 1)$ – cup có dạng $\{p_1, p_2, \dots, p_{k-1} = q_1\}$. Kế tiếp, nếu $s(p_{k-2}, p_{k-1}) \leq s(p_{k-1}, q_2)$ thì $\{p_1, \dots, p_{k-1}, q_2\}$ sẽ là một k – cup. Trường hợp ngược lại, $s(p_{k-2}, q_1) > s(q_1, q_2)$, nên $\{p_{k-2}, q_1, \dots, q_{l-1}\}$ sẽ là một l – cap. Điều này hoàn toàn mâu thuẫn với giả thiết quy nạp của bài toán.

(ii) Chúng ta sẽ xây dựng quy nạp các tập $S_{k,l}$ theo chỉ số $k + l$. Trên thực tế, chúng ta sẽ xây dựng các tập $S_{k,l}$ dưới dạng $\{(i, y_i): 1 \leq i \leq \phi(k, l)\}$.

Nếu $\min\{k, l\} = 2$ thì $\phi(k, l) = 1$ và chúng ta có thể chọn $S_{k,l} = \{(1, 0)\}$. Giả sử $k, l \geq 3$ và chúng ta đã xây dựng được các tập $S_{k,l}$ cho mọi giá trị nhỏ hơn của $k + l$. Kí hiệu $Y = S_{k-1,l}, Z = S_{k,l-1}, m = \phi(k - 1, l), n = \phi(k, l - 1)$. Khi đó, $Y = \{(i, y_i): 1 \leq i \leq m\}$ sẽ không có chứa bất kì một $(k - 1)$ – cup hoặc một l – cap nào và $Z = \{(i, z_i): 1 \leq i \leq n\}$ cũng sẽ không có chứa bất kì một k – cup hoặc một $(l - 1)$ – cap nào.

Với mọi $\varepsilon > 0$, kí hiệu $Y^{(\varepsilon)} = \{(i, \varepsilon y_i): 1 \leq i \leq m\}$ và $Z^{(\varepsilon)} = \{(m + i, m + \varepsilon z_i): 1 \leq i \leq n\}$. Kế tiếp, nếu $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ thì mọi đường thẳng đi qua hai điểm bất kì của $Y^{(\varepsilon)}$ sẽ nằm hoàn toàn bên dưới tập $Z^{(\varepsilon)}$ và mọi đường thẳng đi qua hai điểm bất kì của $Z^{(\varepsilon)}$ sẽ nằm hoàn toàn bên trên tập $Y^{(\varepsilon)}$. Như vậy, trong trường hợp này, mọi cup có giao với $Z^{(\varepsilon)}$ tại ít nhất hai điểm hoàn toàn nằm trong $Z^{(\varepsilon)}$ và mọi cap có giao với $Y^{(\varepsilon)}$ tại ít nhất hai điểm hoàn toàn nằm trong $Y^{(\varepsilon)}$. Nhưng khi đó chúng ta có thể chọn $S_{k,l} = Y^{(\varepsilon)} \cup Z^{(\varepsilon)}$, bởi vì nó tiếp tục không có chứa bất kì một k – cup hoặc một l – cap nào. $\square$

Như một hệ quả tất yếu của Kết quả 6.1.3), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng mọi tập gồm $\binom{2k-4}{k-2} + 1$ điểm trong mặt phẳng nằm ở vị trí tổng quát đều có chứa các đỉnh của một k – giác lồi nào đó. Năm 1935, Erdős và Szekeres đưa ra phỏng đoán rằng, trên thực tế, mọi tập gồm $2^{k-2} + 1$ điểm trong mặt phẳng nằm ở vị trí tổng quát đều có chứa các đỉnh của một k – giác lồi nào đó. Có vẻ như phỏng đoán này sẽ không được

chứng minh trong một tương lai gần, nhưng chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng nếu đúng thì phỏng đoán này sẽ là tốt nhất có thể.

Sau sự chuyển hướng ngắn ngủi này, chúng ta hãy quay trở lại với các siêu đồ thị. Kết quả 6.1.2) ngụ ý rằng mọi phép 2 – tô màu của các r – tập của tập các số tự nhiên với hai màu xanh và đỏ đều có chứa các tập con đơn sắc lớn tùy ý; một tập con được gọi là **đơn sắc** nếu tất cả các r – tập của nó đều được tô bởi cùng một màu. Ramsey đã chứng minh được rằng, trên thực tế, chúng ta có thể tìm được một **tập đơn sắc vô hạn**.

Kết quả 6.1.4. (Ramsey)

Giả sử cho trước một số nguyên $1 \leq r < \infty$ và một phép k – tô màu $c: A^{(r)} \rightarrow [k] = \{1, 2, \dots, k\}$ của các r – tập của một tập vô hạn A .

Khi đó, A sẽ có chứa một tập đơn sắc vô hạn nào đó.

Chứng minh kết quả 6.1.4.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số r . Lưu ý rằng tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên nếu $r = 1$, nên, không giảm tính tổng quát của vấn đề, chúng ta có thể giả sử $r > 1$ và khẳng định đã được chứng minh cho các giá trị nhỏ hơn của r .

Kí hiệu $A_0 = A$ và chọn ra một phần tử $x_1 \in A_0$ bất kì. Như trong phép chứng minh của Kết quả 6.1.2), chúng ta sẽ xây dựng một phép k – tô màu $c_1: B_1^{(r-1)} \rightarrow [k]$ của các $(r-1)$ – tập của $B_1 = A_0 - \{x_1\}$ bằng cách đặt $c_1(\tau) = c(\tau \cup \{x_1\})$, với mọi $\tau \in B_1^{(r-1)}$. Từ giả thiết quy nạp của bài toán, B_1 sẽ có chứa một tập vô hạn A_1 sao cho tất cả các $(r-1)$ – tập của nó đều được tô bởi cùng một màu, tạm giả sử là d_1 , $d_1 \in \{1, 2, \dots, k\}$. Kế tiếp, chọn ra một phần tử $x_2 \in A_1$, kí hiệu $B_2 = A_1 - \{x_2\}$, chúng ta sẽ xây dựng một phép k – tô màu $c_2: B_2^{(r-1)} \rightarrow [k]$ bằng cách đặt $c_2(\tau) = c(\tau \cup \{x_2\})$, $\tau \in B_2^{(r-1)}$. Khi đó, B_2 sẽ có chứa một tập vô hạn A_2 sao cho tất cả các $(r-1)$ – tập của nó đều được tô bởi cùng một màu, tạm giả sử là d_2 . Bằng cách tiếp tục thực hiện quá trình xây dựng này, chúng ta sẽ thu được một dãy vô hạn các phần tử $x_1, x_2, \dots$, một dãy vô hạn các màu $d_1, d_2, \dots$, một dãy vô hạn các tập lồng nhau $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ sao cho $x_i \in A_{i-1}$ và, với mọi $i = 0, 1, \dots$, tất cả các r – tập mà phần tử duy nhất nằm bên ngoài A_i là x_i đều được tô bởi cùng một màu d_i . Dãy vô hạn $(d_n)_{n=1}^\infty$ sẽ phải nhận một giá trị d nào đó trong số k giá trị $1, 2, \dots, k$ vô hạn lần, nghĩa là $d = d_{n_1} = d_{n_2} = \dots$. Khi đó, từ cách xây dựng, mọi r – tập của tập vô hạn $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}$ đều được tô bởi màu d . □

Trong một số trường hợp, việc áp dụng phiên bản sau đây của Kết quả 6.1.4) sẽ thuận tiện hơn. Như thường lệ, chúng ta sẽ dùng $\mathbb{N}$ để kí hiệu cho tập các số tự nhiên.

Kết quả 6.1.5.

Với mỗi $r \in \mathbb{N}$, chúng ta tô màu tập $\mathbb{N}^{(r)}$ (tập gồm các r – tập của $\mathbb{N}$) bởi k_r màu, trong đó $k_r \in \mathbb{N}$.

Khi đó, chúng ta sẽ tìm được một tập vô hạn $M \subset \mathbb{N}$ sao cho, với mọi r , hai r – t bất kì của M đều được tô bởi cùng một màu, với điều kiện là các phần tử tối thiểu của chúng không nhỏ hơn phần tử thứ r của M .

Chứng minh kết quả 6.1.5.

Kí hiệu $M_0 = \mathbb{N}$. Sau khi đã chọn được các tập vô hạn $M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_{r-1}$, kí hiệu M_r là một tập con vô hạn của M_{r-1} sao cho tất cả các r – tập của M_r đều được tô bởi cùng một màu. Bằng cách này, chúng ta sẽ thu được một dãy vô hạn các tập vô hạn lồng nhau $M_0 \supset M_1 \supset \dots$. Chọn $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2 - \{1, \dots, a_1\}, a_3 \in M_3 - \{1, \dots, a_2\}$, v.v... Hiển nhiên, $M = \{a_1, a_2, \dots\}$ sẽ có tất cả các tính chất mà chúng ta cần. $\square$

Điều thú vị ở đây là định lí Ramsey cho các tập vô hạn, Kết quả 6.1.2), cũng ngụ ý một kết quả tương tự cho các tập vô hạn, mặc dù nó không đưa ra bất kì một chặn trên nào cho các số $R^{(r)}(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Để thấy được điều này, tất cả những gì chúng ta cần chỉ là một lập luận compact đơn giản – đây là một trường hợp đặc biệt của định lí Tychonov cho rằng tích của các không gian compact cũng là một không gian compact.

Chúng ta sẽ xây dựng lại công thức này nhưng ở một dạng thuận tiện hơn:

Kết quả 6.1.6.

Giả sử cho trước các số tự nhiên r, k và, với mọi $n \geq 1$, kí hiệu $\mathcal{C}_n$ là một tập không rỗng gồm các phép k – tô màu của $[n]^{(r)}$ sao cho nếu $n < m$ và $c_m \in \mathcal{C}_m$ thì phép thu hẹp $c_m^{(n)}$ của c_m trên $[n]^{(r)}$ sẽ thuộc $\mathcal{C}_n$.

Khi đó, chúng ta sẽ tìm được một phép tô màu $c: \mathbb{N}^{(r)} \rightarrow [k]$ sao cho, với mọi n , phép thu hẹp $c^{(n)}$ của c trên $[n]^{(r)}$ sẽ thuộc $\mathcal{C}_n$.

Chứng minh kết quả 6.1.6.

Với $m > n$, kí hiệu $\mathcal{C}_{n,m}$ là tập các phép tô màu $[n]^{(r)} \rightarrow [k]$ là các phép thu hẹp của các phép tô màu trong $\mathcal{C}_m$. Khi đó, $\mathcal{C}_{n,m+1} \subset \mathcal{C}_{n,m} \subset \mathcal{C}_n$. Như vậy, $\widetilde{\mathcal{C}}_n = \bigcap_{m=n+1}^{\infty} \mathcal{C}_{n,m} \neq \emptyset$ với mọi n , bởi vì mỗi $\mathcal{C}_{n,m}$ đều hữu hạn. Chọn $c_r \in \widetilde{\mathcal{C}}_r, c_{r+1} \in \widetilde{\mathcal{C}}_{r+1}, c_{r+2} \in \widetilde{\mathcal{C}}_{r+2}$, v.v... sao cho mỗi cái đều nằm trong ảnh của cái đứng trước nó: $c_n = c_{n+1}^{(n)}$. Cuối cùng, chúng ta xây dựng một phép tô màu $c: \mathbb{N}^{(r)} \rightarrow [k]$ bằng cách đặt, với $\rho \in \mathbb{N}^{(r)}$, $c(\rho) = c_n(\rho) = c_{n+1}(\rho) = \dots$, trong đó $n = \max \rho$. Phép tô màu c này chính là phép tô màu mà chúng ta cần tìm. $\square$

Chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng Kết quả 6.1.6) cũng ngụ ý sự tồn tại của $R^{(r)}(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Thật vậy, giả sử phản chứng, với mọi n , chúng ta luôn có thể tìm được một phép tô màu $[n]^{(r)} \rightarrow [k]$ sao cho, với mỗi i , không có bất kì một s_i – tập nào mà tất cả các r – tập con của nó đều được tô bởi màu i . Bằng cách dùng $\mathcal{C}_n$ để kí hiệu cho tập tất cả các phép tô màu như vậy, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $\mathcal{C}_n \neq \emptyset$ và $\mathcal{C}_{n,m} \subset \mathcal{C}_n$ với mọi $n < m$, trong đó $\mathcal{C}_{n,m}$ được định nghĩa tương tự như trong phép chứng minh của Kết quả 6.1.6). Nhưng khi đó chúng ta sẽ tìm được một phép tô màu $c: \mathbb{N}^{(r)} \rightarrow [k]$ sao cho mọi tập đơn sắc đều có ít hơn $s = \max s_i$ phần tử, mâu thuẫn với Kết quả 6.1.4).

Để kết thúc phần này của bài viết, chúng ta sẽ chỉ ra một hiện tượng thú vị. Đầu tiên, chúng ta sẽ xem xét một phần mở rộng của một thực tế cho rằng tồn tại $R_k^{(r)}(s_1, s_2, \dots, s_k)$:

Kết quả 6.1.7.

Giả sử cho trước các số nguyên r, k và $s \geq 2$.

Khi đó, nếu n đủ lớn thì, với mọi phép k – tô màu của $[n]^{(r)}$, chúng ta luôn tìm được một tập đơn sắc $S \subset [n]$ sao cho $|S| \geq \max\{s, \min S\}$.

Chứng minh kết quả 6.1.7.

Giả sử phản chứng không tồn tại bất kì một số n nào như vậy, nghĩa là, với mọi n , chúng ta luôn tìm được một phép tô màu $[n]^{(r)} \rightarrow [k]$ không có chứa bất kì một tập đơn sắc nào. Kí hiệu $\mathcal{C}_n$ là tập tất cả các phép tô màu như vậy. Khi đó, $\mathcal{C}_n \neq \emptyset$ và $\mathcal{C}_{n,m} \subset \mathcal{C}_n$ với mọi $n < m$. Nhưng khi đó chúng ta sẽ tìm được một phép tô màu $c: \mathbb{N}^{(r)} \rightarrow [k]$ sao cho phép thu hẹp $c^{(n)}$ của nó trên $[n]^{(r)}$ sẽ nằm trong $\mathcal{C}_n$. Kế tiếp, từ Kết quả 6.1.4), chúng ta sẽ tìm được một tập đơn sắc vô hạn $M \subset \mathbb{N}$. Kí hiệu $m = \min M, t = \max\{m, s\}$, S là tập gồm t phần tử đầu tiên của M . Khi đó, với $n = \max S$, phép tô màu $c^{(n)}$ sẽ có một tập đơn sắc nào đó, tạm giả sử là S . Điều này mâu thuẫn với giả thiết $c^{(n)} \in \mathcal{C}_n$. $\square$

Đây là một kết quả tuyệt vời nhưng cũng không quá bất ngờ. Điều đáng ngạc nhiên và sâu sắc ở đây đó là, được chỉ ra bởi Paris và Harrington vào năm 1977, mặc dù Kết quả 6.1.7) là một khẳng định khá đơn giản liên quan đến các tập hữu hạn nhưng nó không thể được suy ra từ các tiên đề Peano, nghĩa là nó không thể được chứng minh trong lý thuyết về các tập hợp hữu hạn. Nói cách khác, chúng ta thực sự cần đến khái niệm về một tập hữu hạn để chứng minh khẳng định này. Định lí này của Paris và Harrington đã trở thành điểm khởi đầu cho một lĩnh vực toán học mới liên kết các bài toán tổ hợp với các bài toán logic.

Do bài viết này là một tài liệu viết về lý thuyết đồ thị nên chúng ta không thể đi quá sâu vào logic, nghĩa là chúng ta sẽ quay trở lại với các đồ thị. Kí hiệu $R^*(s)$ là số nguyên n nhỏ nhất sao cho, với mọi phép 2 – tô màu của $[n]^{(2)}$, chúng ta luôn có thể tìm được một tập đơn sắc $S \subset [n]$ với $|S| \geq \max\{s, |S|\}$. Như vậy, $R^*(s)$ chính là số nguyên n nhỏ nhất sao cho, với mọi đồ thị G có tập đỉnh xác định trên tập $[n]$, chúng ta luôn có thể tìm được một tập $S \subset [n]$ với $|S| \geq \max\{s, |S|\}$ sao cho $G[S]$ là một đồ thị tầm thường, nghĩa là nó sẽ là một đồ thị rỗng hoặc một đồ thị đầy đủ. Từ Kết quả 6.1.7), chúng ta biết rằng tồn tại $R^*(s)$. Hiển nhiên, $R^*(s) \geq R(s)$ và không có gì quá ngạc nhiên khi $R^*(s)$ có giá trị lớn hơn khá nhiều so với $R(s)$: chúng ta có thể tìm được các hằng số dương c và d sao cho $2^{2^{cs}} < R^*(s) < 2^{2^{ds}}$.

6.2. Định lí Ramsey dạng chuẩn

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Chúng ta có thể nói gì về các phép tô màu của $\mathbb{N}^{(r)}$ với số màu vô hạn? Chúng ta có thể đảm bảo rằng có một tập vô hạn $M \subset \mathbb{N}$ sao cho trên $M^{(r)}$ phép tô màu của chúng ta đặc biệt “đẹp”?”. Năm 1950, thật bất ngờ, Erdős và Rado đã chứng minh được rằng đây chính xác là những gì sẽ xảy ra.

Kí hiệu $M, N, M_1, N_1, \dots$ là các tập vô hạn đếm được và $r, s, \dots$ là các số tự nhiên.

Chúng ta sẽ gọi hai phép tô màu $c_1: N_1^{(r)} \rightarrow C_1$ và $c_2: N_2^{(r)} \rightarrow C_2$ là **tương đương** nếu có một ánh xạ 1 – 1 ϕ từ N_1 lên N_2 sao cho, với mọi $\rho, \rho' \in N_1^{(r)}$, $c_1(\rho) = c_1(\rho')$ nếu và chỉ nếu $c_2(\phi(\rho)) = c_2(\phi(\rho'))$.

Trong một điều kiện lý tưởng, với mọi phép tô màu của $N^{(r)}$ (với số màu bất kỳ), chúng ta sẽ tìm được một tập vô hạn $M \subset N$ mà trên đó phép tô màu của chúng ta sẽ tương đương với một phép tô màu với số màu hữu hạn.

Chúng ta sẽ gọi một phép tô màu $c: N^{(r)} \rightarrow C$ là **irreducible** nếu, với mọi tập con vô hạn N_1 của N , phép thu hẹp c trên $N_1^{(r)}$ tương đương với c . Hơn nữa, chúng ta cũng sẽ gọi một tập $\mathcal{C}$ gồm các phép tô màu $\mathbb{N}^{(r)} \rightarrow \mathbb{N}$ là **không thể tránh khỏi** nếu, với mọi phép tô màu c của $\mathbb{N}^{(r)}$, chúng ta luôn có thể tìm được một tập vô hạn $M \subset \mathbb{N}$ sao cho phép thu hẹp của c trên $M^{(r)}$ sẽ tương đương với một thành viên nào đó của $\mathcal{C}$. Erdős và Rado đã chứng minh rằng, với mọi r , chúng ta luôn có thể tìm được một họ hữu hạn không thể tránh được các phép tô màu irreducible.

Những phép tô màu nào của $\mathbb{N}^{(r)}$ là irreducible? Hai phép xây dựng sau đây xuất hiện ngay trong tâm trí của chúng ta: một phép tô màu đơn sắc – tất cả các r – tập đều được tô bởi cùng một màu; và một phép tô màu hoàn toàn phân biệt – không có hai tập nào được tô bởi cùng một màu. Sau một lúc suy nghĩ, chúng ta có thể tạo ra một số phép tô màu irreducible. Giả sử cho trước $N \subset \mathbb{N}$, $\alpha = \{a_1, \dots, a_r\} \in N^{(r)}$, $a_1 < \dots < a_r$, $S \subset [r] = \{1, \dots, r\}$, $|S| = s$, $\alpha_S = \{a_i: i \in S\}$. Xây dựng một **phép tô màu S – chuẩn tắc** $c_S: N^{(r)} \rightarrow N^{(s)}$ bằng cách đặt $c_S(\alpha) = \alpha_S$. Như vậy, chúng ta đã tô màu các phần tử của $\mathbb{N}^{(r)}$ bởi các s – tập và hai r – tập được tô bởi cùng một màu nếu và chỉ nếu phần tử thứ i của chúng là trùng nhau với mọi $i \in S$ và khác nhau với mọi $i \notin S$. Chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy rằng c_S là một phép tô màu irreducible với mọi $S \subset [r]$; hơn nữa, những phép tô màu này cũng chứa hai phép tô màu irreducible đã được đề cập ở trên: $c_\emptyset$ là một phép tô màu đơn sắc và $c_{[r]}$ là một phép tô màu hoàn toàn phân biệt.

Hiển nhiên, nếu $S \neq S'$ thì các phép tô màu c_S và $c_{S'}$ của $N^{(r)}$ là không tương đương với nhau, nghĩa là $N^{(r)}$ sẽ có ít nhất 2^r phép tô màu irreducible, cụ thể là 2^r phép tô màu chuẩn tắc. Như chúng ta sẽ thấy, không thể có bất kỳ một phép tô màu irreducible nào khác. Ngay từ cái nhìn đầu tiên, điều này có thể khá là ngạc nhiên bởi vì một phép tô màu chuẩn tắc bất kỳ của $N^{(r)}$ sẽ phụ thuộc vào thứ tự của N . Để giải quyết “nghịch lý” này, chúng ta cần lưu ý rằng nếu $\{a_1, a_2, \dots\}$ và $\{b_1, b_2, \dots\}$ là hai phép liệt kê khác nhau của N thì chúng ta sẽ tìm được các dãy con $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots$ và $b_{l_1}, b_{l_2}, \dots$, $k_1 < k_2 < \dots$, $l_1 < l_2 < \dots$ sao cho $a_{k_i} = b_{l_i}$ với mọi i .

Trước khi xem xét các kết quả, chúng ta sẽ giới thiệu một khái niệm tương tự như khái niệm về sự tương đương của các phép tô màu, nhưng có tính đến thứ tự trên tập cơ bản. Giả sử cho trước $c: \mathbb{N}^{(r)} \rightarrow C$ và $T, U \in \mathbb{N}^{(t)}$ với một chỉ số $t \geq r$ nào đó. Hơn nữa, kí hiệu $\phi: T \rightarrow U$ là ánh xạ bảo toàn thứ tự duy nhất từ T lên U . Các tập T và U được gọi là **có cùng mẫu (đối với c)** nếu, với mọi $\rho, \rho' \in T^{(r)}$, chúng ta sẽ có $c(\rho) = c(\rho')$ nếu và chỉ nếu $c(\phi(\rho)) = c(\phi(\rho'))$. Lưu ý rằng số các mẫu của các t – bộ chính là số các phân hoạch của $\binom{t}{r}$ đối tượng có thể phân biệt được; hiển nhiên, $\binom{t}{r}^{(t)}$ là một chặn trên thô cho số này.

Sau tất cả những sự chuẩn bị này, chúng ta sẽ chứng minh định lý chuẩn tắc của Erdős – Rado cho các đồ thị, nghĩa là $r = 2$. Lưu ý rằng, với mọi tập vô hạn $N \subset \mathbb{N}$, chúng ta luôn có thể tìm được bốn phép tô màu chuẩn tắc của $N^{(2)}$. Trong phép tô màu ϕ – chuẩn tắc, tất cả các cạnh đều được tô bởi cùng một màu; trong phép tô màu $\{1, 2\}$ – chuẩn tắc, tất cả các cạnh đều có màu riêng biệt; trong phép tô màu $\{1\}$ – chuẩn tắc, hai cạnh sẽ được tô bởi cùng một màu nếu và chỉ nếu đỉnh đầu tiên của chúng trùng với nhau; trong phép tô

màu $\{2\}$ – chuẩn tắc, hai cạnh sẽ được tô bởi cùng một màu nếu và chỉ nếu đỉnh thứ hai của chúng trùng với nhau.

Kết quả 6.2.1. (Erdős – Rado)

Với mọi phép tô màu $c: \mathbb{N}^{(2)} \rightarrow \mathbb{N}$, chúng ta luôn có thể tìm được một tập con vô hạn M của $\mathbb{N}$ sao cho phép thu hẹp của c trên $M^{(2)}$ là chuẩn tắc.

Chứng minh kết quả 6.2.1.

Do chỉ có nhiều nhất hữu hạn các mẫu cho các phép tô màu của $[4]^{(2)}$ nên chúng ta có thể áp dụng định lý Ramsey cho các tập vô hạn và thu được một tập vô hạn $M \subset \mathbb{N}$ sao cho tất cả các 4 – tập của M đều có cùng mẫu π . Chúng ta sẽ chứng minh tập M này sẽ làm được điều đó.

Kí hiệu $M = \{m_1, m_2, \dots\}$, trong đó $m_1 < m_2 < \dots$. Do tất cả các 4 – tập đều có cùng một mẫu nên, với hai cạnh $m_i m_j$ và $m_k m_l$ bất kì, các màu $c(m_i m_j)$ và $c(m_k m_l)$ sẽ trùng nhau hoặc không, tùy theo vị trí tương đối của các cặp ij và kl trong tập $\{i, j, k, l\}$. Chẳng hạn, 25 và 57 có cùng vị trí tương đối với 36 và 67; tương tự, 38 và 46 có cùng vị trí tương đối với 29 và 78.

Sau tất cả những nhận xét này, chúng ta sẽ chứng minh rằng phép thu hẹp của c trên $M^{(2)}$ là chuẩn tắc. Với một chút lạm dụng kí hiệu, từ bây giờ, chúng ta sẽ chỉ dùng c để kí hiệu cho phép thu hẹp của c trên $M^{(2)}$. Chúng ta có thể giả sử rằng $c \neq c_{\{1,2\}}$, nghĩa là $M^{(2)}$ có hai cạnh nào đó được tô bởi cùng một màu: tạm giả sử là $c(m_i m_j) = c(m_k m_l)$, trong đó $m_i \notin \{m_j, m_k\}$. Lưu ý rằng chúng ta sẽ không (và không thể) giả sử $i < j$ hoặc $i > j$. Nhưng khi đó $c(m_{2i} m_{2j}) = c(m_{2k} m_{2l}) = c(m_{2i+1} m_{2j})$ nên $M^{(2)}$ sẽ có hai cạnh liên hợp được tô bởi cùng một màu. Chúng ta sẽ phân biệt ba trường hợp sau tùy theo vị trí của các cạnh liên hợp này và xem chúng ta có thể suy ra được những điều gì:

(i) Đầu tiên, giả sử rằng $c(m_i m_j) = c(m_i m_k)$ với một số chỉ số $i < j < k$. Khi đó, bằng cách xem xét 4 – tập $\{m_i, m_j, m_k, m_{k+1}\}$, chúng ta thấy rằng, trong mẫu π , các cạnh 12 và 13 được tô bởi cùng một màu. Nhưng khi đó hai cạnh bất kì có cùng đỉnh đầu tiên sẽ được tô bởi cùng một màu, bởi vì nếu $r < s < t$ thì phép thu hẹp của c trên $\{m_r, m_s, m_t, m_{t+1}\}^{(2)}$ cho thấy rằng $c(m_r m_s) = c(m_r m_t)$. Điều này có nghĩa là chúng ta sẽ tìm được một ánh xạ $d: M \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho, với $r < s$, chúng ta sẽ có $c(m_r m_s) = d(m_r)$.

(ii) Kế tiếp, giả sử rằng $c(m_i m_k) = c(m_j m_k)$ với một số chỉ số $i < j < k$. Khi đó, bằng cách lập luận tương tự, chúng ta sẽ tìm được một ánh xạ $e: M \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho, với $r < s$, chúng ta sẽ có $c(m_r m_s) = e(m_s)$.

(iii) Cuối cùng, giả sử rằng $c(m_i m_j) = c(m_j m_k)$ với một số chỉ số $i < j < k$. Khi đó, $c(m_r m_s) = c(m_s m_t)$, với mọi $r < s < t$. Do đó, $c(m_1 m_3) = c(m_3 m_5) = c(m_2 m_3) = c(m_3 m_4)$, nghĩa là chúng ta sẽ tìm được các cạnh nào đó được tô bởi cùng một màu và có cùng đỉnh thứ hai. Như vậy, chúng ta sẽ tìm được các ánh xạ $d: M \rightarrow \mathbb{N}$ và $e: M \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho, với $i < j$, chúng ta sẽ có $c(m_i m_j) = d(m_i) = e(m_j)$. Nhưng khi đó hai cạnh bất kì của $M^{(2)}$ sẽ được tô bởi cùng một màu, nghĩa là $c = c_\emptyset$.

Những gì chúng ta đã thấy cho đến nay là nếu (iii) xảy ra thì tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Trên thực tế, chúng ta cũng rất dễ dàng để hoàn thành phép chứng minh khi trường hợp (iii) không

xảy ra. Thật vậy, nếu (i) đúng nhưng (iii) không thì $d(m_i) \neq d(m_j)$ với mọi $i \neq j$, nghĩa là $c = c_{\{1\}}$; nếu (ii) đúng nhưng (iii) không thì $e(m_i) \neq e(m_j)$ với mọi $i \neq j$, nghĩa là $c = c_{\{2\}}$. $\square$

Khi nó xảy ra, phép chứng minh của định lý chuẩn tắc Erdős – Rado dạng đầy đủ hầu như không phức tạp gì hơn cách chứng minh nêu ở trên:

Kết quả 6.2.2. (Erdős – Rado)

Giả sử cho trước một số nguyên dương r và một phép tô màu $c: \mathbb{N}^{(r)} \rightarrow \mathbb{N}$.

Khi đó, chúng ta sẽ tìm được một tập con vô hạn M của $\mathbb{N}$ sao cho phép thu hẹp của c trên $M^{(r)}$ là chuẩn tắc.

Chứng minh kết quả 6.2.2.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số r . Với $r = 1$, tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Giả sử $r \geq 2$ và khẳng định đã được chứng minh với các giá trị nhỏ hơn của r . Giả sử cho trước một phép tô màu $c: \mathbb{N}^{(r)} \rightarrow \mathbb{N}$, tô màu mỗi $T \in \mathbb{N}^{(2r)}$ với mẫu của phép thu hẹp của c trên $T^{(r)}$. Do chỉ có hữu hạn các mẫu nên chúng ta sẽ tìm được một tập vô hạn $N \subset \mathbb{N}$ sao cho tất cả các $2r$ – tập con của N đều có cùng một mẫu π nào đó. Để đơn giản hóa cách kí hiệu, chúng ta sẽ giả định rằng $N = \mathbb{N}$: tất cả khoản này là một phép gán nhãn lại thích hợp.

Nếu không có bất kì hai r – tập con nào của N đều có cùng một màu thì tính đúng đắn của khẳng định là hiển nhiên: $c = c_{[r]}$. Như vậy, chúng ta có thể giả định rằng $c(\rho) = c(\sigma)$ với $\rho, \sigma \in N^{(r)}, \rho \neq \sigma$; tạm giả sử $\rho = \{a_1, \dots, a_r\}$ và $\sigma = \{b_1, \dots, b_r\}$, trong đó $a_1 < \dots < a_r$ và $b_1 < \dots < b_r$. Do $\rho \neq \sigma$ nên chúng ta sẽ tìm được một phần tử $b_i \in \sigma/\rho$. Lưu ý rằng tất cả các tập $\rho_0 = \{2a_1, 2a_2, \dots, 2a_r\}$, $\sigma_1 = \{2b_1, 2b_2, \dots, 2b_r\}$ và $\sigma_2 = \{2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{i-1}, 2b_i - 1, 2b_{i+1}, \dots, 2b_r\}$ đều được tô bởi cùng một màu. Thật vậy, $|\rho_0 \cup \sigma_1| = |\rho_0 \cup \sigma_2| = u$. Do đó, chúng ta có thể tìm được các tập $T_1, T_2 \in N^{(2r)}$ sao cho $\rho_0 \cup \sigma_1$ là tập gồm u phần tử đầu tiên của T_1 và $\rho_0 \cup \sigma_2$ là tập gồm u phần tử đầu tiên của T_2 . Do $T_1^{(r)}$ có mẫu π nên chúng ta sẽ có $c(\rho_0) = c(\sigma_1)$, và do $T_2^{(r)}$ có mẫu π nên chúng ta sẽ có $c(\rho_0) = c(\sigma_2)$.

Kế tiếp, do σ_1 và σ_2 được tô bởi cùng một màu nên hai r – tập con bất kì của N chỉ khác nhau ở vị trí thứ i cũng sẽ được tô bởi cùng một màu: nếu $\tau, \tau' \in N^{(r)}$ và $\tau_{[r]-\{i\}} = \tau'_{[r]-\{i\}}$ thì $c(\tau) = c(\tau')$, nghĩa là màu của $\tau \in N^{(r)}$ chỉ phụ thuộc vào $\tau_{[r]-\{i\}}$. Điều này cho phép chúng ta xác định một phép tô màu $c': N^{(r-1)} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ như sau: với $v \in N^{(r-1)}$, nếu $v = \tau_{[r]-\{i\}}$ với một $\tau \in N^{(r)}$ nào đó thì kí hiệu $c'(v) = c(\tau)$; trường hợp ngược lại, chúng ta sẽ kí hiệu $c'(v) = \infty$.

Từ giả thiết quy nạp của bài toán, chúng ta có thể tìm được một tập vô hạn $M \subset N$ sao cho c' là chuẩn tắc trên $M^{(r-1)}$. Khi đó, $c'(v) \neq \infty$ với một $v \in M^{(r-1)}$ và c là một phép tô màu chuẩn tắc của $M^{(r)}$. $\square$

Như một điểm thú vị đáng quan tâm, chúng ta hãy lưu ý rằng Kết quả 6.2.2) rõ ràng là mạnh hơn so với Kết quả 6.1.4), bởi vì, với một tập vô hạn $M \subset \mathbb{N}$ bất kỳ, chúng ta chỉ có duy nhất một phép tô màu chuẩn tắc của $M^{(r)}$ sử dụng một số hữu hạn màu là $c_\emptyset$ – phép tô màu chuẩn tắc chỉ sử dụng duy nhất một màu.

6.3. Lý thuyết Ramsey cho các đồ thị

Giả sử cho trước các đồ thị H_1 và H_2 bất kì. Với mọi số nguyên n cho trước, liệu có đúng là mọi phép 2 – tô xanh và đỏ của tập các cạnh của K_n đều có chứa một H_1 xanh hoặc một H_2 đỏ? Do H_i là một đồ thị con của K_{s_i} , với $s_i = |H_i|$, nên câu trả lời rõ ràng là “có” nếu $n \geq R(s_1, s_2)$. Kí hiệu $r(H_1, H_2)$ là giá trị nhỏ nhất của n để đảm bảo một câu trả lời rõ ràng và chúng ta cũng sẽ định nghĩa $r(H_1, \dots, H_k)$ tương tự cho trường hợp k màu. Lưu ý rằng cách kí hiệu này tương tự như cách kí hiệu đã giới thiệu trước đó: $R(s_1, s_2) = r(K_{s_1}, K_{s_2})$. Thay vì làm việc với một phép 2 – tô màu xanh và đỏ, chúng ta sẽ làm việc thường xuyên hơn với một đồ thị và phân bù của nó: rõ ràng, $r(H_1, H_2) - 1$ là giá trị lớn nhất của n để có một đồ thị G bậc n sao cho $H_1 \not\subset G$ và $H_2 \not\subset \bar{G}$.

Các số $r(H_1, \dots, H_k)$, thường được gọi là ***các số Ramsey tổng quát*** hoặc ***các số Ramsey đồ thị***, là chủ đề của nhiều nghiên cứu khác nhau và, kế tiếp, chúng ta cũng sẽ có một lượng lớn các kết quả về chúng. Tuy nhiên, chúng ta vẫn còn một chặng đường dài phía trước và điều này cũng không có gì đáng ngạc nhiên, bởi vì các số Ramsey tổng quát cũng bao gồm cả các số Ramsey cổ điển $R(s, t)$. Ở đây, chúng ta sẽ chỉ trình bày một số kết quả cơ bản về các số Ramsey tổng quát.

Để tránh những điều nhỏ nhặt không cần thiết, trong suốt cuộc thảo luận này, chúng ta sẽ luôn giả định rằng $H_1, H_2, \dots$ không có các đỉnh độc lập. Chúng ta hãy bắt đầu với nhận xét nếu H_1 rất thưa, tạm giả sử rằng nó gồm l cạnh độc lập, thì $r(H_1, H_2)$ là nhỏ bé. Trên thực tế, nếu H_1 gồm l cạnh độc lập và H_2 là một đồ thị đầy đủ thì chúng ta có thể xác định chính xác giá trị $r(H_1, H_2)$.

Kết quả 6.3.1.

Với mọi $l \geq 1$ và $p \geq 2$, chúng ta luôn có $r(lK_2, K_p) = 2l + p - 2$.

Chứng minh kết quả 6.3.1.

Nhận thấy rằng đồ thị $K_{2l-1} \cup E_{p-2}$ không có chứa l cạnh độc lập và phân bù của nó, $K_{p-2} + E_{2l-1}$, không có chứa bất kì một đồ thị đầy đủ bậc p nào. Như vậy, $r(lK_2, K_p) \geq 2l + p - 2$.

Mặt khác, kí hiệu G là một đồ thị bậc $n = 2l + p - 2$ có chứa một tập tối đại gồm $s \leq l - 1$ cạnh độc lập. Khi đó, tập hợp gồm $n - 2s \geq 2l + p - 2 - 2(l - 1) = p$ đỉnh không nằm trên các cạnh này sẽ cảm sinh một đồ thị đầy đủ bậc $\geq p$. Như vậy, $r(lK_2, K_p) \leq 2l + p - 2$. $\square$

Lưu ý rằng nếu H là bất kì một đồ thị nào có bậc h thì, từ Kết quả 6.3.1), $r(lK_2, H) \leq r(lK_2, K_h) \leq 2l + h - 2$.

Kết quả tiếp theo là một chặn dưới của $r(H_1, H_2)$ đúng với tất cả các cặp (H_1, H_2) . Với một đồ thị G bất kì, kí hiệu $c(G)$ là bậc lớn nhất có thể có của một thành phần liên thông của G và $u(G)$ là ***thặng dư màu của G***: số nhỏ nhất có thể có các đỉnh trong một lớp màu, tính trên tất cả các phép $\chi(G)$ – tô màu thực sự của G . Do đó, $u(G) = \min\{U \subset V(G): \chi(G - U) < \chi(G)\}$. Chẳng hạn, $u(C_{2k}) = k$ và $u(C_{2k+1}) = 1$.

Kết quả 6.3.2.

Với tất cả các đồ thị không rỗng H_1 và H_2 , chúng ta luôn có $r(H_1, H_2) \geq (\chi(H_1) - 1)(c(H_2) - 1) + u(H_1)$. Hơn nữa, nếu H_2 là một đồ thị liên thông thì $r(H_1, H_2) \geq (\chi(H_1) - 1)(|H_2| - 1) + 1$.

Chứng minh kết quả 6.3.2.

Kí hiệu $k = \chi(H_1)$, $u = u(H_1)$ và $c = c(H_2)$. Về mặt tính toán, $r(H_1, H_2) \geq r(H_1, K_2) = |H_1| \geq \chi(H_1)u(H_1) = ku$. Do đó, nếu $c \leq u$ thì $r(H_1, H_2) \geq ku \geq (k - 1)c + u$. Mặt khác, nếu $c > u$ thì đồ thị $G = (k - 1)K_{c-1} \cup K_{u-1}$ sẽ không có chứa H_2 và phần bù của nó cũng sẽ không có chứa H_1 . Như vậy, $r(H_1, H_2) \geq |G| + 1 = (k - 1)(c - 1) + u$. $\square$

Mặc dù các bất đẳng thức nêu trong Kết quả 6.3.2) là rất đơn giản nhưng, trong một số trường hợp nhất định, chúng là tốt nhất có thể. Kế tiếp, chúng ta sẽ xem xét hai ví dụ về điều này: đầu tiên là một kết quả tuyệt đẹp của Chvátal và kết quả thứ hai là của Li và Rousseau.

Kết quả 6.3.3. (Chvátal)

Giả sử cho trước các số nguyên $s, t \geq 2$.

Khi đó, với mọi cây T có bậc t , chúng ta luôn có $r(K_s, T) = (s - 1)(t - 1) + 1$.

Chứng minh kết quả 6.3.3.

Từ Kết quả 6.3.2), chúng ta biết rằng $r(K_s, T) \geq (s - 1)(t - 1) + 1$.

Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại, kí hiệu G là một đồ thị bậc $n = (s - 1)(t - 1) + 1$ sao cho phần bù của nó không có chứa K_s . Khi đó, $\chi(G) \geq \lceil n/(s - 1) \rceil = t$, nên nó sẽ có chứa một đồ thị con tới hạn H với bậc nhỏ nhất $\geq t - 1$ (Kết quả 5.1.1). Chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng H có chứa (một bản sao của) T . Thật vậy, chúng ta có thể giả sử rằng $T_1 \subset H$, trong đó $T_1 = T - x$ và x là một đầu mút của T , liên hợp với một đỉnh y của T_1 (và của H). Do y có ít nhất $t - 1$ đỉnh láng giềng trong H nên chúng ta sẽ có ít nhất một đỉnh láng giềng nào đó của nó, tạm giả sử là z , không nằm trong T_1 . Khi đó, đồ thị con của H được cảm sinh bởi T_1 và z rõ ràng sẽ có chứa (một bản sao của) T . $\square$

Ví dụ thứ hai về sự bình đẳng trong Kết quả 6.3.2) liên quan đến các fan. Với $l \geq 1$, đồ thị $F_l = K_1 + lK_2$ được gọi là một **fan với l cánh**. Do đó, $F_1 = K_3$ và F_l được tạo thành từ l tam giác có cùng một đỉnh chung. Năm 1996, Li và Rousseau đã chứng minh kết quả sau đây:

Kết quả 6.3.4. (Li - Rousseau)

Với mọi $l \geq 2$, chúng ta luôn có $r(F_1, F_l) = r(K_3, F_l) = 4l + 1$.

Chứng minh kết quả 6.3.4.

Từ Kết quả 6.3.2), chúng ta biết rằng $r(K_3, F_l) \geq 2(|F_l| - 1) + 1 = 4l + 1$.

Để chứng minh bất đẳng thức ngược lại, giả sử phản chứng rằng bất đẳng thức này là sai, nghĩa là chúng ta có thể tìm được một đồ thị triangle – free G với bậc $n = 4l + 1$ mà phần bù của nó không có chứa F_l .

Với $x \in G$, kí hiệu $U = N_G(x)$. Khi đó, U là một tập gồm các đỉnh độc lập và do $\bar{G}$ không có chứa F_l nên chúng ta cũng nhận thấy rằng $d_G(x) = |U| \leq 2l$.

Mặt khác, liệu bậc của một đỉnh x trong $\bar{G}$ có thể lớn bao nhiêu? Kí hiệu $W = N_{\bar{G}}(x) = V(G) - (U \cup \{x\})$. Khi đó, $\bar{G}[W]$ không có chứa l cạnh độc lập và phần bù của nó, $G[W]$, không có chứa bất kì một tam giác nào. Do đó, từ Kết quả 6.3.1), $d_{\bar{G}}(x) = |W| \leq 2l$.

Điều này cho thấy rằng $d_G(x) = d_{\bar{G}}(x) = 2l$, nghĩa là G là một đồ thị triangle – free $2l$ – regular với bậc $4l + 1$. Nhưng chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng đây là một điều không thể. □

Nếu chúng ta định nghĩa một đồ thị H_2 là **H_1 – tốt** nếu xảy ra dấu “=” trong Kết quả 6.3.2) thì hai kết quả trước đó chỉ ra rằng mọi cây đều là K_s – tốt với mọi chỉ số $s \geq 2$ và mọi fan F_l đều là K_3 – tốt với mọi chỉ số $l \geq 2$. Trên thực tế, Li và Rousseau cũng đã chứng minh được rằng, với mọi chỉ số $s \geq 2$ cho trước, nếu l đủ lớn thì F_l sẽ là K_s – tốt. Thậm chí, nếu H_1 và H_2 là các đồ thị cố định cho trước và l là đủ lớn thì $K_1 + lH_2$ sẽ là $(K_2 + H_1)$ – tốt.

Do chúng ta biết rất ít về $r(K_s, K_t)$ nên chúng ta chỉ có thể hy vọng rằng hầu như $r(G_1, G_2)$ đã được xác định trong các trường hợp khi ít nhất một trong các đồ thị G_1 và G_2 là thừa, như trong các Kết quả 6.3.3) và 6.3.4). Như chúng ta sẽ thấy ngay bây giờ, chúng ta cũng có những kết quả nhất định cho $r(sH_1, tH_2)$ khi H_1 và H_2 là các đồ thị cố định cho trước và s và t đủ lớn. Kết quả đơn giản sau đây chỉ ra rằng, với các đồ thị H_1 và H_2 cho trước, hàm $r(sH_1, tH_2)$ tối đa không vượt quá $s|H_1| + t|H_2| + c$, trong đó c chỉ phụ thuộc vào H_1 và H_2 và không phụ thuộc vào s và t .

Kết quả 6.3.5.

Với mọi đồ thị G, H_1, H_2 , chúng ta luôn có $r(G, H_1 \cup H_2) \leq \max\{r(G, H_1) + |H_2|, r(G, H_2)\}$. Hơn nữa, $r(sH_1, H_2) \leq r(H_1, H_2) + (s - 1)|H_1|$.

Chứng minh kết quả 6.3.5.

Kí hiệu $n = \max\{r(G, H_1) + |H_2|, r(G, H_2)\}$. Giả sử chúng ta tìm được một phép 2 – tô màu xanh – đỏ của K_n mà không có chứa bất kì một G xanh nào. Khi đó, bất đẳng thức $n \geq r(G, H_2)$ ngụ ý rằng chúng ta sẽ tìm được một H_2 đỏ. Xóa bỏ nó. Do $n - |H_2| \geq r(G, H_1)$ nên phần còn lại sẽ có chứa một H_1 đỏ. Như vậy, K_n có chứa một $H_1 \cup H_2$ đỏ. □

Bổ đề đơn giản này có thể được sử dụng để xác định $r(sH, tH)$ khi H là K_2 hoặc K_3 :

Kết quả 6.3.6.

Nếu $s \geq t \geq 1$ thì $r(sK_2, tK_2) = 2s + t - 1$.

Chứng minh kết quả 6.3.6.

Nhận thấy rằng đồ thị $G = K_{2s-1} \cup E_{t-1}$ không có chứa bất kì s cạnh độc lập nào và đồ thị $\bar{G} = E_{2s-1} + K_{t-1}$ không có chứa bất kì t cạnh độc lập nào. Do đó, $r(sK_2, tK_2) \geq 2s + t - 1$.

Hiển nhiên (hoặc, từ Kết quả 6.3.1), $r(sK_2, K_2) = 2s$, nên để hoàn tất phép chứng minh chúng ta chỉ cần chứng minh rằng $r((s+1)K_2, (t+1)K_2) \leq r(sK_2, tK_2) + 3$.

Để thấy được điều này, kí hiệu G là một đồ thị với bậc $n = r(sK_2, tK_2) + 3 \geq 2s + t + 2$. Nếu $G = K_n$ thì $G \supset (s+1)K_2$, và nếu $G = E_n$ thì $\bar{G} \supset (t+1)K_2$. Trường hợp ngược lại, chúng ta sẽ tìm được ba đỉnh, tạm giả sử là x, y, z , sao cho $xy \in G, xz \notin G$. Kế tiếp, $G - \{x, y, z\}$ sẽ có chứa s cạnh độc lập nào đó của G và, bằng cách bổ sung thêm xy vào chúng, chúng sẽ tạo thành $s+1$ cạnh độc lập của G ; hoặc $\bar{G} - \{x, y, z\}$ sẽ có chứa t cạnh độc lập nào đó và, bằng cách bổ sung thêm xz vào chúng, chúng sẽ tạo thành $t+1$ cạnh độc lập của $\bar{G}$. $\square$

Kết quả 6.3.7.

Nếu $s \geq t \geq 1$ và $s \geq 2$ thì $r(sK_3, tK_3) = 3s + 2t$.

Chứng minh kết quả 6.3.7.

Kí hiệu $G = K_{3s-1} \cup (K_1 + E_{2t-1})$. Khi đó, G không có chứa s tam giác độc lập và $\bar{G} = E_{3s-1} + (K_1 \cup K_{2t-1})$ không có chứa t tam giác độc lập. Do đó, $r(sK_3, tK_3) \geq 3s + 2t$.

Không quá khó khăn để chúng ta có thể chứng minh được rằng $r(2K_3, K_3) = 8$ và $r(2K_3, 2K_3) = 10$. Do đó, bằng cách áp dụng lặp lại liên tục Kết quả 6.3.5), $r(sK_3, K_3) \leq 3s + 2$ và, để hoàn tất phép chứng minh, với mọi $s \geq 1, t \geq 1$, chúng ta đều có $r((s+1)K_3, (t+1)K_3) \leq r(sK_3, tK_3) + 5$.

Để thấy được điều này, kí hiệu $n = r(sK_3, tK_3) + 5$ và xét một phép 2 – tô màu xanh – đỏ của K_n . Chọn ra một tam giác R_3 đơn sắc (tạm giả sử là màu xanh) trong K_n . Nếu $K_n - R_3$ có chứa một sK_3 xanh thì tính đúng đắn của khẳng định trên là hiển nhiên. Trường hợp ngược lại, $K_n - R_3$ có chứa một tam giác B_3 đỏ (thậm chí nó còn có chứa một tK_3 đỏ). Chúng ta có thể giả sử có ít nhất năm trong số chín $R_3 - B_3$ cạnh được tô bởi cùng màu xanh. Có ít nhất hai trong số các cạnh này sẽ liên thuộc với cùng một đỉnh nào đó của B_3 và cùng với một cạnh bất kì của R_3 chúng sẽ tạo thành một tam giác R_3^* xanh có giao với B_3 . Do $K_n - R_3^* - B_3$ có $r(sK_3, tK_3)$ đỉnh nên nó sẽ có chứa một sK_3 xanh hoặc một tK_3 đỏ. Do chúng tách rời khỏi cả R_3^* và B_3 nên K_n sẽ có chứa một $(s+1)K_3$ xanh hoặc một $(t+1)K_3$ đỏ. $\square$

Bằng cách sử dụng lại ý tưởng xây dựng đã được sử dụng trong phép chứng minh của hai kết quả trước, chúng ta có thể thu được một chặn trên tốt hơn cho $r(sK_p, tK_q)$, với điều kiện là $\max(s, t)$ lớn hơn khá nhiều so với $\max(p, q)$. Giả sử cho trước các số nguyên $p, q \geq 2$ và chọn ra một số nguyên t_0 sao cho $t_0 \min\{p, q\} \geq 2r(K_p, K_q)$. Kí hiệu $C = r(t_0 K_p, t_0 K_q)$.

Kết quả 6.3.8.

Nếu $s \geq t \geq 1$ thì $ps + (q-1)t - 1 \leq r(sK_p, tK_q) \leq ps + (q-1)t + C$.

Chứng minh kết quả 6.3.8.

Nhận thấy rằng đồ thị $K_{ps-1} \cup E_{(q-1)t-1}$ cho thấy tính đúng đắn của bất đẳng thức thứ nhất. Như trong các phép chứng minh của các kết quả trước đó, chúng ta sẽ cố định $s - t$ và áp dụng phương pháp quy nạp

toán học theo chỉ số t . Từ Kết quả 6.3.5), chúng ta sẽ có $r(sK_p, tK_q) \leq (s - t)p + r(tK_p, tK_q) \leq ps + C$, với điều kiện $t \leq t_0$. Giả sử $t \geq t_0$ và bất đẳng thức thứ hai của khẳng định đúng với s, t .

Kí hiệu G là một đồ thị với bậc $n = p(s + 1) + (q - 1)(t + 1) + C$ sao cho $G \not\supset (s + 1)K_p$ và $\bar{G} \not\supset (t + 1)K_q$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng sẽ có một K_p của G và một K_q của $\bar{G}$ có cùng một đỉnh. Thật vậy, giả sử rằng khẳng định này là sai. Bằng cách thay đổi G (nếu cần), chúng ta có thể giả định rằng $G \supset sK_p$ và $\bar{G} \supset tK_q$. Kí hiệu bởi V_p là tập các đỉnh của G nằm trong đồ thị con K_p và kí hiệu $V_q = V/V_p, n_p = |V_p|, n_q = |V_q|$.

Từ giả định của chúng ta, $n_p \geq sp$ và $n_q \geq tq$. Trong đồ thị G , mọi đỉnh $x \in V_q$ đều được nối với tối đa $r(K_{p-1}, K_q) - 1$ đỉnh của V_p , bởi vì trong trường hợp ngược lại chúng ta sẽ tìm được một K_p của G có chứa x hoặc một K_q của $\bar{G}$ có chứa các đỉnh của V_p . Tương tự, trong đồ thị $\bar{G}$, mọi đỉnh $y \in V_q$ đều được nối với tối đa $r(K_p, K_{q-1}) - 1$ đỉnh của V_p . Do đó, bằng cách đếm số các $V_p - V_q$ cạnh trong G và $\bar{G}$, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $n_q r(K_{p-1}, K_q) + n_p r(K_p, K_{q-1}) > n_p n_q$.

Tuy nhiên, điều này là không thể, bởi vì do $n_p \geq sp \geq t_0 p$ và $n_q \geq tq \geq t_0 q$ nên $n_p \geq 2r(K_{p-1}, K_q)$ và $n_q \geq 2r(K_p, K_{q-1})$. Do đó, chúng ta có thể tìm được một K_p của G và một K_q của $\bar{G}$ có cùng một đỉnh chung.

Khi loại bỏ $p + q - 1$ đỉnh bất kì của hai đồ thị con này, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng phần dư H còn lại sẽ thỏa mãn $H \not\supset sK_p$ và $\bar{H} \not\supset tK_q$. Tuy nhiên, $|H| = ps + (q - 1)t + C$, nên điều này là không thể. $\square$

Trong tất cả các kết quả nêu ở trên, chúng ta đều có $r(H_1, H_2) \leq C(|H_1| + |H_2|)$, trong đó hằng số C chỉ phụ thuộc vào bậc lớn nhất của H_1 và H_2 . Đây không phải là một điều tình cờ mà là một kết quả đẹp và sâu sắc được chứng minh bởi Chvátal, Rödl, Szemerédi, Trotter vào năm 1983.

Kết quả 6.3.9. (Chvátal – Rödl – Szemerédi – Trotter)

Với mọi số nguyên $d \geq 1$, chúng ta đều có thể tìm được một hằng số $c = c(d)$ sao cho nếu $\Delta(H) \leq d$ thì $r(H, H) \leq c|H|$.

Trên thực tế, nó có khả năng còn ẩn chứa nhiều điều đúng đắn khác nữa. Năm 1975, Burr và Erdős đã phỏng đoán rằng bậc lớn nhất có thể được thay thế bởi giá trị lớn nhất của các bậc nhỏ nhất của các đồ thị con, như trong Kết quả 5.1.1): với mọi số nguyên $d \geq 1$, chúng ta đều có thể tìm được một hằng số $c = c(d)$ sao cho nếu mọi đồ thị con của H đều có chứa một đỉnh với bậc $\leq d$ thì $r(H) \leq c|H|$.

Một bằng chứng củng cố cho phỏng đoán này đã được đưa ra bởi Chen và Schelp: họ đã chứng minh được rằng $r(H) \leq c|H|$ với một hằng số tuyệt đối c nào đó, với mọi đồ thị khả phẳng H . Bằng cách mở rộng kết quả này, vào năm 1995, Rödl và Thomas đã chứng minh được rằng: với mọi số nguyên k , chúng ta luôn có thể tìm được một hằng số $c = c(k)$ sao cho nếu H không có chứa bất kì một subcontraction nào đối với K_k thì $r(H) \leq c|H|$.

Sẽ không quá vô lý khi nghĩ rằng các định lí Ramsey khác nhau sẽ đúng cho các đồ thị hữu hạn khác nhau, bởi vì đồ thị có các cạnh mà chúng ta tô màu là K_n chứ không phải là một đồ thị thưa với ít cạnh. Chẳng hạn, chúng ta có thể phỏng đoán: nếu G là một đồ thị sao cho bất cứ khi nào các cạnh của G được tô

bởi k màu chúng ta luôn có thể tìm được một K_s đơn sắc thì G sẽ phải khá dày đặc. Trên thực tế, điều này hoàn toàn không phải luôn đúng. Với mọi đồ thị H với chỉ số clique $r = \omega(H)$ và với mọi số nguyên $k \geq 1$, chúng ta luôn có thể tìm được một đồ thị G với chỉ số clique cũng bằng r sao cho mọi phép k – tô màu của G đều có chứa một bản sao đơn sắc của H . Kết quả tuyệt vời này đã được chứng minh bởi Nešetřil và Rödl ở dạng mạnh hơn sau đây – đây là một dạng mở rộng của các kết quả trước đó của Graham và Folkman.

Kết quả 6.3.10. (Nešetřil – Rödl)

Với mọi đồ thị H và với mọi số nguyên $k \geq 1$, chúng ta luôn có thể tìm được một đồ thị G với $\omega(G) = \omega(H)$ sao cho mọi phép k – tô màu các cạnh của G đều có chứa một đồ thị con cảm sinh đơn sắc đẳng cấu với H .

Để kết thúc phần này của bài viết, chúng ta lưu ý rằng đôi khi các vấn đề chính của lý thuyết cực trị đồ thị có nhiều nét tương đồng với các vấn đề của lý thuyết Ramsey, như các vấn đề có rất ít liên quan đến việc phân hoạch các cạnh. Chẳng hạn, $r(H, K_{1,l})$ là bao nhiêu? Câu trả lời ở đây đó là nó sẽ là giá trị n nhỏ nhất sao cho mọi đồ thị G với bậc n và bậc nhỏ nhất $\geq n - l$ đều có chứa một bản sao của H . Một ví dụ khác, nếu $kex(n; H) < \binom{n}{2}$ thì, trong mọi phép k – tô màu các cạnh của K_n , chúng ta luôn có thể tìm được một lớp màu nào đó có nhiều hơn $ex(n; H)$ cạnh, nên lớp màu đó tự nhiên sẽ có chứa một bản sao của H .

Chẳng hạn, từ Kết quả 4.2.8), $ex(n; C_4) \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n - 3})$, nên với $n = k^2 + k + 2$ chúng ta sẽ có

$$kex(n; C_4) \leq k \frac{k^2 + k + 2}{4} (1 + (2k + 1)) = \frac{(k^2 + k)(k^2 + k + 2)}{2} < \binom{n}{2}.$$

Như vậy, $r_k(C_4) \leq k^2 + k + 2$. Chung và Graham cũng đã chứng minh được rằng ràng buộc này gần như là tốt nhất có thể được: $r_k(C_4) \geq k^2 - k + 2$ nếu $k - 2$ là lũy thừa của một số nguyên tố nào đó.

6.4. Lý thuyết Ramsey cho các số nguyên

Nghe có vẻ lạ khi kết quả đầu tiên liên quan đến các cấu trúc con đơn sắc liên quan đến các số nguyên chứ không phải là các đồ thị; tuy nhiên, do lý thuyết đồ thị thực sự là còn rất trẻ nên điều này cũng không có gì quá ngạc nhiên. Trong phần này của bài viết, chúng ta sẽ trình bày ba kết quả cổ điển cùng với một số phát triển đáng kể gần đây.

Có lẽ kết quả đầu tiên phải kể đến của lý thuyết Ramsey là một định lý của Hilbert liên quan đến các “khối lập phương” trên tập hợp các số tự nhiên. Mặc dù kết quả này là khá đơn giản nhưng phép chứng minh của nó rõ ràng không phải chỉ là một ứng dụng đơn giản của nguyên lý chuồng bồ câu.

Chúng ta sẽ gọi một tập $C \subset \mathbb{N}$ là một **l – khối lập phương** trong $\mathbb{N}$ nếu chúng ta có thể tìm được các số tự nhiên $s_0, s_1, \dots, s_l$ với $s_1 + \dots + s_i < s_{i+1}$, $1 \leq i < l$, sao cho

$$C = C(s_0; s_1, \dots, s_l) = \{s_0 + \sum_{i=1}^l \varepsilon_i s_i : \varepsilon_i = 0 \text{ hoặc } 1\}.$$

Như vậy, một l – khối lập phương trong $\mathbb{N}$ là ảnh affine của khối lập phương đơn vị $\{0, 1\}^l \subset \mathbb{R}$, nên ảnh affine này cũng sẽ có 2^l đỉnh.

Năm 1892, Hilbert đã chứng minh được kết quả sau đây:

Kết quả 6.4.1. (Hilbert)

Nếu $\mathbb{N}$ được tô bởi một số hữu hạn màu thì, với mọi $l \geq 1$, chúng ta luôn có thể tìm được một lớp màu nào đó có chứa vô số các bản sao tịnh tiến của cùng một l – khối lập phương.

Chứng minh kết quả 6.4.1.

Rõ ràng là, để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta chỉ cần chứng minh phiên bản hữu hạn sau đây của khẳng định nêu trên:

Chúng ta luôn có thể tìm được một hàm $H: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho nếu $N \geq H(k, l)$ thì mọi phép k – tô màu của $[N]$ đều có chứa một l – khối lập phương đơn sắc.

Do một 1 – khối lập phương trong $\mathbb{N}$ chỉ là một cặp các số nguyên nên chúng ta chỉ cần chọn $H(k, 1) = k + 1$ là sẽ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. Như vậy, để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng nếu chúng ta có $H(k, l) \leq n$ thì chúng ta chỉ cần chọn $H(k, l + 1) = N = kn^{l+1}$ sẽ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

Để thấy được điều này, kí hiệu $c: [N] \rightarrow [k]$ là một phép k – tô màu bất kì và phân hoạch $[N]$ thành $N/n = kn^l$ khoảng và mỗi khoảng này sẽ có chiều dài n :

$$[N] = \bigcup_{j=1}^{N/n} I_j,$$

trong đó $I_j = [(j-1)n + 1, jn], j = 1, \dots, N/n$. Khi đó, mỗi I_j đều sẽ có chứa một l – khối lập phương đơn sắc nào đó. Tuy nhiên, nếu tính đến các phép tịnh tiến thì chúng ta sẽ chỉ có tối đa $(n-1)^l < n^l$ khối lập phương trong những khoảng này và mỗi khối lập phương đơn sắc này đều được nhận một màu nào đó trong số k màu cho trước. Do chúng ta có kn^l khoảng nên chúng ta sẽ tìm được hai khoảng nào đó trong số các khoảng này, tạm giả sử là I_j và I_h , có chứa các bản sao tịnh tiến của cùng một l – khối lập phương C_l và các bản sao này được tô bởi cùng một màu. Hợp của hai bản sao tịnh tiến này cũng chính là một $(l+1)$ – khối lập phương đơn sắc cần tìm. $\square$

Kết quả trên về cơ bản không ảnh hưởng quá nhiều đến sự phát triển của lý thuyết Ramsey nhưng định lí sau đây, được chứng minh bởi Schur vào năm 1916, đã trở thành điểm khởi đầu của một lĩnh vực nghiên cứu vẫn còn rất năng động cho đến tận ngày nay.

Kết quả 6.4.2. (Schur)

Với mọi $k \geq 1$, chúng ta luôn tìm được một số nguyên m sao cho, với mọi phép k – tô màu của $[m]$, chúng ta luôn có thể tìm được các số nguyên x, y, z được tô bởi cùng một màu của $[m]$ sao cho $x + y = z$.

Chứng minh kết quả 6.4.2.

Chúng ta sẽ chứng minh rằng chỉ cần chọn $m = R_k(3) - 1$ sẽ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán, trong đó $R_k(3) = R_k(3, \dots, 3)$ là số Ramsey đồ thị cho trường hợp k màu và các tam giác, nghĩa là số nguyên n nhỏ nhất sao cho, với mọi phép k – tô màu của tập các cạnh của K_n , chúng ta luôn tìm được một tam giác đơn sắc.

Kí hiệu $n = R_k(3)$ và kí hiệu $c: [m] = [n - 1] \rightarrow [k]$ là một phép k – tô màu bất kì. Xét một phép k – tô màu bất kì của $[n]^{(2)}$, tập các cạnh của đồ thị đầy đủ với $[n]$ là tập các đỉnh, như sau: với mỗi $ij \in E(K_n) = [n]^{(2)}$, kí hiệu $c'(ij) = c(|i - j|)$. Từ cách định nghĩa của $n = R_k(3)$, chúng ta luôn có thể tìm được một tam giác đơn sắc, với tập đỉnh tạm giả sử là $\{h, i, j\}$, sao cho $1 \leq h < i < j \leq n$ và $c'(hi) = c'(ij) = c'(hj) = l$ với một chỉ số l nào đó. Nhưng khi đó các số nguyên $x = i - h, y = j - i, z = j - h$ sẽ thỏa mãn $c(x) = c(y) = c(z) = l$ và $x + y = z$. $\square$

Bằng cách dùng $S(k)$ để kí hiệu số nguyên m nhỏ nhất nêu trong Kết quả 6.4.2), chúng ta nhận thấy rằng $S(k) \leq R_k(3) - 1$. Như chúng ta có thể dễ dàng chỉ ra rằng $R_k(3) \leq [ek!] + 1$, chúng ta nhận thấy rằng $S(k) \leq [ek!]$.

Kết quả cổ điển thứ ba và cũng là quan trọng nhất, có trước cả định lí Ramsey, được chứng minh bởi van der Waerden vào năm 1927. **Chiều dài của một dãy số** được định nghĩa là số các số hạng của nó.

Kết quả 6.4.3. (van der Waerden)

Giả sử cho trước các số nguyên p và k .

Khi đó, nếu n đủ lớn thì mọi phép k – tô màu của $[n]$ đều có chứa một cấp số cộng đơn sắc với chiều dài p .

Từ Kết quả 6.4.3), chúng ta có thể định nghĩa các hàm van der Waerden $W(p)$ và $W(p, k)$. Ở đây, $W(p) = W(p, 2)$ và $W(p, k)$ là giá trị nhỏ nhất của số nguyên n nêu trong Kết quả 6.4.3). Do đó, $W(p, k)$ là giá trị nhỏ nhất của số nguyên n sao cho nếu $[n] = \bigcup_{i=1}^k N_i$ thì chúng ta luôn có thể tìm được các số nguyên $a, d \geq 1$ và $1 \leq i \leq k$ sao cho $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (p - 1)d \in N_i$. Không có gì ngạc nhiên khi hàm 2 – màu $W(p)$ được nghiên cứu nhiều nhất và ngày nay chúng ta biết rằng $W(2) = 3, W(3) = 9, W(4) = 35$ và $W(5) = 178$. Tuy nhiên, chúng ta lại biết rất ít các thông tin về bậc tăng trưởng của các hàm $W(p)$ và $W(p, k)$.

Thay vì trực tiếp đưa ra một phép chứng minh cho định lí van der Waerden, chúng ta sẽ chỉ xem xét định lí Hales – Jewett – một dạng mở rộng quan trọng của nó – được chứng minh vào năm 1963. Để phát biểu nó, chúng ta sẽ cần đến một số định nghĩa sau đây:

Với một tập hữu hạn A và một số nguyên $n \geq 1$ cho trước, **khối lập phương n chiều xác định trên A** được định nghĩa là tập $A^n = A^{[n]} = \{(a_1, \dots, a_n): a_i \in A \text{ với mọi chỉ số } i\}$. Một **đường thẳng tổ hợp** (hoặc một **đường thẳng**) **trong A^n** được định nghĩa là một tập L có dạng

$$L = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n: a_i = a_j \text{ với } i, j \in I \text{ và } a_i = a_i^0 \text{ với } i \notin I\},$$

trong đó I là một tập con không rỗng của $[n]$ và a_i^0 là một phần tử cố định nào đó của A với $i \in [n] - I$.

Lưu ý rằng mọi đường thẳng trong A^n đều có chính xác $|A|$ phần tử. Bằng cách chọn $A = [p]$ như cách chúng ta vẫn thường làm, các “điểm” $a^1, a^2, \dots, a^p$ của một đường thẳng bất kì đều có thể được đánh số lại sao cho $a^j = (a_1^j, a_2^j, \dots, a_n^j)$ trong đó $a_i^j = \begin{cases} j & \text{nếu } i \in I, \\ a_i^0 & \text{nếu } i \notin I. \end{cases}$

Hiển nhiên, mọi đường thẳng đều có chính xác p phần tử và chúng ta cũng có chính xác

$$\sum_{I \subset [n], I \neq \emptyset} p^{n-|I|} = \sum_{J \subset [n], J \neq [n]} p^{|J|} = (p+1)^n - p^n \text{ đường thẳng trong } A^n.$$

Chẳng hạn, khối lập phương $2 - \text{chiều}$ $[p]^2$ có $2p+1$ đường thẳng: p đường thẳng “nằm dọc”, p đường thẳng “nằm ngang” và một đường thẳng “nằm chéo”, cụ thể là $\{(a, a) : a \in A\}$.

Kết quả 6.4.4. (Hales – Jewett)

Với mọi số nguyên p và k cho trước, chúng ta luôn có thể tìm được một số nguyên n sao cho nếu A là một tập hữu hạn với p phần tử thì mọi phép $k - \text{tô màu}$ $c: A^n \rightarrow [k]$ của A^n đều có chứa một đường thẳng đơn sắc.

Hàm Hales – Jewett $HJ(p, k)$ được định nghĩa tương tự như hàm van der Waerden: $HJ(p, k)$ là giá trị nhỏ nhất của số nguyên n nêu trong Kết quả 6.4.4).

Để thấy rằng định lý Hales – Jewett bao hàm cả định lý van der Waerden, tất cả những gì chúng ta cần là chỉ ra sự tồn tại của một ánh xạ $\theta: [p]^n \rightarrow [p^n]$ biến mọi đường thẳng tổ hợp thành một cấp số cộng với chiều dài p . Chẳng hạn, chúng ta có thể chọn $\theta: [p]^n \rightarrow [p^n]$ là ánh xạ $(a_i)_{i=1}^n \mapsto a_1 + \dots + a_n$ hoặc $(a_i)_{i=1}^n \mapsto 1 + \sum_{i=1}^n (a_i - 1)p^{i-1}$. Khi đó, mọi phép $k - \text{tô màu}$ c của $[p^n]$ đều cảm sinh một phép $k - \text{tô màu}$ $\tilde{c}$ của khối lập phương $[p]^n$ bằng cách đặt $\tilde{c}((a_i)_{i=1}^n) = c(\theta((a_i)_{i=1}^n))$. Kế tiếp, mọi đường thẳng đơn sắc bất kỳ trong phép tô màu $\tilde{c}$ đều được biến thành một cấp số cộng đơn sắc với chiều dài p trong phép tô màu c của $[p^n]$. Như vậy, $W(p, k) \leq p^{HJ(p, k)}$.

Các phép chứng minh ban đầu của Kết quả 6.4.3) và 6.4.4) sử dụng phương pháp quy nạp toán học kép (theo cả hai chỉ số p và k) và thậm chí đối với hàm $W(p) = W(p, 2)$ nó còn chỉ ra một chặn trên đệ quy nguyên thủy tăng của $W(p)$. Trên thực tế, chặn trên của hàm $W(p)$ tăng lên gần giống như hàm Ackerman $A(p)$.

Để định nghĩa hàm $A(p)$, đầu tiên, chúng ta sẽ xác định một dãy các hàm $f_1, f_2, \dots: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bằng cách đặt $f_1(m) = 2m$ và $f_{n+1}(m) = \underbrace{f_n \circ f_n \circ \dots \circ f_n}_{m \text{ lần}}(1)$. Đặc biệt, $f_2(1) = f_1(1) = 2$, $f_2(2) = f_1 \circ f_1(1) = f_1(2) = 2^2$, $f_2(3) = f_1 \circ f_1 \circ f_1(1) = f_1(2^2) = 2^3$, v.v..., $f_2(m) = 2^m$; $f_3(1) = 2$, $f_3(2) = f_2 \circ f_2(2) = f_2(2^2) = 2^{2^2}$, $f_3(3) = f_2(2^{2^2}) = 2^{2^{2^2}}$, v.v... Khi đó, hàm Ackerman $A(p)$ được định nghĩa là $A(p) = f_p(p)$. Với những lý do rõ ràng như trên, f_3 được biết đến như một hàm “tháp”. Ở cuối mục 4.5. **Bổ đề Szemerédi**, chúng ta đã biết rằng hàm tháp này liên quan mật thiết đến bổ đề chính quy của Szemerédi.

Bước đột phá đầu tiên cho chặn trên của hàm van der Waerden chỉ đến sau hơn 60 năm sau khi van der Waerden đã chứng minh định lý của ông ấy bởi Shelah trong một chuyến du lịch đáng chú ý của mình ông ấy đã đưa ra một chặn trên đệ quy nguyên thủy cho hàm Hales – Jewett $HJ(p, k)$ và như vậy ông cũng đã gián tiếp đưa ra một chặn trên đệ quy nguyên thủy cho hàm van der Waerden $W(p, k)$. Mục đích chính của phần này của chúng ta đó là trình bày một định lý tuyệt vời của Shelah.

Chúng ta hãy bắt đầu với một bổ đề mang tính kỹ thuật và thường được biết đến với tên gọi nguyên lý chuỗi bồ câu của Shelah:

Kết quả 6.4.5. (Shelah)

Với mọi số nguyên n và k cho trước, nếu m đủ lớn thì khẳng định sau đây sẽ được thỏa mãn:

“Giả sử cho trước các phép $k - \text{tô màu}$ $c_j: [m]^{[2n-1]} \rightarrow [k]$, $j = 1, \dots, n$.

Khi đó, chúng ta luôn có thể tìm được các số nguyên $1 \leq a_j < b_j \leq m$ sao cho, với mọi chỉ số j , $1 \leq j \leq n$, chúng ta sẽ có

$$c_j(a_1, b_1, \dots, a_{j-1}, b_{j-1}, a_j, a_{j+1}, b_{j+1}, \dots, a_n, b_n) = c_j(a_1, b_1, \dots, a_{j-1}, b_{j-1}, b_j, a_{j+1}, b_{j+1}, \dots, a_n, b_n)$$

Chứng minh kết quả 6.4.5.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo chỉ số n . Với $n = 1$, chúng ta có thể chọn $m \geq k + 1$ bất kì. Kế tiếp, giả sử chúng ta đã chọn được số nguyên m_0 tương ứng với n và k , và chúng ta sẽ chứng minh rằng bất kì $m \geq k^{m_0^{2n}} + 1$ nào cũng sẽ tương ứng với $n + 1$ và k .

Với các phép tô màu $c_j: [m_0]^{[2n+1]} \rightarrow [k], j = 1, \dots, n + 1$, chúng ta sẽ tạo ra một phép tô màu $c: [m] \rightarrow [k]^{[m_0]^{[2n]}}$ bằng cách đặt $c_a(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) = c_{n+1}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, a)$, với mọi $a \in [m]$ và $(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \in [m_0]^{[2n]}$.

Từ cách lựa chọn của số nguyên m , chúng ta có thể tìm được các số nguyên $1 \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq m$ sao cho $c_{a_{n+1}} = c_{b_{n+1}}$; nghĩa là, $c_{n+1}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, a_{n+1}) = c_{n+1}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, b_{n+1})$, với mọi $(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \in [m_0]^{[2n]}$. Kế tiếp, với mỗi chỉ số $j = 1, \dots, n$, chúng ta sẽ xây dựng một phép tô màu $c'_j: [m_0]^{[2n-1]} \rightarrow [k]$ bằng cách đặt $c'_j(x_1, \dots, x_{2n-1}) = c_j(x_1, \dots, x_{2n-1}, a_{n+1}, b_{n+1})$.

Từ giả thiết quy nạp của bài toán, chúng ta luôn có thể tìm được các số nguyên $1 \leq a_i < b_i \leq m_0$ với $i = 1, \dots, n$ sao cho

$$c'_j(a_1, b_1, \dots, a_{j-1}, b_{j-1}, a_j, a_{j+1}, b_{j+1}, \dots, a_n, b_n) = c'_j(a_1, b_1, \dots, a_{j-1}, b_{j-1}, b_j, a_{j+1}, b_{j+1}, \dots, a_n, b_n) \text{ với mọi } j.$$

Nhưng khi đó các số $1 \leq a_i < b_i \leq m, i = 1, \dots, n + 1$ sẽ có các tính chất mà chúng ta yêu cầu. $\square$

Bằng cách dùng $S(n, k)$ để kí hiệu cho giá trị nhỏ nhất của số nguyên m nêu trong Kết quả 6.4.5), phép chứng minh nêu trên chỉ ra rằng $S(1, k) = k + 1$ và $S(n + 1, k) \leq k^{S(n, k)^{2n}} + 1$ với mọi $n \geq 1$. Chúng ta sẽ gọi $S(n, k)$ là một **hàm Shelah**.

Trước khi chúng ta trình bày định lí Shelah, chúng ta sẽ định dạng lại Kết quả 6.4.5) trong dạng thuận tiện hơn.

Giả sử cho trước các số nguyên n và m , kí hiệu

$$S = \{(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \in [m]^{(2n)}\}$$
$$\text{và } S_0 = \{(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \in [m]^{[2n]}: a_i \leq b_i \text{ với mọi } i\}.$$

Chúng ta sẽ gọi S và S_0 là **các tập con Shelah của $[m]^{[2n]}$** . Hơn nữa, với mọi $s = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \in S$ và với mọi $1 \leq j \leq n$, kí hiệu

$$s^{j,1} = (a_1, b_1, \dots, a_{j-1}, b_{j-1}, a_j, a_j, a_{j+1}, b_{j+1}, \dots, a_n, b_n)$$
$$\text{và } s^{j,2} = (a_1, b_1, \dots, a_{j-1}, b_{j-1}, b_j, b_j, a_{j+1}, b_{j+1}, \dots, a_n, b_n).$$

Với cách kí hiệu này, phép chứng minh của Kết quả 6.4.5) chỉ ra khẳng định sau:

Kết quả 6.4.6.

Với mọi số nguyên p và k , nếu $m \geq S(n, k)$ thì khẳng định sau đây sẽ được thỏa mãn:

“Kí hiệu S và S_0 là các tập con Shelah của $[m]^{[2n]}$ và kí hiệu $c: S \rightarrow [k]$ là một phép k – tô màu bất kì của S .

Khi đó, chúng ta luôn có thể tìm được một điểm $s \in S_0$ sao cho $c(s^{j,1}) = c(s^{j,2})$ với mọi $j, 1 \leq j \leq n$.”

Sau tất cả những sự chuẩn bị này, chúng ta đã sẵn sàng để trình bày định lí Shelah – một dạng mạnh hơn của định lí Hales - Jewett:

Kết quả 6.4.7. (Shelah)

Với mọi số nguyên p và k , chúng ta luôn có thể tìm được một số nguyên nhỏ nhất $n = HJ(p, k)$ sao cho mọi phép k – tô màu $[p]^{[n]} \rightarrow [k]$ đều có chứa một đường thẳng đơn sắc. Hơn nữa, nếu $n = HJ(p, k)$ thì $HJ(p + 1, k) \leq nS(n, k^{(p+1)^n})$.

Chứng minh kết quả 6.4.7.

Hiển nhiên, $HJ(1, k) = 1$. Giả sử rằng $n = HJ(p, k)$ tồn tại và $m = S(n, k^{(p+1)^n})$. Kí hiệu $c: [p + 1]^{[nm]} \rightarrow [k]$ là một phép k – tô màu bất kì. Chúng ta sẽ chứng minh rằng phép k – tô màu này sẽ có chứa một đường thẳng đơn sắc.

Phân hoạch $[nm]$ thành n khoảng sao cho mỗi khoảng đều có chiều dài m :

$$[nm] = \bigcup_{j=1}^n I_j,$$

trong đó $I_j = [(j-1)m+1, jm]$. Hơn nữa, kí hiệu S và S_0 là các tập con Shelah của $[m]^{[2n]}$.

Với $s = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \in S_0$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in [p+1]^{[n]}$, $l = (j-1)m + i \in I_j$, kí hiệu

$$e_l = \begin{cases} p+1 & \text{nếu } i \leq a_j, \\ x_j & \text{nếu } a_j < i \leq b_j, \\ p & \text{nếu } i > b_j. \end{cases}$$

Chúng ta sẽ gọi $e_s(x) = e(s, x) = (e_1, \dots, e_{nm}) \in [p+1]^{[nm]}$ là một **s – mở rộng của x**.

Hiển nhiên, với mọi $s \in S_0$, ánh xạ $e_s: [p+1]^{[n]} \rightarrow [p+1]^{[nm]}$ là một đơn ánh và biến mọi đường thẳng của $[p+1]^{[n]}$ thành một đường thẳng của $[p+1]^{[nm]}$.

Chúng ta sẽ sử dụng c để tạo ra một phép tô màu $\tilde{c}: S \rightarrow [k]^{[p+1]^{[n]}}$, $s \mapsto \tilde{c}_s$, trong đó $\tilde{c}_s(x) = c(e(s, x))$ với mọi $x \in [p+1]^{[n]}$. Do $m = S(n, k^{(p+1)^n})$ nên, từ Kết quả 6.4.6, chúng ta luôn có thể tìm được một $s \in S_0$ sao cho $c(e(s^{j,1}, x)) = c(e(s^{j,2}, x))$ với mọi $x \in [p+1]^{[n]}$. Chúng ta sẽ cố định điểm $s = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \in S_0$ và xét một phép k – tô màu $[p]^{[n]} \rightarrow [k]$ được xác định bởi $x \mapsto c(e(s, x))$.

Do $n = HJ(p, k)$ nên khối lập phương $[p]^{[n]}$ sẽ có chứa một đường thẳng đơn sắc. Điều này có nghĩa là, bằng cách đánh số lại các điểm (nếu cần thiết), chúng ta luôn có thể tìm được các điểm $x^1, \dots, x^p \in [p]^{[n]}$ và một khoảng $I = [h]$, $h \geq 1$, sao cho, với $x^j = (x_1^j, \dots, x_n^j)$, chúng ta sẽ có

$$x_i^j = \begin{cases} j & \text{nếu } 1 \leq i \leq h, \\ x_i^0 & \text{nếu } h < i \leq n, \end{cases}$$

trong đó $x_{h+1}^0, \dots, x_n^0 \in [p]$.

Kế tiếp, chúng ta sẽ xác định điểm $x^{p+1} = (x_1^{p+1}, \dots, x_n^{p+1}) \in [p+1]^{[n]}$ để tiếp tục dãy này:

$$x_i^{p+1} = \begin{cases} p+1 & \text{nếu } 1 \leq i \leq h, \\ x_i^0 & \text{nếu } h < i \leq n. \end{cases}$$

Khi đó, $\{x^1, \dots, x^{p+1}\}$ sẽ là một đường thẳng trong $[p+1]^{[n]}$, nên $\{e_s(x^1), \dots, e_s(x^{p+1})\}$ cũng là một đường thẳng trong $[p+1]^{[nm]}$. Để hoàn tất phép chứng minh này, tất cả những gì chúng ta phải làm chỉ là chỉ ra rằng đường thẳng này là đơn sắc, nghĩa là $c(e(s, x^{p+1})) = c(e(s, x^p))$.

Chúng ta sẽ chứng minh $c(e(s, x^{p+1})) = c(e(s, x^p))$ bằng một phép suy luận lồng ghép.

Với $0 \leq j \leq h$, chúng ta định nghĩa $y^j = (y_1^j, \dots, y_n^j) \in [p+1]^{[n]}$ bởi $y_i^j = \begin{cases} p+1 & \text{nếu } 1 \leq i \leq j, \\ p & \text{nếu } j < i \leq h, \text{ sao} \\ x_i^0 & \text{nếu } h < i \leq n, \end{cases}$

cho $y^0 = x^p$ và $y^h = x^{p+1}$.

Lưu ý rằng, với mọi j , $e(s, y^j) = e(s^{j+1,1}, y^{j+1}) = e(s^{j,2}, y^j)$ và $c(e(s^{j,1}, y^j)) = c(e(s^{j,2}, y^j))$.

Như vậy, $c(e(s, y^0)) = c(e(s^{1,1}, y^1)) = c(e(s^{1,2}, y^1)) = c(e(s, y^1))$.

Lập luận tương tự, chúng ta sẽ có $c(e(s, y^1)) = c(e(s, y^2)) = \dots = c(e(s, y^h))$, nên $c(e(s, x^p)) = c(e(s, x^{p+1}))$. Như vậy, $c(e(s, x^{p+1})) = c(e(s, x^p))$ và phép chứng minh của chúng ta đã được hoàn tất. $\square$

Kết quả 6.4.7) chỉ ra rằng hàm Hales – Jewett không tăng ở bất cứ đâu gần nhanh như của hàm Ackerman: trên thực tế, với một hằng số c nào đó, chúng ta sẽ có $HJ(p, k) \leq f_4(c(p+k))$, trong đó f_4 là hàm thứ tư trong hệ thống phân cấp Ackerman – hàm tiếp theo sau hàm tháp $2^{2^{\dots^2}}$.

Chặn trên của hàm van der Waerden $W(k)$ được suy ra bởi Kết quả 6.4.7), trên thực tế, là chặn trên tốt nhất cho $W(k)$ được biết đến cho đến thời điểm hiện tại.

Định lí Hales – Jewett và định lí Shelah mở rộng định lí van der Waerden theo một hướng trừu tượng và tổ hợp. Định lí van der Waerden cũng có nhiều dạng mở rộng đẹp và sâu sắc trong vành các số nguyên: kết quả mở đầu cho những dạng mở rộng này là định lí Rado liên quan đến các hệ phương trình tuyến tính.

Giả sử cho trước một ma trận $A = (a_{ij})$ cấp $n \times m$ với các phần tử nguyên. Chúng ta sẽ gọi A là một **phân hoạch chính quy** nếu phương trình $Ax = 0$ có một nghiệm đơn sắc với mọi phép tô màu của $\mathbb{N}$ với một số hữu hạn màu. Nói cách khác, $A = (a_{ij})$ là một phân hoạch chính quy nếu, với mọi phân hoạch $\mathbb{N} = \bigcup_{l=1}^k N_l$, chúng ta luôn có thể tìm được một lớp N_l nào đó có chứa các số nguyên $x_1, \dots, x_n$ sao cho

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0, \text{ với mọi } i = 1, \dots, m.$$

Lưu ý rằng không phải mọi ma trận đều là một phân hoạch chính quy: chẳng hạn, một ma trận với một số phần tử dương và một số phần tử âm không phải lúc nào cũng là một ma trận phân hoạch chính quy, cụ thể là $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$. Mặt khác, định lí Schur (Kết quả 6.4.2) chỉ ra rằng $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ là một phân hoạch chính quy và, như chúng ta sẽ thấy, định lí van der Waerden là dạng yếu hơn của khẳng định cho rằng mọi ma trận A nào đó đều là một phân hoạch chính quy. Năm 1933, Rado đã đưa ra một đặc trưng đáng chú ý của các ma trận phân hoạch chính quy.

Chúng ta sẽ dùng $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}^n$ để kí hiệu cho các vector cột của ma trận $A = (a_{ij})$. Như vậy, $a_j = (a_{1j} \ a_{2j} \ \dots \ a_{mj})^T$. Chúng ta sẽ nói rằng A **thỏa mãn điều kiện cột** nếu, bằng cách đánh số lại các vector cột (nếu cần thiết), chúng ta có thể tìm được các chỉ số $1 < n_1 < \dots < n_l = n$ sao cho, với $b_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_j$, vector b_1 là 0 và, với $i > 1$, vector b_i là một **tổ hợp tuyến tính hữu tỉ** của các vector $a_1, a_2, \dots, a_{n_{i-1}}$; nghĩa là b_i nằm trong không gian con tuyến tính của $\mathbb{Q}^m$ được cảm sinh bởi tập $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_{i-1}}\}$. Chẳng hạn, nếu $A = (a_1 \ \dots \ a_m)$ với $a_i \neq 0$ với mọi i thì A sẽ thỏa mãn điều kiện cột nếu và chỉ nếu chúng ta có thể tìm được một tập các a_i nào đó có tổng bằng 0.

Đây cũng chính là định lí phân hoạch chính quy của Rado:

Kết quả 6.4.8 (Rado)

Một ma trận với các phần tử nguyên là phân hoạch chính quy nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn điều kiện cột.

Định lí đẹp này làm giảm tính chính quy của một ma trận phân hoạch về thành một tính chất có thể được kiểm tra trong thời gian hữu hạn. Điều đáng nhận xét ở đây đó là cả hai lớp ý nghĩa này đều không dễ dàng. Ngoài ra, như trong hầu hết các kết quả kiểu Ramsey, bằng cách sử dụng một lập luận compact chuẩn, chúng ta đã gặp vài lần việc phiên bản vô hạn kéo theo phiên bản hữu hạn của chính nó. Như vậy, nếu A là một phân hoạch chính quy thì, với mỗi k , chúng ta luôn có thể tìm được một số tự nhiên $R = R(A, k)$ sao cho phương trình $Ax = 0$ có một nghiệm đơn sắc với mọi phép k – tô màu của $[R]$.

Để suy ra định lí Schur từ định lí Rado, tất cả những gì chúng ta phải lưu ý ở đây đó là $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ là một phân hoạch chính quy, bởi vì nó thỏa mãn điều kiện cột.

Hơn nữa, do một ma trận có dạng $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ thỏa mãn điều kiện cột nên định lí

Rado chỉ ra rằng, với mọi số nguyên p và k , chúng ta luôn có thể tìm được một số nguyên n sao cho mọi phép k – tô màu của $[n]$ đều có chứa một cấp số cộng đơn sắc với chiều dài p sao cho hiệu hai phần tử bất kỳ của nó cũng nằm trong cùng một lớp: đây là một dạng tổng quát hơn một chút so với định lí van der Waerden.

Mặt khác, một hệ quả tức thì khác của định lí Rado đó là, với mọi số nguyên k và n cho trước, chúng ta luôn có thể tìm được một số tự nhiên $N = N(k, n)$ sao cho nếu $[N]$ được tô bởi k màu thì chúng ta luôn có thể tìm được một tập A gồm n số tự nhiên sao cho $\sum_{a \in A} a \leq N$ và tất cả các tổng $\sum_{b \in B} b$ ($\emptyset \neq B \subset A$) đều được tô bởi cùng một màu. Ở cuối mục **6.5. Lý thuyết Ramsey cho các dãy con**, chúng ta sẽ thảo luận một dạng mở rộng tuyệt đẹp của khẳng định này cho các tập vô hạn.

Cuối cùng, chúng ta sẽ nói một vài lời về bổ đề Szemerédi. Vào năm 1930, Erdős và Turán đã phỏng đoán một dạng mở rộng sâu sắc của định lý van der Waerden cho lớp màu lớn nhất: chúng ta chỉ cần biết nó là “lớn” hơn so với các phần khác của phân hoạch là đủ. Nói một cách chính xác hơn, họ đã phỏng đoán rằng mọi tập các số tự nhiên với mật độ trên dương đều có chứa một cấp số cộng với chiều dài tùy ý: nếu $A \subset \mathbb{N}$ sao cho $\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [N]|}{N} > 0$ thì A sẽ có chứa một cấp số cộng với chiều dài tùy ý. Bằng cách sử dụng một lập luận compact tiêu chuẩn, khẳng định này có nghĩa là nếu $\delta > 0$ và $p \geq 1$ thì chúng ta luôn có thể tìm được một số tự nhiên N sao cho mọi tập con của $[N]$ gồm ít nhất δN phần tử đều có chứa một cấp số cộng với chiều dài p .

Bằng chứng đầu tiên củng cố cho tính đúng đắn của phỏng đoán Erdős – Turán được cung cấp bởi Roth vào năm 1953, khi ông đã chứng minh phỏng đoán này trong trường hợp đặc biệt $p = 3$. Phỏng đoán đầy đủ đã được Szemerédi chứng minh vào năm 1975 bởi một lập luận tổ hợp sâu sắc và khá phức tạp. Phép chứng minh này Szemerédi cần đến bổ đề chính quy của ông ấy, đã được trình bày trong mục **4.5. Bổ đề Szemerédi**. Như chúng ta đã thấy, kết quả này đã cách mạng hóa lý thuyết cực trị đồ thị.

Trên thực tế, bổ đề Szemerédi cũng ảnh hưởng rất nhiều đến lý thuyết ergodic: vào năm 1977, Furstenberg đã đưa ra một phép chứng minh mới cho bổ đề này bằng lý thuyết ergodic – điều này làm hồi sinh lại lý thuyết ergodic. Nhưng tất cả những điều này lại vượt quá khuôn khổ tài liệu của chúng ta.

6.5. Lý thuyết Ramsey cho các dãy con

Giả sử (f_n) là một dãy hàm xác định trên một không gian T . Khi đó, chúng ta có thể tìm được một dãy con vô hạn (g_n) sao cho một trong hai phương án sau được xảy ra:

a) Nếu (h_n) là một dãy con bất kì của (g_n) thì $\sup_{t \in T} |\sum_1^N h_n(t)| \geq \frac{1}{N}$ với mọi $N \geq 1$,

b) Nếu (h_n) là một dãy con bất kì của (g_n) thì $\sup_{t \in T} |\sum_1^N h_n(t)| < \frac{1}{N}$ với mọi $N \geq 1$.

Khẳng định khá khó khăn cho các dãy hàm này, trên thực tế, là một hệ quả tức thì của một kết quả kiểu Ramsey về các tập vô hạn.

Như thường lệ, với một tập M cho trước, chúng ta sẽ dùng 2^M để kí hiệu cho tập các tập con của M , $M^{(r)}$ để kí hiệu cho tập các r – bộ của M , $M^{(\omega)}$ để kí hiệu cho tập các tập con vô hạn của M . Từ Kết quả 6.1.4), điều tự nhiên được đặt ra ở đây đó là: “Liệu mọi phép 2 – tô màu xanh – đỏ của $\mathbb{N}^{(\omega)}$ có chứa một tập con vô hạn đơn sắc hay không?”. Không mất quá nhiều thời gian để chúng ta có thể nhận thấy rằng trường hợp này là không thể. Như được thúc đẩy bởi quan sát này, chúng ta sẽ gọi một họ $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ là **Ramsey** nếu tồn tại một tập con $M \in \mathbb{N}^{(\omega)}$ sao cho $M^{(\omega)} \subset \mathcal{F}$ hoặc $M^{(\omega)} \subset 2^{\mathbb{N}} - \mathcal{F}$. Nói cách khác, nếu một phép 2 – tô màu xanh – đỏ của $\mathbb{N}^{(\omega)}$ đều có chứa một tập con vô hạn đơn sắc thì chúng ta sẽ gọi họ $\mathcal{F}$ gồm các phần tử đỏ của $\mathbb{N}^{(\omega)}$ là Ramsey.

Tất nhiên, $2^{\mathbb{N}}$ có thể được đồng nhất với tích Cartesian $\prod_{n \in \mathbb{N}} T_n$, trong đó $T_n = \{0,1\}$ với mọi chỉ số n . Chúng ta sẽ trang bị cho T_n một cấu trúc topology rời rạc và tích $2^{\mathbb{N}}$ một cấu trúc tích topology: trong cấu trúc topology này, $2^{\mathbb{N}}$ là một không gian Hausdorff compact. Một dạng yếu của một định lý được đề xuất bởi Galvin và Prikry chỉ ra rằng các tập con mở của $2^{\mathbb{N}}$ đều là Ramsey. Để chứng minh tính đúng đắn của kết quả này, sẽ thật tiện lợi khi chúng ta sử dụng cách kí hiệu và thuật ngữ được giới thiệu bởi Galvin và Prikry. Chúng ta sẽ sử dụng M, N, A, B để kí hiệu các tập con vô hạn của $\mathbb{N}$, và X, Y để kí hiệu các tập con hữu hạn của $\mathbb{N}$. Chúng ta sẽ kí hiệu $X < a$ nếu $x < a$ với mọi $x \in X$; $X < M$ nếu $X < m$ với mọi $m \in M$. Một **M – mở rộng của X** được định nghĩa là một tập có dạng XUN , trong đó $X < N$ và $N \subset M$. Chúng ta hãy chọn ra

một họ $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ cố định. Chúng ta sẽ nói rằng **M chấp nhận X** nếu mọi M – mở rộng của X đều nằm trong $\mathcal{F}$; **M từ chối X** nếu không có bất kì một tập $N \subset M$ nào chấp nhận X .

Kết quả 6.5.1.

Nếu $\mathbb{N}$ từ chối $\emptyset$ thì chúng ta luôn có thể tìm được một tập $M \in \mathbb{N}^{(\omega)}$ từ chối mọi tập $X \subset M$.

Chứng minh kết quả 6.5.1.

Đầu tiên, chúng ta hãy lưu ý rằng luôn có thể tìm được một M_0 sao cho mọi $X \subset M_0$ đều được chấp nhận bởi M_0 hoặc đều bị từ chối bởi M_0 . Thật vậy, kí hiệu $N_0 = \mathbb{N}$, $a_0 = 1$. Giả sử chúng ta đã xác định được $N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_k$ và $a_i \in N_i - N_{i+1}$, $0 \leq i \leq k-1$. Chọn ra $a_k \in N_k$. Nếu $N_k - \{a_k\}$ từ chối $\{a_0, \dots, a_k\}$ thì kí hiệu $N_{k+1} = N_k - \{a_k\}$; trường hợp ngược lại, kí hiệu N_{k+1} là một tập con vô hạn của $N_k - \{a_k\}$ chấp nhận $\{a_0, \dots, a_k\}$. Khi đó, $M_0 = \{a_0, a_1, \dots\}$ chính là tập cần tìm.

Từ giả thiết của bài toán, M_0 từ chối $\emptyset$. Giả sử chúng ta đã chọn được các phần tử $b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$ sao cho M_0 từ chối mọi tập $X \subset \{b_0, b_1, \dots, b_{k-1}\}$. Khi đó, M_0 không thể chấp nhận vô hạn các tập có dạng $X \cup \{c_j\}$, $j = 1, 2, \dots$; trường hợp ngược lại, $\{c_1, c_2, \dots\}$ sẽ chấp nhận X . Do đó, M_0 từ chối tất cả ngoại trừ một số hữu hạn các tập có dạng $X \cup \{c\}$. Do chỉ có 2^k cách lựa chọn cho X nên chúng ta luôn có thể tìm được một phần tử b_k sao cho M_0 từ chối mọi tập $X \subset \{b_0, b_1, \dots, b_k\}$. Từ cách xây dựng của chúng ta, tập $M = \{b_0, b_1, \dots\}$ sẽ thỏa mãn các yêu cầu của tập cần tìm. $\square$

Với sự trợ giúp của Kết quả 6.5.1), chúng ta có thể dễ dàng chứng minh định lí sau đây của Galvin và Prikry:

Kết quả 6.5.2. (Galvin – Prikry)

Mọi tập con mở của $2^{\mathbb{N}}$ đều là Ramsey.

Chứng minh kết quả 6.5.2.

Giả sử cho trước một họ mở $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ và giả sử $A^{(\omega)} \notin \mathcal{F}$ với mọi $A \in \mathbb{N}^{(\omega)}$, nghĩa là $\mathbb{N}$ từ chối $\emptyset$. Kí hiệu M là tập mà sự tồn tại được đảm bảo bởi Kết quả 6.5.1). Nếu $M^{(\omega)} \notin 2^{\mathbb{N}} - \mathcal{F}$ thì kí hiệu $A \in M^{(\omega)} \cap \mathcal{F}$. Do $\mathcal{F}$ mở nên nó sẽ có chứa một lân cận của A , nghĩa là tồn tại một số nguyên $a \in A$ sao cho nếu $B \cap \{1, 2, \dots, a\} = A \cap \{1, 2, \dots, a\}$ thì $B \in \mathcal{F}$. Nhưng điều này ngụ ý rằng M chấp nhận $A \cap \{1, 2, \dots, a\}$, điều này mâu thuẫn với cách lựa chọn của M . Như vậy, $M^{(\omega)} \subset 2^{\mathbb{N}} - \mathcal{F}$. Điều này chứng tỏ rằng $\mathcal{F}$ là Ramsey. $\square$

Nói một cách đơn giản, Kết quả 6.5.2) cho chúng ta biết rằng các tập “không nhạy cảm với những thay đổi nhỏ” đều là Ramsey; như chúng ta có thể thấy, các tập “nhạy cảm với những thay đổi nhỏ” không nhất thiết phải là Ramsey.

Kế tiếp, chúng ta sẽ chứng minh rằng Kết quả 6.5.2) sẽ dẫn đến một dạng mở rộng tao nhã của Kết quả 6.1.4). Kí hiệu bởi $X^{(<\omega)}$ **họ các tập con hữu hạn của X** . Một họ $\mathcal{G} \subset \mathbb{N}^{(<\omega)}$ được gọi là **dày đặc** nếu $\mathcal{G} \cap M^{(<\omega)} \neq \emptyset$ với mọi $M \in \mathbb{N}^{(\omega)}$, và nó được gọi là **thừa** nếu không có bất kì một thành viên nào của $\mathcal{G}$ là một phân đoạn ban đầu của một thành viên khác (nghĩa là, nếu $X < Y$ thì $X \notin \mathcal{G}$ hoặc $X \cup Y \notin \mathcal{G}$). Chẳng hạn, với mỗi $r = 1, 2, \dots$, các họ $\mathbb{N}^{(r)}$ đều thừa.

Kết quả 6.5.3.

Giả sử cho trước một họ dày đặc $\mathcal{G} \subset \mathbb{N}^{(<\omega)}$.

Khi đó, chúng ta luôn có thể tìm được một tập $M \in \mathbb{N}^{(\omega)}$ sao cho mọi $A \subset M$ đều có chứa một phân đoạn ban đầu nằm trong $\mathcal{G}$.

Chứng minh kết quả 6.5.3.

Kí hiệu $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{N} : F \text{ có chứa một phân đoạn ban đầu nằm trong } \mathcal{G}\}$. Khi đó, $\mathcal{F}$ là mở. Do đó, chúng ta luôn có thể tìm được một tập $M \in \mathbb{N}^{(\omega)}$ sao cho $M^{(\omega)} \subset \mathcal{F}$ (trong trường hợp này, tính đúng đắn của khẳng định là hiển nhiên) hoặc $M^{(\omega)} \subset 2^{\mathbb{N}} - \mathcal{F}$. Trường hợp thứ hai không thể xảy ra bởi vì nó ngụ ý rằng $M^{(<\omega)} \cap \mathcal{G} = \emptyset$. $\square$

Hệ quả này cho phép chúng ta suy ra một dạng mở rộng của định lý Ramsey dạng nguyên bản cho các tập vô hạn (Kết quả 6.1.4).

Kết quả 6.5.4.

Giả sử cho trước một họ thưa $\mathcal{G} \subset \mathbb{N}^{(<\omega)}$ và một số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$.

Khi đó, với mọi phép k – tô màu của $\mathcal{G}$, chúng ta luôn có thể tìm được một tập vô hạn $A \subset \mathbb{N}$ sao cho tất cả các thành viên của $\mathcal{G}$ được chứa trong A đều được tô bởi cùng một màu.

Chứng minh kết quả 6.5.4.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta chỉ cần chứng minh khẳng định trên cho trường hợp $k = 2$. Xét một phép 2 – tô màu xanh – đỏ của $\mathcal{G}$: $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{\text{xanh}} \cup \mathcal{F}_{\text{đỏ}}$. Nếu $\mathcal{F}_{\text{xanh}}$ là dày đặc thì kí hiệu M là tập mà sự tồn tại được đảm bảo bởi Kết quả 6.5.3). Với mọi $F \in \mathcal{G} \cap 2^M$, chúng ta luôn có thể tìm được một tập vô hạn $N \subset M$ với phân đoạn ban đầu F . Do $\mathcal{G}$ là thưa nên F sẽ là phân đoạn ban đầu duy nhất của N nằm trong $\mathcal{G}$. Như vậy, $F \in \mathcal{F}_{\text{xanh}}$, nên mọi thành viên của $\mathcal{G}$ được chứa trong M đều được tô màu xanh.

Mặt khác, nếu $\mathcal{F}_{\text{xanh}}$ không dày đặc thì $2^M \cap \mathcal{F}_{\text{xanh}} = \emptyset$ với một tập vô hạn M nào đó. Như vậy, $2^M \cap \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_{\text{đỏ}}$. $\square$

Kế tiếp, chúng ta sẽ chuyển sang trình bày một kết quả liên quan đến các tổng đơn sắc mà chúng ta đã giới thiệu ở phần cuối của mục trước. Kết quả tuyệt vời này, được phỏng đoán bởi Graham và Rothschild và được chứng minh lần đầu tiên bởi Hindman, gần như không quá gần với các kết quả khác đã được đưa ra trong phần này, nhưng phép chứng minh nổi bật do Glazer đưa ra minh họa các phương pháp phong phú có thể được áp dụng trong lý thuyết Ramsey vô hạn.

Kết quả 6.5.5. (Hindman)

Với mọi phép k – tô màu bất kì của $\mathbb{N}$, chúng ta luôn có thể tìm được một tập vô hạn $A \subset \mathbb{N}$ sao cho tất cả các tổng $\sum_{x \in X} x$, $\emptyset \neq X \subset A$, đều được tô bởi cùng một màu.

Chứng minh kết quả 6.5.5.

Chúng ta sẽ không đưa ra một phép chứng minh chi tiết mà chỉ phác thảo một phép chứng minh cho những đã ai quen thuộc với khái niệm siêu lọc trên $\mathbb{N}$ và biết rằng tập $\beta\mathbb{N}$ gồm tất cả các siêu lọc là một không gian topology compact (quá trình compact Stone – Čech của không gian rời rạc $\mathbb{N}$). Phép chứng minh, được đề xuất bởi Glazer, ít nhất là đẹp như định lý và đáng ngạc nhiên hơn rất nhiều. Chúng ta nhắc lại rằng một **bộ lọc $\mathcal{F}$ xác định trên $\mathbb{N}$** là một họ không rỗng các tập con của $\mathbb{N}$ sao cho

- (i) nếu $A, B \in \mathcal{F}$ thì $A \cap B \in \mathcal{F}$;
- (ii) nếu $A \in \mathcal{F}$ và $A \subset B$ thì $B \in \mathcal{F}$;
- (iii) $\mathcal{F} \neq 2^{\mathbb{N}}$, nghĩa là $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Bổ đề Zorn ngụ ý rằng mọi bộ lọc đều được chứa trong một bộ lọc tối đại nào đó, được gọi là một **siêu lọc**. Nếu $\mathcal{U}$ là một siêu lọc thì, với mọi $A \subset \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{U}$ hoặc $\mathbb{N} - A \in \mathcal{U}$. Điều này ngụ ý rằng mọi siêu lọc $\mathcal{U}$ đều xác định một độ đo cộng tính hữu hạn $0 - 1$ m trên $2^{\mathbb{N}}$:

$$m(A) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } A \in \mathcal{U}, \\ 0, & \text{nếu } \mathbb{N} - A \in \mathcal{U}. \end{cases}$$

Ngược lại, rõ ràng là mọi độ đo cộng tính hữu hạn $0 - 1$ trên $2^{\mathbb{N}}$ đều xác định một siêu lọc. Nếu tồn tại một tập hữu hạn nào đó với độ đo 1 thì chúng ta luôn có thể tìm được một phần tử nào đó của tập hợp này, tạm giả sử là a , cũng có độ đo 1. Như vậy, $\mathcal{U} = \{A \subset \mathbb{N} : a \in A\}$. Những bộ siêu lọc này thường được gọi là **principal**. Không phải mọi siêu lọc đều là principal: các siêu lọc có chứa bộ lọc $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} - A \text{ là hữu hạn}\}$ sẽ không phải là principal.

Các bộ siêu lọc này sẽ rất hữu ích trong việc chứng minh các định lý Ramsey và có thể được nhìn thấy từ cách chứng minh rất đơn giản sau đây cho trường hợp $r = 2$ của Kết quả 6.1.4): Chọn ra một siêu lọc $\mathcal{U}$ không principal. Kí hiệu $\mathbb{N}^{(2)} = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$. Với $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $A_1^{(n)} = \{m : (n, m) \in P_1\}$. Khi đó, chúng ta luôn có thể tìm được chính xác một tập nào đó trong số các tập $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_k^{(n)}$ nằm trong $\mathcal{U}$, tạm giả sử là $A_{c(n)}^{(n)}$. Kế tiếp, với $B_i = \{n : c(n) = i\}$, chúng ta sẽ có $\mathbb{N} = B_1 \cup \dots \cup B_k$, nên một lần nữa chúng ta luôn có thể tìm được chính xác một tập nào đó trong số các tập này, tạm giả sử là B_j , nằm trong $\mathcal{U}$. Cuối cùng, chọn ra $a_1 \in B_j$, $a_2 \in B_j \cap A_j^{a_1}$, $a_3 \in B_j \cap A_j^{a_1} \cap A_j^{a_2}$, v.v... Với $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, chúng ta sẽ có $A^{(2)} \subset P_j$.

Kế tiếp, chúng ta hãy xem xét phép chứng minh sau đây cho Kết quả 6.5.5.) của Glazer.

Chúng ta sẽ xác định một phép toán cộng trên $\beta\mathbb{N}$ như sau:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{A \subset \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\},$$

trong đó $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$ và $A - n = \{a - n : a \in A, a > n\}$.

Với một số nỗ lực, chúng ta có thể dễ dàng kiểm tra được rằng $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ thực sự là một bộ siêu lọc và, với phép toán cộng vừa định nghĩa, $\beta\mathbb{N}$ trở thành một cấu trúc nửa nhóm. Hơn nữa, phép toán nửa nhóm này là liên tục phải; nghĩa là, với một tập $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$ cố định, ánh xạ $\beta\mathbb{N} \rightarrow \beta\mathbb{N}$ xác định bởi $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{V} + \mathcal{U}$ là liên tục.

Bằng cách áp dụng một lập luận topology ngắn và tiêu chuẩn, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng các tính chất nêu trên ngụ ý rằng $\beta\mathbb{N}$ có chứa một phần tử lũy đẳng, nghĩa là một phần tử $\mathcal{P}$ sao cho $\mathcal{P} + \mathcal{P} = \mathcal{P}$. Điều này chỉ ra rằng $\mathcal{P}$ là không principal; bởi vì nếu $\{p\} \in \mathcal{P}$ thì $\{2p\} \in \mathcal{P} + \mathcal{P}$, nên $\{p\} \notin \mathcal{P} + \mathcal{P}$.

Kế tiếp, giả sử $A \in \mathcal{P}$. Khi đó, từ cách định nghĩa của phép toán cộng, tập $A^* = \{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{P}\}$ sẽ nằm trong $\mathcal{P}$. Như vậy, nếu $a \in A \cap A^*$ thì $B = (A - a) \cap (A \setminus \{a\}) \in \mathcal{P}$. (Chúng ta có thể thay thế A bởi $A \setminus \{a\}$ bởi vì $\mathcal{P}$ không phải là principal.) Do đó, với mọi $A \in \mathcal{P}$, chúng ta luôn có thể tìm được một phần tử $a \in A$ và một tập $B \subset A \setminus \{a\}$ sao cho $B \in \mathcal{P}$ và $a + B \subset A$.

Tất nhiên, siêu lọc $\mathcal{P}$ này không liên quan gì đến bất kì một phép tô màu nào của $\mathbb{N}$. Tuy nhiên, như bất kì một bộ siêu lọc không principal nào cũng cho phép chúng ta có thể tìm được một tập vô hạn đơn sắc một cách trực tiếp, phần tử lũy đẳng $\mathcal{P}$ này cho phép chúng ta có thể tìm được một tập vô hạn thích hợp. Kí hiệu $\mathbb{N} = C_1 \cup \dots \cup C_k$ là một phép phân hoạch của $\mathbb{N}$ thành k lớp màu. Một cách chính xác hơn, chúng ta luôn có thể tìm được một lớp màu nào đó trong số những lớp màu này, tạm giả sử là C_i , nằm trong $\mathcal{P}$. Kí hiệu $A_1 = C_i$. Chọn ra $a_1 \in A_1$, $A_2 \in \mathcal{P}$, $A_2 \subset A_1 - \{a_1\}$ sao cho $a_1 + A_2 \subset A_1$. Chọn ra $a_2 \in A_2$, $A_3 \in \mathcal{P}$, $A_3 \subset A_2 - \{a_2\}$ sao cho $a_2 + A_3 \subset A_2$, v.v... Khi đó, tập $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ rõ ràng sẽ có các tính chất yêu cầu: mọi tổng vô hạn $\sum_{x \in X} x$, $X \subset A$, đều được tô bởi màu i . □

Cuối cùng, cần nhấn mạnh rằng các kết quả Ramsey vô hạn được trình bày trong phần này chỉ là phần nổi của tảng băng chìm: lý thuyết Ramsey về các tập vô hạn còn được gọi là **các phép tính phân hoạch** là một nhánh thiết yếu và rất phổ biến của lý thuyết tập hợp và nó cũng có một nền móng nghiên cứu khổng lồ.