

Chủ đề 10. Đa thức Tutte

Cho đến nay chúng ta đã gặp một số đa thức liên quan đến một đồ thị, bao gồm đa thức sắc số, đa thức đặc trưng và đa thức tối thiểu. Mục đích chính của chúng ta trong mục này của bài viết là nghiên cứu một loại đa thức đặc biệt cung cấp cho chúng ta nhiều thông tin hơn bất kỳ đa thức nào trước đó về đồ thị của chúng ta.

Đa thức này, một dạng tổng quát hóa đáng kể của đa thức sắc số, được xây dựng bởi Tutte vào những năm 1954 dựa trên một công trình được viết bởi chính ông vào hơn bảy năm trước đó. Mặc dù Tutte đã gọi đa thức hai biến $T_G(x, y) = T(G; x, y)$ này là **đa thức lưỡng sắc của đồ thị G** , nhưng ngày nay nó thường được gọi là đa thức Tutte của G .

Tương tự như đa thức sắc số, đa thức Tutte cũng có thể được định nghĩa đệ quy bằng cách phép toán cắt và hợp nhất đã được giới thiệu trong mục 5.1. **Phép tô màu đỉnh**. Ưu điểm lớn nhất của đa thức Tutte là, trong quá trình này, các thông tin về đồ thị bị mất ít hơn rất nhiều so với các đa thức sắc số.

Phần đầu tiên của mục này sẽ dành để giới thiệu và trình bày các tính chất cơ bản nhất của đa thức Tutte và, trong phần thứ hai, chúng ta sẽ chỉ ra một đa thức phổ quát nhất định nào đó có thể dễ dàng thu được từ đa thức này. Để minh họa bản chất phổ quát của đa thức Tutte, trong phần thứ ba, chúng ta sẽ giới thiệu một số mô hình của các hệ thống mất trật tự thường được sử dụng trong cơ học thống kê và chỉ ra cái gọi là hàm phân hoạch của chúng chẳng qua chỉ là các phép biến đổi đơn giản của đa thức Tutte. Trong phần thứ tư, chúng ta sẽ chỉ ra rằng các giá trị của đa thức Tutte tại các vị trí khác nhau sẽ liệt kê các cấu trúc tự nhiên nhất định liên quan đến đồ thị của chúng ta. Một tính chất cơ bản khác của đa thức Tutte là nó có một khai triển dạng cây khung: chúng ta sẽ trình bày điều này trong phần thứ năm.

Chúng ta sẽ mất rất ít nỗ lực khi xác định đa thức Tutte trên các cấu trúc tổng quát hơn, cụ thể là các matroid, nhưng chúng ta không muốn tạo ra gánh nặng với việc trình bày quá nhiều định nghĩa mới. Bất cứ ai thậm chí chỉ quen thuộc một cách mơ hồ với các matroid cũng sẽ thấy rằng tất cả những gì chúng ta đang cố trình bày ở đây chỉ là những tính chất rất cơ bản của một matroid.

Phần cuối cùng của bài viết này sẽ liên quan đến các đa thức liên kết với (các lớp tương đương của) các nút thắt, đặc biệt là các đa thức Jones và Kauffman. Những đa thức này, được định nghĩa từ cái gọi là các sơ đồ của các nút thắt, chỉ được phát hiện vào giữa những năm 1980. Điều này khá là ngạc nhiên bởi vì các đa thức này rất giống với đa thức Tutte, đã được xây dựng hơn ba mươi năm trước đó: đặc biệt, chúng có thể được xác định một cách tương tự bởi các phép toán cắt và hợp nhất. Trên thực tế, sự giống nhau này không chỉ nằm ở bề ngoài: với một số loại nút thắt, chúng là những hàm đơn giản của đa thức Tutte.

Các đa thức nút liên quan đến các đa thức Tutte giúp chúng ta chứng minh một số kết quả sâu sắc về các nút: chúng ta sẽ phác thảo một phép chứng minh cho một trong những định lý này. Không cần phải nói ra, chuyển tham quan ngắn của chúng ta về lý thuyết nút đa thức này hầu như chỉ nằm ở bề mặt chứ chưa đi sâu vào cốt lõi của vấn đề.

Bối cảnh tự nhiên của các đa thức được nghiên cứu trong phần này của bài viết là lớp **các đa đồ thị hữu hạn**; theo đó, tất cả các đồ thị xuất hiện trong phần này của bài viết là **các đa đồ thị với các cạnh khuyên**.

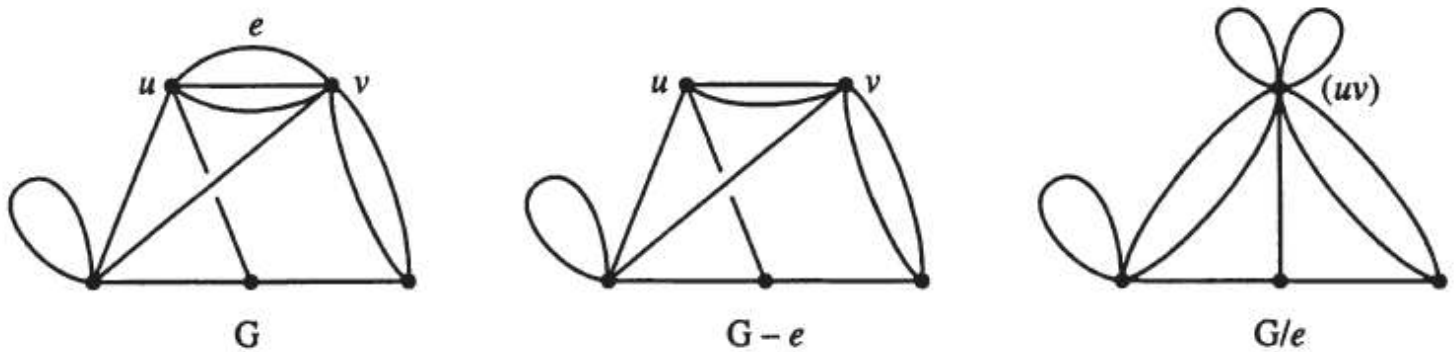
10.1. Các tính chất cơ bản của đa thức Tutte

Đa thức Tutte là thành viên được biết đến nhiều nhất trong một họ nhỏ các đa thức nào đó tương đương với nhau. Có khá nhiều cách tự nhiên để chúng ta có thể giới thiệu các đa thức này: ở đây, chúng ta chọn cách bắt đầu với **đa thức sinh hạng**.

Để chuẩn bị, chúng ta sẽ dùng $\mathcal{G}$ để kí hiệu cho lớp gồm tất cả các đa đồ thị hữu hạn với các cạnh khuyên. Nói một cách chính xác, $\mathcal{G}$ là **tập tất cả các lớp đẳng cấu của các đa đồ thị hữu hạn**, nhưng sẽ thuận tiện hơn nếu chúng ta coi các phần tử của $\mathcal{G}$ là các đồ thị hơn là các lớp đẳng cấu của các đồ thị. Cụ thể, chúng ta sẽ thường gọi các phần tử của $\mathcal{G}$ là các **đồ thị**.

Để đơn giản, chúng ta sẽ dùng $G = (V, E)$ để kí hiệu cho một đa đồ thị với tập đỉnh V , trong đó E là tập các cạnh kép và các cạnh khuyên. Với một chút lạm dụng kí hiệu, chúng ta sẽ gọi $E = E(X)$ là **tập các cạnh của G** , mặc dù trên thực tế một cạnh của G là một phần tử của E chứ không phải là một cạnh khuyên.

Kế tiếp, chúng ta sẽ xác định các phép toán cắt và hợp nhất (còn được gọi là các phép toán xóa và co) cho lớp $\mathcal{G}$. **Phép toán cắt** được định nghĩa tương tự như trước: giả sử cho trước một $G = (V, E)$ và một $e \in E$, chúng ta sẽ kí hiệu $G - e = (V, E - \{e\})$. Do đó, $G - e$ nhận được từ G bằng cách **cắt (xóa) cạnh e** . Ngoài ra, kí hiệu G/e là đa đồ thị thu được từ G bằng cách **hợp nhất (co) cạnh e** . Như vậy, nếu $e \in E$ liên thuộc với u và v (nếu $u = v$ thì e sẽ là một cạnh khuyên) thì, trong G/e , các đỉnh u và v được thay thế bởi một đỉnh $w = (uv)$ duy nhất còn mỗi phần tử $f \in E - \{e\}$ liên thuộc với u hoặc v sẽ được thay thế bởi một cạnh hoặc một cạnh khuyên liên thuộc với w .



Hình vẽ minh họa đồ thị G cùng với $G - e$ và G/e cho một cạnh $e = uv$.

Lưu ý rằng bản thân cạnh e không tương ứng với bất kỳ một cạnh nào của G/e ; đặc biệt, nếu l là một cạnh khuyên thì $G/l = G - l$. Điều quan trọng cần lưu ý là cả $G - e$ và G/e đều có ít hơn chính xác một cạnh kép và một cạnh khuyên so với G : mọi phần tử của $E - \{e\}$ đều tương ứng với duy nhất một phần tử của $E(G/e)$.

Giả sử cho trước một đa đồ thị $G = (V, E)$, chúng ta sẽ dùng $k(G)$ để kí hiệu cho số các thành phần liên thông của G . **Hạng $r(G)$** và **hạt nhân (chỉ số chu trình) $n(G)$** của G được định nghĩa tương tự như với các đồ thị: $r(G) = |V| - k(G) = |G| - k(G)$ và $n(G) = |E| - |V| + k(G)$.

Kế tiếp, chúng ta sẽ chỉ làm việc với các đồ thị con khung của G . Các đồ thị con này được xác định một cách tự nhiên bởi tập các cạnh của chúng: với $F \subset E$, chúng ta sẽ dùng $\langle F \rangle$ để kí hiệu cho đồ thị (V, F) và

$r\langle F \rangle, n\langle F \rangle, k\langle F \rangle$ để kí hiệu cho hạng, hạt nhân và số thành phần liên thông của đồ thị này. Đặc biệt, $r\langle E \rangle = r(G), n\langle E \rangle = n(G)$ và $k\langle E \rangle = k(G)$.

Chúng ta đã sẵn sàng để định nghĩa đa thức sinh hạng $S(G; x, y)$ của một đồ thị $G = (V, E)$:

$$S(G; x, y) = \sum_{F \subset E(G)} x^{r\langle E \rangle - r\langle F \rangle} y^{n\langle F \rangle} = \sum_{F \subset E(G)} x^{k\langle F \rangle - k\langle E \rangle} y^{n\langle F \rangle}.$$

Ở đây, chúng ta quy ước $S(G) = S(G; x, y)$ là một đa thức theo các biến x và y , và đa thức này là một hàm của G . Do, với mọi G , chúng ta đều có các hệ số nguyên nên $S(G; x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ với mọi $G \in \mathcal{G}$. Chúng ta cũng sẽ sử dụng quy ước tương tự cho các đa thức khác cũng phụ thuộc vào đồ thị G , mặc dù chúng ta thường thích xem G như là một chỉ số phụ thuộc hơn là một đối số của hàm.

Các tính chất cơ bản nhất của đa thức sinh hạng sẽ được đưa ra ngay trong kết quả đầu tiên. Mặc dù phép chứng minh là khá đơn giản, chỉ là một chuỗi các thao tác cơ bản, nhưng vì tầm quan trọng đặc biệt của kết quả này buộc chúng ta sẽ phải giải thích nó thật chi tiết.

Kết quả 10.1.1.

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị với $e \in E$.

Khi đó,

$$S(G; x, y) = \begin{cases} (x + 1)S(G - e; x, y) & \text{nếu } e \text{ là một cạnh cầu,} \\ (y + 1)S(G - e; x, y) & \text{nếu } e \text{ là một cạnh khuyên,} \\ S(G - e; x, y) + S(G/e; x, y) & \text{nếu } e \text{ không phải là một cạnh cầu hoặc một cạnh khuyên.} \end{cases}$$

Hơn nữa, $S(E_n; x, y) = 1$ với mọi đồ thị n – rỗng $E_n, n \geq 1$.

Chứng minh kết quả 10.1.1.

Kí hiệu $G' = G - e, G'' = G/e, r'$ và n' là các hàm hạng và hạt nhân đối với G', r'' và n'' là các hàm hạng và hạt nhân đối với G'' .

Đầu tiên, chúng ta sẽ giới thiệu một số thuộc tính đơn giản nhất của các hàm này mà chúng ta sẽ sử dụng bên dưới đây. Nếu $e \in E$ và $F \subset E - e$ thì $r\langle F \rangle = r'\langle F \rangle, n\langle F \rangle = n'\langle F \rangle, r\langle E \rangle - r\langle F \cup e \rangle = r''\langle E - e \rangle - r''\langle F \rangle = r(G'') - r''\langle F \rangle,$

$$r\langle E \rangle = \begin{cases} r'\langle E - e \rangle + 1 & \text{nếu } e \text{ là một cạnh cầu,} \\ r'\langle E - e \rangle & \text{trong trường hợp ngược lại,} \end{cases}$$

và

$$n\langle F \cup e \rangle = \begin{cases} r''\langle F \rangle + 1 & \text{nếu } e \text{ là một cạnh khuyên,} \\ r''\langle F \rangle & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Ở đây, cũng như trong tương lai, chúng ta sẽ dùng $F \cup e$ và $E - e$ để viết tắt cho $F \cup \{e\}$ và $E - \{e\}$.

Chúng ta sẽ chia $S(G; x, y)$ thành hai phần như sau:

$$S(G; x, y) = S_0(G; x, y) + S_1(G; x, y),$$

trong đó

$$S_0(G; x, y) = \sum_{F \subset E, e \notin F} x^{r\langle E \rangle - r\langle F \rangle} y^{n\langle F \rangle},$$

và

$$S_1(G; x, y) = \sum_{F \subset E, e \in F} x^{r\langle E \rangle - r\langle F \rangle} y^{n\langle F \rangle}.$$

Một cách rất tự nhiên, chúng ta dễ dàng nhận rằng các đẳng thức sau $E - e$, $E(G') = E(G - e)$ và $E(G'') = E(G/e)$.

Như vậy, theo các hệ thức nêu ở trên,

$$\begin{aligned} S_0(G; x, y) &= \sum_{F \subset E - e} x^{r\langle E \rangle - r\langle F \rangle} y^{n\langle F \rangle} \\ &= \begin{cases} \sum_{F \subset E(G')} x^{r'\langle E - e \rangle + 1 - r'\langle F \rangle} y^{n'\langle F \rangle} & \text{nếu } e \text{ là một cạnh cầu,} \\ \sum_{F \subset E(G')} x^{r'\langle E - e \rangle - r'\langle F \rangle} y^{n'\langle F \rangle} & \text{trong trường hợp ngược lại,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} xS(G - e; x, y) & \text{nếu } e \text{ là một cạnh khuyên,} \\ S(G - e; x, y) & \text{trong trường hợp ngược lại,} \end{cases} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} S_1(G; x, y) &= \sum_{F \subset E - e} x^{r\langle E \rangle - r\langle F \cup e \rangle} y^{n\langle F \cup e \rangle} \\ &= \begin{cases} \sum_{F \subset E(G'')} x^{r(G'') - r''\langle F \rangle} y^{n''\langle F \rangle + 1} & \text{nếu } e \text{ là một cạnh khuyên,} \\ \sum_{F \subset E(G'')} x^{r(G'') - r''\langle F \rangle} y^{n''\langle F \rangle} & \text{trong trường hợp ngược lại,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} yS(G/e; x, y) & \text{nếu } e \text{ là một cạnh khuyên,} \\ S(G/e; x, y) & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết quả được suy ra ngay lập tức bằng cách cộng các biểu thức của S_0 và S_1 lại với nhau và lưu ý rằng nếu e là một cạnh cầu hoặc một cạnh khuyên thì $S(G/e; x, y) = S(G - e; x, y)$. Điều này sẽ là hiển nhiên nếu e là một cạnh khuyên bởi vì $G/e \cong G - e$; nếu e là một cạnh cầu bởi vì $r''\langle E - e \rangle - r''\langle F \rangle = r'\langle E - e \rangle - r'\langle F \rangle$ và $n''\langle F \rangle = n'\langle F \rangle$ với mọi $F \subset E - e$.

Cuối cùng, phần cuối cùng của khẳng định trên là hệ quả trực tiếp từ chính cách định nghĩa của S . □

Đa thức Tutte $T_G = T(G) = T(G; x, y) = T_G(x, y)$ là một hàm đơn giản của đa thức sinh hạng:

$$T_G(x, y) = S(G; x - 1, y - 1) = \sum_{F \subseteq E} (x - 1)^{r(E) - r(F)} (y - 1)^{n(F)}.$$

Phần lớn thời gian chúng ta sẽ sử dụng T_G để kí hiệu cho đa thức Tutte và viết $T_G(x, y)$ nếu chúng ta muốn thu hút sự chú ý đến các đối số; tuy nhiên, cách kí hiệu $T(G)$ thể hiện tốt hơn thực tế rằng T là một ánh xạ từ tập (các lớp tương đương của) các đa đồ thị hữu hạn vào $\mathbb{Z}[x, y]$. Bản thân Tutte thì sử dụng $T(G; x, y)$ để kí hiệu cho các “đa thức lưỡng sắc” của ông.

Lưu ý rằng $T_{E_n}(x, y) = 1$ và

$$T_G = \begin{cases} xT_{G-e} & \text{nếu } e \text{ là một cạnh cầu,} \\ yT_{G-e} & \text{nếu } e \text{ là một cạnh khuyên,} \\ T_{G-e} + T_{G/e} & \text{nếu } e \text{ không phải là một cạnh cầu cũng như một cạnh khuyên.} \end{cases}$$

Phép đệ quy nêu ở trên có thể được sử dụng lại nhiều lần để chỉ ra rằng rất nhiều hàm của các đồ thị có thể thu được bằng cách tính giá trị của đa thức Tutte tại các vị trí nhất định.

Khi áp dụng các công thức rút gọn nêu ở trên, chúng ta cần lưu ý rằng nếu $e \in E(G)$ là một cạnh cầu hoặc một cạnh khuyên thì $T_{G-e} = T_{G/e}$, bởi vì hệ thức tương tự đúng với S .

Các hàm S và T thường được gọi là **các hàm nhân tính** theo nghĩa nếu $G = G_1 \cup G_2$ với các đồ thị G_1 và G_2 có chung nhiều nhất một đỉnh thì giá trị trên G sẽ là tích của các giá trị trên G_1 và G_2 . Trên thực tế, các hàm này được xác định bởi điều kiện nhân tính này, cùng với các hệ thức cho một cạnh e không phải là một cạnh khuyên cũng không phải là một cạnh cầu và giá trị của các hàm này trên K_2 và L , trong đó L là “đồ thị khuyên”, nghĩa là đồ thị với chỉ một đỉnh và một cạnh khuyên. Từ tính nhân tính, $S(K_1) = T(K_1) = 1$; đồng thời, $S(K_2) = x + 1$, $T(K_2) = x$ và $S(L) = y + 1$, $T(L) = y$.

Có rất nhiều dạng biến thể khác nhau của quan sát cuối cùng. Chẳng hạn, T cũng là hàm duy nhất xác định trên các đồ thị sao cho:

- (i) nếu G có b cạnh cầu, l cạnh khuyên và không có chứa bất kỳ một cạnh nào khác thì $T_G = x^b y^l$,
- (ii) nếu G nhận được từ một đồ thị H bằng cách bổ sung thêm b cạnh cầu và l cạnh khuyên thì $T_G = x^b y^l T_H$,
- (iii) nếu G không có chứa bất kỳ một cạnh cầu hoặc cạnh khuyên thì công thức đệ quy thứ ba sẽ đúng cho một số cạnh e , nghĩa là có một cạnh $e \in E(G)$ sao cho

$$T_G = T_{G-e} + T_{G/e}.$$

10.2. Dạng phổ quát của đa thức Tutte

Mục đích tiếp theo của chúng ta là chỉ ra rằng đa thức Tutte có thể dễ dàng nâng lên thành một đa thức có vẻ như tổng quát hơn. Để thực hiện được nhiệm vụ này, chúng ta sẽ cần xác định các bậc lớn nhất của x và y trong $T_G(x, y)$ từ cách định nghĩa của đa thức Tutte: do $T_G(x, y) = \sum_{F \subseteq E} (x - 1)^{r(E) - r(F)} (y - 1)^{n(F)}$ nên chúng ta sẽ có

$$\deg_x T_G(x, y) = \max\{r(G) - r\langle F \rangle : F \subset E(G)\} = r(G),$$

và

$$\deg_y T_G(x, y) = \max\{n\langle F \rangle : F \subset E(G)\} = n(G).$$

Khẳng định đơn giản sau đây là một phần mở rộng nhỏ của một kết quả của Oxley và Welsh.

Kết quả 10.2.1. (Oxley - Welsh)

Chúng ta luôn tìm được duy nhất một ánh xạ $U: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{Z}[x, y, \alpha, \sigma, \tau]$ sao cho

$$U(E_n) = U(E_n; x, y, \alpha, \sigma, \tau) = \alpha^n \text{ với mọi } n \geq 1,$$

và, với mọi $e \in E(G)$, chúng ta đều có

$$U(G) = \begin{cases} xU(G - e) & \text{nếu } e \text{ là một cạnh cầu,} \\ yU(G - e) & \text{nếu } e \text{ là một cạnh khuyên,} \\ \sigma U(G - e) + \tau U(G/e) & \text{nếu } e \text{ không phải là một cạnh cầu cũng như một cạnh khuyên.} \end{cases}$$

$$\text{Hơn nữa, } U(G) = \alpha^{k(G)} \sigma^{n(G)} \tau^{r(G)} T_G(\alpha x / \tau, y / \sigma). \quad (1)$$

Chứng minh kết quả 10.2.1.

Tính duy nhất được suy ra ngay lập tức bởi vì nếu $e \in E(G)$ thì $U(G)$ sẽ được xác định bởi $U(G - e)$ và $U(G/e)$. Như vậy, tất cả những gì chúng ta phải làm đó là chỉ ra rằng hàm U xác định bởi (1) thỏa mãn các tính chất yêu cầu trong bài toán: nghĩa là, $U(G)$ là một đa thức cho mọi đồ thị G , các đa thức này sẽ thỏa mãn các công thức rút gọn và $U(E_n) = \alpha^n$ với mọi $n \geq 1$.

Thực tế là $U(G) \in \mathbb{Z}[x, y, \alpha, \sigma, \tau]$, điều này suy ra từ việc $\deg_x T_G(x, y) = r(G)$ và $\deg_y T_G(x, y) = n(G)$. Ngoài ra, do $k(E_n) = n$ và $r(E_n) = n(E_n) = 0$ nên chúng ta sẽ có

$$U(E_n) = \alpha^n T_{E_n}(\alpha x / \tau, y / \sigma) = \alpha^n.$$

Quan trọng nhất, U sẽ thỏa mãn các công thức rút gọn bởi vì đa thức Tutte cũng thỏa mãn chúng với $\sigma = \tau = 1$.

Nói một cách nôm na, nếu $e \in E(G)$ là một cạnh cầu thì $k(G - e) = k(G) + 1$, $n(G - e) = n(G)$, $r(G - e) = r(G) - 1$, nên

$$\begin{aligned} U(G) &= \alpha^{k(G)} \sigma^{n(G)} \tau^{r(G)} T_G(\alpha x / \tau, y / \sigma) \\ &= \alpha^{k(G-e)-1} \sigma^{n(G-e)} \tau^{r(G-e)+1} (\alpha x / \tau) T_{G-e}(\alpha x / \tau, y / \sigma) \\ &= xU(G - e). \end{aligned}$$

Nếu e là một cạnh khuyên của G thì $k(G - e) = k(G)$, $n(G - e) = n(G) - 1$, $r(G - e) = r(G)$, nên

$$\begin{aligned} U(G) &= \alpha^{k(G)} \sigma^{n(G)} \tau^{r(G)} T_G(\alpha x / \tau, y / \sigma) \\ &= \alpha^{k(G-e)} \sigma^{n(G-e)+1} \tau^{r(G-e)} (y / \sigma) T_{G-e}(\alpha x / \tau, y / \sigma) \\ &= yU(G - e). \end{aligned}$$

Cuối cùng, nếu $e \in E(G)$ không phải là một cạnh cầu cũng không phải là một cạnh khuyên của G thì $k(G - e) = k(G/e) = k(G)$, $n(G - e) = n(G) - 1$, $n(G/e) = n(G)$, $r(G - e) = r(G)$, $r(G/e) = r(G) - 1$, nên

$$\begin{aligned} U(G) &= \alpha^{k(G)} \sigma^{n(G)} \tau^{r(G)} T_G(\alpha x/\tau, y/\sigma) \\ &= \alpha^{k(G)} \sigma^{n(G)} \tau^{r(G)} \{T_{G-e}(\alpha x/\tau, y/\sigma) + T_{G/e}(\alpha x/\tau, y/\sigma)\} \\ &= \alpha^{k(G-e)} \sigma^{n(G-e)} \tau^{r(G-e)} T_{G-e}(\alpha x/\tau, y/\sigma) + \alpha^{k(G/e)} \sigma^{n(G/e)} \tau^{r(G/e)+1} T_{G/e}(\alpha x/\tau, y/\sigma) \\ &= \sigma U(G - e) + \tau U(G/e). \end{aligned}$$

Điều này hoàn tất phép chứng minh của chúng ta. □

Chúng ta sẽ gọi đa thức U nêu trong Kết quả 10.2.1) là **đa thức phổ quát của các đa thức**. Kết quả 10.2.1) ngụ ý rằng nếu R là một vành giao hoán và $x, y, \alpha, \sigma, \tau \in R$ thì luôn có duy nhất một ánh xạ $\mathcal{G} \rightarrow R$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán: ánh xạ đó sẽ thu được bằng cách tính giá trị của đa thức U tại những vị trí đặc biệt. Đặc biệt, chúng ta luôn có thể tìm một ánh xạ cho $R = \mathbb{Z}[x, y]$ và với mọi cách lựa chọn $\alpha, \sigma, \tau \in \mathbb{Z}$. Chẳng hạn, bản thân đa thức Tutte chính là U tại $\alpha = \sigma = \tau$.

Đa thức U cũng nhân tính, nhưng yếu hơn một chút so với S và T : nếu G_1 và G_2 là các đồ thị phân biệt đỉnh thì

$$U(G_1 \cup G_2) = U(G_1)U(G_2),$$

và nếu G_1 và G_2 có chung một đỉnh với nhau thì

$$U(G_1 \cup G_2) = \frac{U(G_1)U(G_2)}{\alpha}.$$

(Đặc biệt, với $\alpha = 1$, hàm U là nhân tính theo nghĩa mạnh hơn của S và T .)

Dễ dàng nhận thấy rằng U được xác định bởi tính nhân tính này, cùng với các điều kiện $U(L) = \alpha y$ và $U(K_2) = \alpha^2 x$. Một lần nữa, $U(K_1) = \alpha$ cũng được suy ra từ tính nhân tính.

Như một lời cảnh báo, trừ khi σ và τ đều khác 0, chúng ta sẽ phải tính giá của đa thức mở rộng trong (1) chứ không phải cho từng yếu tố một. Trên thực tế, một nghiên cứu nhỏ cho thấy rằng nếu $\sigma = 0$ hoặc $\tau = 0$ thì U sẽ có một dạng hình thức đặc biệt dễ chịu. Bằng cách dùng $l(G)$ để kí hiệu cho số các cạnh khuyên của G , $b(G)$ cho số các cạnh cầu và, như mọi khi, $|G|$ cho số các đỉnh,

$$U(G; x, y, \alpha, \sigma, 0) = \alpha^{|G|} \sigma^{n(G)-l(G)} x^{r(G)} y^{l(G)}$$

và

$$U(G; x, y, \alpha, 0, \tau) = \alpha^{k(G)+b(G)} \tau^{r(G)-b(G)} x^{b(G)} y^{n(G)}.$$

Hơn nữa,

$$U(G; x, y, \alpha, 0, 0) = \begin{cases} \alpha^{|G|} x^{b(G)} y^{l(G)} & \text{nếu } E(G) \text{ chỉ bao gồm các cạnh khuyên và các cạnh kép,} \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Trong mục **4.1. Các giá trị đặc biệt của đa thức Tutte**, chúng ta sẽ chỉ ra rằng một số giá trị của đa thức Tutte có cách giải thích đặc biệt thú vị.

Chúng ta sẽ đề cập đến hai phần tử khác nữa của họ các đa thức liên quan đến đa thức Tutte:

Đầu tiên, chúng ta sẽ đề cập đến **đa thức Whitney – Tutte** $Q_G = Q_G(t, z) \in \mathbb{Z}[t, z]$.

Nó được định nghĩa bởi

$$Q_G(t, z) = \sum_{F \subseteq E(G)} t^{k(F)} z^{n(F)},$$

nên

$$Q_G(t, z) = t^{k(G)} S(G; t, z)$$

và

$$T_G(x, y) = (x - 1)^{-k(G)} Q_G(x - 1, y - 1).$$

Kế tiếp, chúng ta sẽ đề cập đến **đa thức lưỡng sắc** $Z_G = Z_G(q, v) \in \mathbb{Z}[q, v]$. Nó là đa thức duy nhất sao cho $Z_{E_n} = q^n$ với mọi $n \geq 1$, và

$$Z_G = Z_{G-e} + v Z_{G/e}$$

với mọi cạnh $e \in E(G)$, cho dù e có phải là một cạnh cầu, cạnh kép hay là không.

Chúng ta cũng dễ dàng kiểm tra được rằng Z chính là giá trị của U tại $\alpha = q, \sigma = 1, \tau = v, x = (q + v)/v, y = 1 + v$, nghĩa là

$$Z_G(q, v) = q^{k(G)} v^{r(G)} T_G((q + v)/v, 1 + v).$$

Như chúng ta sẽ thấy trong phần tiếp theo, nó chính là hàm phân hoạch Z_G xuất hiện trong vật lý thống kê.

10.3. Đa thức Tutte trong vật lý thống kê

Trong vật lý thống kê, chúng ta thường muốn nghiên cứu các hệ thống ngẫu nhiên mất trật tự, đặc biệt là trong vùng lân cận của các chuyển pha của chúng. Trong nhiều trường hợp, ngay cả trước khi bắt đầu khảo sát, chúng ta vẫn phải vượt qua một khó khăn hơi bất ngờ đó là mặc dù chúng ta có thể dễ dàng đưa ra một độ đo tỉ lệ thuận với độ đo xác suất mà chúng ta muốn, nhưng không dễ để chuẩn hóa nó thành một độ đo xác suất. Độ đo tổng của không gian (và do đó, hệ số chuẩn hóa của chúng ta) chính là **hàm phân hoạch**. Như chúng ta sẽ thấy ngay sau đây, trong một số trường hợp quan trọng, các hàm phân hoạch chính là các biến thể đơn giản của đa thức Tutte.

Chúng ta hãy bắt đầu với mô hình q – trạng thái của Potts, trong đó $q \geq 1$ là một số nguyên nào đó. Để trình bày mô hình này, giả sử $G = (V, E)$ là một đa đồ thị. Chúng ta sẽ gọi một hàm $\omega: V \rightarrow [q], a \mapsto \omega_a$, là **một trạng thái của mô hình sắt từ q – trạng thái của Potts trên G** . Giá trị ω_a được gọi là **trạng thái của a** (hoặc **spin tại a**).

Để xác định một độ đo trên tập $\Omega = [q]^V$ của tất cả các trạng thái, chúng ta sẽ cần đến **Hamiltonian** $H(\omega)$ của một trạng thái ω :

$$H(\omega) = \sum_{ab \in E} (1 - \delta(\omega_a, \omega_b)).$$

Ở đây và trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ coi tập E gồm các cạnh là một đa tập, nghĩa là, trong một tổng $\sum_{x,y \in E} f(x, y)$, số bội của $f(x, y)$ chính là số các cạnh hoặc cạnh khuyên với các đầu mút là các đỉnh x và y .

Độ đo Potts trên $\Omega = [q]^V$ được xác định bởi $\mu_G^{q,\beta}(\omega) = e^{-H(\omega)/k_B T} = e^{-\beta H(\omega)}$, trong đó k_B là hằng số Boltzmann ($k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ Joules/Kelvin), T là **nhiệt độ của hệ thống** và β là **nhiệt độ nghịch đảo**.

Hàm phân hoạch của mô hình Potts q – trạng thái trên G là $P_G(q, \beta) = \mu_G^{q,\beta}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu_G^{q,\beta}(\omega)$ và **xác suất của một trạng thái ω** là $\mu_G^{q,\beta}(\omega)/P_G(q, \beta)$.

Lưu ý rằng, ở nhiệt độ cao, tất cả các trạng thái đều có cùng xác suất, trong khi, ở nhiệt độ thấp, một sự thay đổi nhỏ trong Hamiltonian sẽ làm thay đổi xác suất rất nhiều. Phần lớn mối quan tâm của chúng ta đối với hệ thống là do cấu trúc của một hệ thống “điển hình” thay đổi một cách đột ngột khi nhiệt độ vượt qua một giá trị tới hạn nhất định. Hiện tượng chuyển pha này gợi chúng ta nhớ đến hiện tượng chuyển pha trong quá trình phát triển của các đồ thị ngẫu nhiên mà chúng ta đã thảo luận trong mục **7.5. Hiện tượng chuyển pha**.

Kết quả 10.3.1.

Giả sử $G = (V, E)$ là một đa đồ thị, $q \geq 1$ là một số nguyên và $\beta \in \mathbb{R}$.

Khi đó, hàm phân hoạch của mô hình Potts q – trạng thái trên G với nhiệt độ nghịch đảo β là

$$P_G(q, \beta) = e^{-\beta|E|} Z_G(q, v),$$

trong đó Z_G là đa thức lưỡng sắc và $v = e^\beta - 1$.

Chứng minh kết quả 10.3.1.

Kí hiệu $\widetilde{P}_G(q, \beta) = e^{\beta|E|} P_G(q, \beta)$. Khi đó, để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng $\widetilde{P}_G(q, \beta) = Z_G(q, v)$. Nếu $G = E_n$ thì $H(\omega) = 0$ với mọi trạng thái ω , nên $\widetilde{P}_{E_n} = P_{E_n} = q^n$. Để chứng minh rằng $\widetilde{P}_G(q, \beta) = Z_G(q, v)$, tất cả những gì chúng ta phải làm đó là chỉ ra rằng $\widetilde{P}_G(q, \beta)$ thỏa mãn công thức rút gọn $Z_G = Z_{G-e} + v Z_{G/e}$.

Lưu ý rằng

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_G(q, \beta) &= e^{\beta|E|} \sum_{\omega \in \Omega} e^{\beta \sum_{ab \in E} (\delta(\omega_a, \omega_b) - 1)} \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \prod_{ab \in E} e^{\beta \delta(\omega_a, \omega_b)} \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \prod_{ab \in E} (1 + v \delta(\omega_a, \omega_b)). \end{aligned}$$

Để chứng minh công thức rút gọn, giả sử e là một cạnh từ c đến d . Chúng ta hãy chia tổng ở trên thành hai phần như sau: tổng thứ nhất tính trên các trạng thái ω với $\omega_c \neq \omega_d$ và tổng thứ hai tính trên các trạng thái ω với $\omega_c = \omega_d$.

Như vậy,

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_G(q, \beta) &= \sum_{\omega_c \neq \omega_d} \prod_{ab \in E-e} (1 + v\delta(\omega_a, \omega_b)) + (1 + v) \sum_{\omega_c = \omega_d} \prod_{ab \in E-e} (1 + v\delta(\omega_a, \omega_b)) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \prod_{ab \in E-e} (1 + v\delta(\omega_a, \omega_b)) + v \sum_{\omega_c = \omega_d} \prod_{ab \in E-e} (1 + v\delta(\omega_a, \omega_b)) \\ &= \widetilde{P}_{G-e}(q, \beta) + v\widetilde{P}_{G/e}(q, \beta).\end{aligned}$$

Như vậy, công thức rút gọn được thỏa mãn và chúng ta hoàn tất phép chứng minh. $\square$

Mô hình Potts là một dạng tổng quát hóa của mô hình Ising, nó đơn giản chỉ là trường hợp $q = 2$. Trên thực tế, Fortuin và Kasteleyn đã xây dựng một dạng mở rộng của chính mô hình Potts: mục tiêu kế tiếp của chúng ta là giới thiệu dạng mở rộng này, mô hình cụm ngẫu nhiên. Giả sử $G = (V, E)$ là một đa đồ thị và $0 < p < 1$ và $q > 0$ là các số thực dương cố định cho trước. Quan trọng nhất, chúng ta sẽ không coi q là một số nguyên. **Mô hình cụm ngẫu nhiên tương ứng với các tham số q và p trên G** được định nghĩa là một không gian xác suất xác định trên tập tất cả các đồ thị con khung của G . Như trước đây, một đồ thị con như vậy sẽ được xác định bởi tập các cạnh $F \subset E$ của nó.

Độ đo của một đồ thị con $\langle F \rangle$ là

$$v_G^{q,p}(F) = p^{|F|}(1-p)^{|E|-|F|}q^{k(F)}$$

và

$$R_G(q, p) = \sum_{F \subset E} p^{|F|}(1-p)^{|E|-|F|}q^{k(F)}.$$

Để biến $v_G^{q,p}$ thành một độ đo xác suất, chúng ta phải chia nó cho $R_G(q, p)$.

Mô hình cụm ngẫu nhiên không khác quá nhiều so với mô hình đồ thị ngẫu nhiên tiêu chuẩn $\mathcal{G}(n, p)$, trong đó chúng ta sẽ thu được một đồ thị con ngẫu nhiên của G bằng cách chọn ra các cạnh của G (và chỉ những cạnh đó!) với xác suất p , độc lập với nhau. (Do đó, $\mathcal{G}(n, p) = \mathcal{G}(K_n, p)$.) Để có được một đồ thị ngẫu nhiên trong mô hình cụm ngẫu nhiên, chúng ta thường sẽ biểu diễn xác suất tiêu chuẩn để một đồ thị với k thành phần liên thông theo một nhân tử của q^k . Như vậy, nếu $q = 1$ thì chúng ta sẽ nhận được chính $\mathcal{G}(G, p)$, nhưng nếu q lớn thì chúng ta sẽ ưu tiên các đồ thị có nhiều thành phần liên thông. Tuy nhiên, sự tương đồng với mô hình chuẩn $\mathcal{G}(G, p)$ đôi khi cho phép chúng ta sử dụng các phương pháp và kết quả của lý thuyết đồ thị ngẫu nhiên để nghiên cứu các mô hình cụm ngẫu nhiên.

Kết quả 10.3.2.

Hàm phân hoạch của mô hình cụm ngẫu nhiên là $R_G(q, p) = (1-p)^{|E|}Z_G(q, v)$, với $v = p/(1-p)$.

Chứng minh kết quả 10.3.2.

Kí hiệu $\widetilde{R}_G(q, p) = (1 - p)^{-|E|} R_G(q, p)$, nghĩa là

$$\widetilde{R}_G(q, p) = \sum_{F \subset E} v^{|F|} q^{k(F)}. \quad (2)$$

Khi đó, để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng $\widetilde{R}_G(q, p) = Z_G(q, v)$. Rõ ràng, $\widetilde{R}_{E_n} = q^n$, nên tất cả những gì chúng ta phải làm đó là kiểm tra xem công thức rút gọn có đúng hay không.

Để đạt được mục đích này, giả sử $e \in E$ là một cạnh bất kỳ. Chúng ta hãy phân hoạch các tập con của E thành các cặp,

$$\{F: F \subset E\} = \bigcup_{F \subset E-e} \{F, F \cup \{e\}\},$$

và chúng ta hãy chia (2) lại cho phù hợp:

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_G(q, p) &= \sum_{F \subset E-e} \{v^{|F|} q^{k(F)} + v^{|F|+1} q^{k(F \cup e)}\} \\ &= \sum_{F \subset E-e} v^{|F|} q^{k(F)} + v \sum_{F \subset E-e} v^{|F|} q^{k(F \cup e)}. \end{aligned}$$

Tổng đầu tiên chính là $\widetilde{R}_{G-e}(q, p)$. Do $\langle F \cup e \rangle$ có số thành phần liên thông trong G như $\langle F \rangle$ có trong G/e nên tổng thứ hai chính là $\widetilde{R}_{G/e}(q, p)$. Điều này hoàn tất phép chứng minh của chúng ta. $\square$

Không cần phải nói ra, các hàm phân hoạch này có thể dễ dàng được biểu diễn lại dưới dạng đa thức Tutte, nhưng các biểu thức của chúng không quá phù hợp. Tuy nhiên, công thức (2) đưa ra một cách rất đơn giản khác để chúng ta xác định đa thức lưỡng sắc Z_G , và cũng để xác định đa thức Tutte.

10.4. Các giá trị đặc biệt của đa thức Tutte

Như chúng ta đã nhận xét trước đó, đa thức Tutte của một đồ thị mang nhiều thông tin về một đồ thị hơn là đa thức sắc số. Đặc biệt, như chúng ta sẽ sớm thấy, đa thức sắc số đơn giản chỉ là đa thức Tutte với $y = 0$, được chuẩn hóa một cách phù hợp. Nhưng trước tiên chúng ta hãy lưu ý rằng nếu $x, y \in \{1, 2\}$ thì $T_G(x, y)$ là số các đồ thị con nhất định nào đó của G .

Kết quả 10.4.1.

Giả sử G là một đồ thị liên thông.

Khi đó, $T_G(1, 1)$ là số cây khung của G , $T_G(2, 1)$ là số các rừng trong G , $T_G(2, 1)$ là số các đồ thị con khung liên thông trong G , $T_G(2, 2)$ là số các đồ thị con khung của G .

Chứng minh kết quả 10.4.1.

Nhận thấy rằng mỗi khẳng định trên ở trên đều có thể suy ra trực tiếp từ cách định nghĩa của T .

Thật vậy,

$$\begin{aligned} T_G(1,1) &= \sum_{F \subset E(G)} 0^{r(G)-r(F)} 0^{n(F)} \\ &= |\{F: F \subset E(G), r(F) = r(G) \text{ và } n(F) = 0\}|, \end{aligned}$$

và $F \subset E(G)$ là tập cạnh của một cây khung nếu và chỉ nếu $r(F) = r(G)$ và $n(F) = 0$.

Tương tự,

$$\begin{aligned} T_G(2,1) &= \sum_{F \subset E(G)} 1^{r(G)-r(F)} 0^{n(F)} \\ &= |\{F: F \subset E(G), n(F) = 0\}| \end{aligned}$$

là số các tập cạnh F tạo thành các rừng, và

$$\begin{aligned} T_G(1,2) &= \sum_{F \subset E(G)} 0^{r(G)-r(F)} 1^{n(F)} \\ &= |\{F: F \subset E(G), r(F) = r(G)\}| \end{aligned}$$

là số các đồ thị con khung liên thông của G .

Cuối cùng,

$$\begin{aligned} T_G(2,2) &= \sum_{F \subset E(G)} 1^{r(G)-r(F)} 1^{n(F)} \\ &= |\{F: F \subset E(G)\}| \\ &= 2^{|E(G)|}, \end{aligned}$$

như chúng ta đã tuyên bố. □

Kế tiếp, chúng ta hãy chuyển sang khảo sát họ các giá trị đặc biệt của đa thức Tutte. Như đã đề cập đến trong kết quả tổng quát đầu tiên, chúng ta sẽ chỉ ra rằng đa thức sắc số chỉ đơn giản là đa thức Tutte với $y = 0$, đã được chuẩn hóa một cách phù hợp.

Để phù hợp với cách ký hiệu trước đó của chúng ta, giả sử cho trước một đồ thị G với các cạnh khuyên và một số nguyên dương x , chúng ta sẽ dùng $P_G(x)$ để ký hiệu cho số các cách tô màu đỉnh thực sự của G , nghĩa là số các ánh xạ $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, x\}$ sao cho nếu u và v là các đỉnh liên hợp thì $c(u) \neq c(v)$.

Rõ ràng, $P_{E_n}(x) = x^n$ và, với mọi cạnh $e \in E(G)$, chúng ta cũng sẽ có

$$P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G/e}(x).$$

Đặc biệt, $P_G(x)$ là một đa thức theo x , là đa thức sắc số của G . Chúng ta hãy lưu ý thêm hai tính chất đơn giản sau đây của đa thức sắc số. Đầu tiên, nếu chúng ta tìm được một cạnh khuyên tại một đỉnh thì đỉnh này sẽ liên hợp với chính nó, nên $P_G(x) = 0$ nếu G có chứa một cạnh khuyên. Rõ ràng, nếu H là đồ thị nhận được từ G bằng cách thay thế các cạnh bội bởi các cạnh đơn thì $P_G(x) = P_H(x)$. Thứ hai, nhắc lại rằng nếu e là một cạnh cầu của G thì

$$P_G(x) = \frac{x-1}{x} P_{G-e}(x).$$

Kết quả 10.4.2.

Đa thức sắc số $P_G(x)$ của một đồ thị G sẽ thỏa mãn hệ thức $P_G(x) = (-1)^{r(G)} x^{k(G)} T_G(1-x, 0)$.

Chứng minh kết quả 10.4.2.

Nhận thấy rằng các kết quả này là hệ quả trực tiếp của Kết quả 10.2.1) và các tính chất cơ bản của đa thức sắc số nêu ở trên.

Thật vậy, $P_{E_n}(x) = x^n$ và, với mọi cạnh $e \in E(G)$,

$$P_G(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} P_{G-e}(x) & \text{nếu } e \text{ là một cạnh cầu,} \\ 0 & \text{nếu } e \text{ là một cạnh khuyên,} \\ P_{G-e}(x) - P_{G/e}(x) & \text{nếu } e \text{ không phải là một cạnh cầu cũng như một cạnh khuyên.} \end{cases}$$

Như vậy, từ Kết quả 10.2.1), $P_G(x) = U\left(G; \frac{x-1}{x}, 0, x, 1, -1\right) = x^{k(G)} (-1)^{r(G)} T_G(1-x, 0)$, như chúng ta đã tuyên bố. □

Bằng cách đặt $x = 0$ trong đa thức Tutte, đa thức theo y mà chúng ta thu được cũng có một cách giải thích tự nhiên như sau: nó còn được gọi là **đa thức luồng của đồ thị**, nếu được chuẩn hóa một cách phù hợp.

Để xác định đa thức luồng, chúng ta sẽ xem xét các luồng trên các đồ thị của chúng ta (đa đồ thị với các cạnh khuyên) với các giá trị nằm trong một nhóm Abelian hữu hạn A được viết theo lối cộng. Chúng ta sẽ gọi một luồng như vậy là một A – luồng nếu nó thỏa mãn định luật Kirchhoff về các điện thế tại mỗi đỉnh.

Như vậy, một A – luồng thực sự chính là một A – circulation, nhưng sẽ là sai lầm nếu chúng ta không sử dụng đúng thuật ngữ được chấp nhận.

Như trong các nghiên cứu của chúng ta về các luồng trong các đồ thị ở **Chủ đề 01. Các khái niệm cơ bản** và **Chủ đề 02. Bài toán thiết kế mạch điện**, chúng ta có thể chọn ra một định hướng cho các cạnh (tạo ra một tập E gồm các cạnh và các cạnh khuyên có hướng). Khi đó, một A – luồng sẽ là một ánh xạ $f: \vec{E} \rightarrow A$ sao cho tổng luồng rời khỏi một đỉnh sẽ bằng tổng luồng đi vào đỉnh đó. Tương tự, mỗi cạnh $e = xy$ đều có một luồng f_{xy} nhất định chạy trong nó từ x đến y với quy ước rằng chúng ta cũng sẽ có một luồng $-f_{xy}$ chạy trong cùng một cạnh như vậy từ y đến x .

Một A – luồng được gọi là **khác không khắp nơi** nếu nó có giá trị khác 0 ở mọi cạnh. Chúng ta sẽ dùng $P_G(A)$ kí hiệu cho số các A – luồng khác không khắp nơi trong G . Như chúng ta sẽ thấy ngay sau đây, $P_G(A)$ là một đa thức theo bậc của nhóm A , nên chúng ta có lý khi gọi nó là **đa thức luồng**.

Đôi khi, $P_G(A)$ được xác định một cách dễ dàng. Chẳng hạn, $P_{E_n}(A) = 1$ với mọi $n \geq 1$, bởi vì chúng ta chỉ có duy nhất một A – luồng trong E_n , ánh xạ duy nhất từ tập rỗng vào A và A – luồng này rõ ràng là khác không khắp nơi. Nếu $G = C_n$ là một n – chu trình $x_1 x_2 \dots x_n$ với $n \geq 1$ thì $P_G(A) = |A| - 1$, bởi vì một A – luồng gán cùng một dòng điện cho mỗi một trong các cạnh $x_1 x_2, x_2 x_3, \dots, x_n x_1$.

Một vấn đề được đặt ra ở đây đó là: “Chúng ta có thể nói gì về $P_G(A)$, $P_{G-e}(A)$, $P_{G/e}(A)$ đối với một cạnh $e \in E$?”.

Đầu tiên, nếu e là một cạnh cầu thì $P_G(A) = 0$. Thật vậy, giả sử e là cạnh duy nhất từ V_1 đến $V_2 = V(G) - V_1$. Nhận thấy rằng, trong một A – luồng, tổng dòng điện từ V_1 đến V_2 là 0. Do đó, chúng ta không có dòng điện nào chạy trong cạnh cầu e . Như vậy, $P_G(A) = 0$.

Thứ hai, nếu e là một cạnh khuyên thì mọi A – luồng trên G đều có thể nhận được từ một A – luồng nào đó trên $G - e$ bằng cách cho một dòng điện bất kỳ chạy qua cạnh khuyên e . Để thu được một A – luồng khác không khắp nơi trên G , chúng ta hãy bắt đầu với một A – luồng khác không khắp nơi trên $G - e$ và sau đó chọn ra một giá trị nào đó trong số $|A| - 1$ giá trị khác không cho dòng điện chạy trong cạnh khuyên e .

Như vậy, $P_G(A) = (|A| - 1)P_{G-e}(A)$.

Cuối cùng, giả sử e không phải là một cạnh khuyên cũng như không phải là một cạnh cầu, và nối u với v . Xét một A – luồng f khác không khắp nơi trên G/e . Do các tập cạnh $E(G/e)$ và $E(G - e)$ có thể được đồng nhất với nhau một cách tự nhiên nên f có thể được xem như một luồng f' trên $G - e$. Rõ ràng, f' là một A – luồng khác không khắp nơi trên $G - e$ hoặc f' không tuân theo định luật Kirchhoff về điện thế tại u và v , và không ở đâu khác. Trong trường hợp thứ hai, chúng ta sẽ có một mở rộng duy nhất của luồng này thành một A – luồng f'' khác không khắp nơi trên G : dòng điện trong e phải được chọn để khiến cho định luật Kirchhoff về điện thế đúng với u (và sau đó nó cũng đúng với v). Hơn nữa, mọi A – luồng f' khác không khắp nơi trên $G - e$ đều có thể thu được theo cách này và mọi A – luồng f'' khác không khắp nơi trên G cũng vậy.

Như vậy, $P_{G/e}(A) = P_{G-e}(A) + P_G(A)$.

Thoạt nhìn, $P_G(A)$ dường như phụ thuộc vào cấu trúc của A ; như kết quả tiếp theo đây ngụ ý, khá ngạc nhiên, phán đoán này không đúng: $P_G(A)$ chỉ phụ thuộc vào bậc của A .

Kết quả 10.4.3.

Giả sử A là một nhóm Abelian hữu hạn và G là một đa đồ thị.

Khi đó, $P_G(A) = (-1)^{n(G)} T_G(0, 1 - |A|)$.

Chứng minh kết quả 10.4.3.

Một lần nữa, kết quả này có thể được suy ra ngay lập tức từ Kết quả 10.2.1) và các tính chất của đa thức luồng mà chúng ta đã trình bày ở trên.

Thật vậy, chúng ta đã chỉ ra rằng $P_{E_n}(A) = 1$ với mọi $n \geq 1$ và nếu $e \in E(G)$ thì

$$P_G(A) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } e \text{ là một cạnh cầu,} \\ (|A| - 1)P_{G-e}(A) & \text{nếu } e \text{ là một cạnh khuyên,} \\ -P_{G-e}(A) + P_{G/e}(A) & \text{nếu } e \text{ không phải là một cạnh cầu cũng không phải là một cạnh khuyên.} \end{cases}$$

Như vậy, từ Kết quả 10.2.1),

$$P_G(A) = U(G; 0, |A| - 1, 1, -1, 1) = (-1)^{n(G)} T_G(0, 1 - |A|),$$

như đã tuyên bố. □

Như một hệ quả trực tiếp của Kết quả 10.4.3), chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $P_G(A)$ chỉ phụ thuộc vào bậc của A chứ không phụ thuộc vào cấu trúc của nó. Theo quan điểm này, chúng ta có thể dùng ký hiệu $P_G(A)$ thay cho $P_G(|A|)$. Hơn nữa, hàm $P_G(k)$ này là một đa thức theo $k \in \mathbb{N}$, nên nó cho chúng ta một đa thức $P_G(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Chúng ta sẽ gọi $P_G(x)$ là đa thức luồng của G . Do $P_G(A)$ chỉ phụ thuộc vào $|A|$ nên chúng ta thường nói về một k – luồng, nghĩa là một A – luồng với $|A| = k$ (hoặc đơn giản chỉ là một $\mathbb{Z}_k$ – luồng.).

Một cách tự nhiên, chúng ta thường coi đa thức luồng như là đối ngẫu của đa thức sắc số. Cụ thể, định lý bốn màu sẽ tương đương với thực tế là mọi đồ thị khả phẳng không có cạnh cầu đều có chứa một 4 – luồng khác không khắp nơi. Hơn nữa, như một tương ứng với phỏng đoán của Hadwiger liên quan đến các phép tô màu, vào năm 1954, Tutte đã phỏng đoán rằng mọi đồ thị không có cạnh cầu đều có chứa một 5 – luồng khác không khắp nơi. Trên thực tế, còn khá lâu nữa mới rõ ràng là liệu luôn có thể đảm bảo có một k – luồng khác không khắp nơi với một số k nào đó. Điều này đã được chứng minh bởi Jaeger vào năm 1979 khi ông đã chỉ ra rằng chúng ta luôn có thể đảm bảo một 8 – luồng khác không khắp nơi. Một ít lâu sau đó, Seymour đã chứng minh rằng, trên thực tế, mọi đồ thị không có cạnh cầu đều có chứa một 6 – luồng khác không khắp nơi. Kết quả đáng chú ý này vẫn còn cách khá xa so với một phép chứng minh cho phỏng đoán 5 – luồng của Tutte.

Ví dụ áp chót của chúng ta gần giống với kết quả cuối cùng: như một sản phẩm phụ của việc đánh giá giá trị của một hàm, chúng ta sẽ có được sự độc lập của nó từ một trong các biến của nó.

Chúng ta cũng biết rằng số $a(G)$ các định hướng acyclic của một đồ thị G sẽ được xác định bởi đa thức sắc số tại $x = -1$: $a(G) = |P_G(-1)| = (-1)^{|G|} P_G(-1)$. Như vậy, từ Kết quả 10.4.2), $a(G) = T_G(2, 0)$.

Như chúng ta sắp thấy ngay sau đây, $T_G(1, 0)$ đếm số các định hướng acyclic nhất định của các đồ thị liên thông.

Giả sử cho trước một đồ thị liên thông G và một đỉnh u của G , chúng ta sẽ dùng $a_u(G)$ để kí hiệu cho số các định hướng acyclic của G mà trong đó chỉ có một nguồn duy nhất và nguồn đó chính là u .

Kết quả 10.4.4.

Với mọi đồ thị liên thông G và mọi đỉnh $u \in V(G)$, chúng ta luôn có $a_u(G) = T_G(1, 0)$.

Chứng minh kết quả 10.4.4.

Chúng ta sẽ suy ra khẳng định nêu ở trên từ bốn tính chất sau đây của hàm $a_u(G)$.

(i) Nếu $G = E_1$ thì $a_u(G) = 1$.

(ii) Nếu G có chứa một cạnh khuyên e thì G sẽ không có bất kỳ định hướng acyclic nào, nên $a_u(G) = 0$.

(iii) Giả sử $e = uv$ là một cạnh cầu của G và xét một định hướng acyclic bất kỳ của G , với u là nguồn duy nhất. Khi đó, trong thành phần liên thông của $G - e$ có chứa v , chúng ta chỉ có một nguồn duy nhất là v , nên các định hướng acyclic của G với u là nguồn duy nhất sẽ tương ứng 1 – 1 với các định hướng acyclic của G/e với u (mà trong G/e giống như v hoặc (uv)) là nguồn duy nhất.

Như vậy, $a_u(G) = a_u(G/e)$.

(iv) Cuối cùng, giả sử $e = uv \in E(G)$ không phải là một cạnh khuyên cũng như không phải là một cạnh cầu. Xét một định hướng acyclic của G , với u là nguồn duy nhất. Một câu hỏi được đặt ra cho chúng ta đó là: “Có phải uv là cạnh duy nhất hướng vào v hay không?”. Nếu đúng như vậy thì định hướng này của chúng ta sẽ tạo ra một định hướng acyclic của G/e trong đó u là nguồn duy nhất; trường hợp ngược lại, nó sẽ tạo ra một định hướng của $G - e$ trong đó u là nguồn duy nhất. Ngoài ra, tất cả các định hướng thích hợp khác của G/e và $G - e$ đều có thể tạo ra theo cách này.

Như vậy, trong trường hợp này, chúng ta sẽ có $a_u(G) = a_u(G - e) + a_u(G/e)$.

Kế tiếp, lưu ý rằng nếu u là một đỉnh của một đồ thị liên thông G với $\|G\| > 0$ thì chúng ta luôn có thể tìm được một cạnh $e \in E(G)$ liên thuộc với u . Nhưng khi đó $a_u(G)$ sẽ được xác định bởi “bản chất tự nhiên” của cạnh này (cạnh khuyên, cạnh cầu hoặc không) và các giá trị $a_u(G - e)$ và $a_u(G/e)$. Như vậy, chúng ta luôn có thể tìm được duy nhất một hàm $a_u(G)$ xác định trên tập (các lớp tương đương của) các đồ thị liên thông G với một đỉnh phân biệt u thỏa mãn các tính chất (i) – (iv). Nhắc lại rằng do $T_{G-e} = T_{G/e}$ bất cứ khi nào e là một cạnh cầu hoặc một cạnh khuyên nên chúng ta nhận thấy rằng $T_G(1,0)$ là một hàm như vậy, nghĩa là $a_u(G) = T_G(1,0)$. $\square$

Như ví dụ cuối cùng của chúng ta, chúng ta sẽ chỉ ra rằng đa thức Tutte có thể được sử dụng để xác định xác suất của tính liên thông của một đồ thị con ngẫu nhiên của một đồ thị liên thông. Trên thực tế, một khẳng định tổng quát hơn một chút cũng là hệ quả trực tiếp của Kết quả 10.2.1).

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị và $0 < p < 1$. Với một chút lạm dụng kí hiệu, chúng ta sẽ dùng E_p kí hiệu cho một tập con ngẫu nhiên của E thu được bằng cách giữ lại các cạnh với xác suất p , độc lập với nhau (và do đó xác suất xóa của chúng là $q = 1 - p$). Như vậy, nếu $G = K_n$ thì $\langle E_p \rangle$ chính là một phần tử của $\mathcal{G}(n, P(\text{cạnh}) = p)$ đã nghiên cứu trong **Chủ đề 07. Đồ thị ngẫu nhiên**; nói chung, $\langle E_p \rangle$ là một đồ thị con ngẫu nhiên của G . Chúng ta sẽ dùng P để kí hiệu cho xác suất trên các đồ thị con ngẫu nhiên $\langle E_p \rangle$ này.

Kết quả 10.4.5.

Giả sử $G = (V, E)$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ và E_p như nêu ở trên.

Khi đó, $P(r\langle E_p \rangle = r(G)) = p^{r(G)} q^{n(G)} T_G(1, 1/q)$.

Chứng minh kết quả 10.4.5.

Từ Kết quả 10.2.1), để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta chỉ cần kiểm tra xem hàm $C(G) = P(r\langle E_p \rangle = r(G))$ có thỏa mãn các điều kiện của Kết quả 10.2.1) với $x = p$, $y = 1$, $\alpha = 1$, $\sigma = q$ và $\tau = p$ hay không là đủ.

Mặc dù điều này rất dễ nhận thấy, nhưng chúng ta vẫn sẽ dành ít thời gian để trình bày chi tiết nó.

Nếu G là đồ thị rỗng E_n thì $r\langle E_p \rangle = r(G) = 0$, nên $C(E_n) = 1$.

Nếu $e \in E$ là một cạnh cầu của G thì $r\langle E_p \rangle = r\langle E \rangle$. Điều này ngụ ý rằng $e \in E_p$. Như vậy, $C(G) = pC(G - e)$.

Nếu $e \in E$ không phải là một cạnh cầu của G thì $r(G) = r(G - e)$, nên $C(G) = pC(G/e) + qC(G - e)$. Ngoài ra, nếu e là một cạnh khuyên thì $G/e = G - e$, nên $C(G) = C(G - e)$, đây là một sự thật hiển nhiên có thể suy ra dễ dàng từ các nguyên lý đầu tiên của chúng ta. $\square$

10.5. Công thức khai triển dạng cây khung của đa thức Tutte

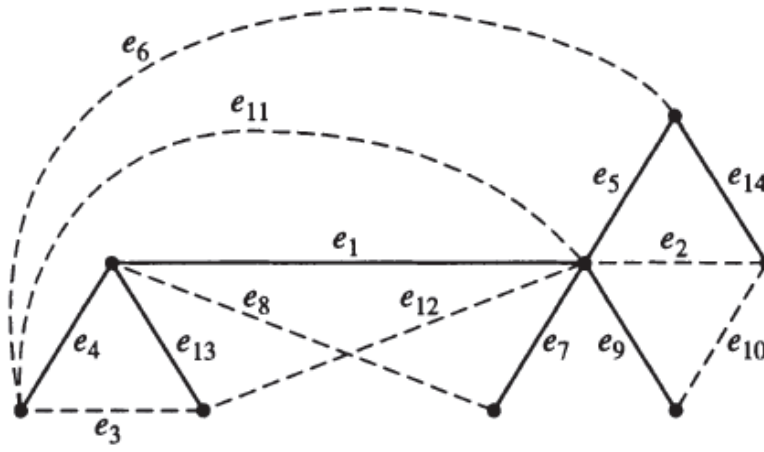
Trong phần này của bài viết, chúng ta sẽ đưa ra cách định nghĩa ban đầu của Tutte cho đa thức của ông ấy, và chúng ta cũng sẽ chỉ ra rằng nó hoàn toàn phù hợp với cách định nghĩa này của chúng ta. Như chúng ta đã biết trước các tính chất cơ bản của đa thức Tutte, nhiệm vụ của chúng ta sẽ dễ dàng hơn nhiều so với việc nếu chúng ta bắt đầu từ những nguyên lý đầu tiên.

Mặc dù chúng ta thường có xu hướng nói về việc biểu diễn lại đa thức Tutte dưới dạng một tổng tính trên tất cả các cây khung, nhưng điều này chỉ có thể thực hiện được nếu đồ thị của chúng ta là liên thông. Do đa thức Tutte của một đồ thị là tích của các đa thức Tutte của các thành phần liên thông của nó. Điều này dẫn chúng ta đến một dạng mở rộng về các rừng với các thành phần liên thông là các cây khung của các thành phần liên thông của đồ thị. Với một chút lạm dụng thuật ngữ, chúng ta sẽ gọi một rừng như vậy là một **rừng khung**.

Như vậy, một đồ thị $F = (V', E')$ được gọi là một **rừng khung của một đồ thị** $G = (V, E)$ nếu $V' = V$, $E' = E$, và mỗi thành phần liên thông của F đều là một cây khung của một thành phần liên thông nào đó của G . Một cách tương đương, $V' = V$, $E' \subset E$, $r(F) = r(G)$ và $n(F) = 0$. Nói một cách hơi khác một chút, một rừng khung của một đồ thị là một rừng con có cùng số đỉnh và cùng số thành phần liên thông như đồ thị ban đầu.

Giả sử cho trước một đồ thị G và xét một thứ tự bất kì trên tập các cạnh của nó: giả sử $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$, với e_i đứng trước e_j nếu $i < j$. Ngoài ra, giả sử F là một rừng khung của G . Theo các thuật ngữ nêu trong mục 2.2. **Không gian vector và ma trận liên kết với một đồ thị**, với $e_i \in E(F)$, chúng ta sẽ gọi $U_F(e_i) = \{e_j \in E(G) : (F - e_i) + e_j \text{ là một rừng khung}\}$ là một **lát cắt được xác định bởi e_i** . Hơn nữa, với $e_i \in E(G) - E(F)$, **chu trình được xác định bởi e_i** là chu trình duy nhất của $F + e_i$; chúng ta sẽ dùng $Z_F(e_i)$ để kí hiệu cho tập các cạnh của chu trình này.

Chúng ta sẽ gọi một cạnh $e_i \in E(F)$ là một **cạnh hoạt động trong (của F , đối với thứ tự các cạnh của G)** nếu e_i là cạnh nhỏ nhất của lát cắt mà nó xác định. Như vậy, $e_i \in E(F)$ là hoạt động bên trong nếu $i \leq j$ bất cứ khi nào $e_j \in U_F(e_i)$, nghĩa là nếu $e_i \in Z_F(e_j)$ kéo theo $i \leq j$. Tương tự, chúng ta sẽ gọi một cạnh $e_j \in E(G) - E(F)$ là hoạt động ngoài nếu e_j là cạnh nhỏ nhất của chu trình mà nó xác định, nghĩa là nếu $i \geq j$ bất cứ khi nào $e_i \in Z_F(e_j)$.



Hình vẽ minh họa một cây khung với các cạnh hoạt động trong e_1, e_7, e_9
và các cạnh hoạt động ngoài e_2, e_3 .

Chúng ta sẽ nói rằng một rừng khung có **i hoạt động trong và j hoạt động ngoài** nếu có chính xác i cạnh hoạt động bên trong và chính xác j cạnh hoạt động bên ngoài. Ngoài ra, như một cách viết tắt, chúng ta sẽ dùng (i, j) – rừng khi chúng ta muốn nói đến một rừng khung gồm i hoạt động trong và j hoạt động ngoài (đối với thứ tự cho trước của các cạnh.). Nếu chúng ta biết rằng rừng của chúng ta trên thực tế là một cây khung thì chúng ta sẽ nói (i, j) – cây.

Lưu ý rằng, để duy trì truyền thống cổ xưa của các nhà toán học thuần túy, chúng ta sẽ sử dụng cùng một chỉ số chung trong hai ngữ cảnh khác nhau: chúng ta có các cạnh e_i trên một rừng, các cạnh e_j không nằm trên một rừng và chúng ta cũng có (i, j) – rừng, nghĩa là các rừng khung với i cạnh đặc biệt của một loại (kí hiệu bởi e_i) và j cạnh đặc biệt của một loại khác (kí hiệu bởi e_j). Hy vọng rằng, điều này không dẫn đến bất kỳ sự nhầm lẫn nào.

Kết quả 10.5.1.

Giả sử G là một đồ thị với một thứ tự trên các cạnh của nó. Kí hiệu t_{ij} là số các rừng khung với i hoạt động trong và j hoạt động ngoài.

Khi đó, $\sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j$ chính là đa thức Tutte $T_G(x, y)$ của G . Đặc biệt, $t_{ij} = t_{ij}(G)$ không phụ thuộc vào thứ tự các cạnh và chỉ phụ thuộc vào đồ thị G .

Chứng minh thứ nhất của kết quả 10.5.1.

Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định nêu ở trên, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp toán học theo số các cạnh của G . Với $G = E_n$, chúng ta sẽ có $t_{00} = 1$ và $t_{ij} = 0$ nếu $i + j > 0$, nên $\sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j = 1 = T_{E_n}(x, y)$.

Giả sử $G = (V, E)$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, $m \geq 1$, và giả sử khẳng định đúng với mọi đồ thị có số cạnh $\leq m - 1$. Kí hiệu $G' = G - e_m$ và $G'' = G / e_m$ sao cho $E(G') = E(G'') = \{e_1, \dots, e_{m-1}\}$. Đây là thứ tự mà chúng ta sẽ chọn trên tập các cạnh của G' và G'' mà, như thường lệ, chúng ta sẽ coi chúng là giống hệt nhau. Kí hiệu t'_{ij} là số các (i, j) – rừng trong G' và t''_{ij} là số các (i, j) – rừng trong G'' . Từ giả thiết quy nạp của bài toán, $\sum_{i,j} t'_{ij} x^i y^j = T_{G-e_m}(x, y)$ và $\sum_{i,j} t''_{ij} x^i y^j = T_{G/e_m}(x, y)$. Chúng ta sẽ phân biệt ba trường hợp thông

thường sau tùy theo bản chất tự nhiên của e_m . Các lập luận trong (i), khi e_m là một cạnh cầu, và (ii), khi e_m là một cạnh khuyên, gần như giống nhau về mặt nguyên văn và các lập luận trong (iii) cho $G - e_m$ và G/e_m cũng vậy; tuy nhiên, do tầm quan trọng đặc biệt của kết quả này, chúng ta sẽ trình bày tất cả các chi tiết của phép chứng minh tầm thường này.

(i) e_m là một cạnh cầu. Khi đó, e_m nằm trong mọi rừng khung của G và một đồ thị con F của G là một rừng khung khi và chỉ khi $e_m \in E(F)$ và $F - e_m$ là một rừng khung của $G - e_m$. Ngoài ra, e_m là một cạnh hoạt động trong mọi rừng khung F của G , bởi vì nó không thuộc bất kì một chu trình $Z_F(e_j)$ nào.

Rõ ràng, với $1 \leq i \leq m - 1$, cạnh e_i hoạt động bên trong (bên ngoài) trong G đối với F khi và chỉ khi nó hoạt động bên trong (bên ngoài) trong $G - e_m$ đối với $F - e_m$, bởi vì, khi kiểm tra hoạt động của e_i , chúng ta thực hiện trên chính xác cùng một tập các cạnh có liên quan trong mỗi trường hợp. Do đó, F là một (i, j) - rừng của G khi và chỉ khi $e_m \in E(F)$ và $F - e_m$ là một $(i - 1, j)$ - rừng của $G - e_m$, nên $t_{ij} = t'_{i-1,j}$.

Như vậy, từ giả thiết quy nạp và một số tính chất cơ bản của đa thức Tutte,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j &= \sum_{i,j} t'_{i-1,j} x^i y^j = x \sum_{i,j} t'_{i-1,j} x^{i-1} y^j \\ &= x \sum_{i,j} t'_{i,j} x^{i-1} y^j = x T_{G-e_m}(x, y) = T_G(x, y), \end{aligned}$$

như đã tuyên bố.

(ii) e_m là một cạnh khuyên. Khi đó, e_m không nằm trong bất kỳ một rừng khung nào của G và một đồ thị con F của G là một rừng khung của G khi và chỉ khi nó là một rừng khung của $G - e_m$. Hơn nữa, e_m là hoạt động ngoài trong mọi rừng khung F của G , bởi vì nó là cạnh duy nhất của $Z_F(e_m)$. Ngoài ra, với $1 \leq i \leq m - 1$, cạnh e_i là hoạt động trong (ngoài) trong G đối với F khi và chỉ khi nó là hoạt động trong (ngoài) trong $G - e_m$ đối với cùng một rừng khung F . Do đó, F là một (i, j) - rừng của G khi và chỉ khi nó là một $(i, j - 1)$ - rừng của $G - e_m$.

Như vậy, $t_{ij} = t'_{i,j-1}$, nên

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j &= \sum_{i,j} t'_{i,j-1} x^i y^j = y \sum_{i,j} t'_{i,j-1} x^i y^{j-1} \\ &= y T_{G-e_m}(x, y) = T_G(x, y). \end{aligned}$$

(iii) e_m không phải là một cạnh cầu cũng như không phải là một cạnh khuyên. Nói một cách tầm thường, F là một rừng khung của $G - e_m$ khi và chỉ khi nó là một rừng khung của G và $e_m \notin E(F)$. Ngoài ra, nếu F là một (i, j) - rừng của $G - e_m$ thì nó sẽ là một (i, j) - rừng của G , bởi vì mọi cạnh khác đều đứng trước e_m và do e_m không phải là một cạnh khuyên nên $Z_F(e_m)$ có chứa các cạnh khác ngoài e_m .

Tương tự, F là một rừng khung của G/e_m khi và chỉ khi $e_m \notin E(F)$ và $F + e_m$ là một rừng khung của G . Ngoài ra, nếu F là một (i, j) - rừng của G/e_m thì $F + e_m$ là một (i, j) - rừng của G , bởi vì mọi cạnh khác đều đứng trước e_m và do e_m không phải là một cạnh cầu nên $U_{F+e_m}(e_m)$ có chứa các cạnh khác ngoài e_m .

Từ các phân tích nêu ở trên, chúng ta dễ dàng suy ra rằng $t_{ij} = t'_{ij} + t''_{ij}$ nên, từ giả thiết quy nạp và một số tính chất cơ bản của đa thức Tutte,

$$\begin{aligned} T_G(x, y) &= \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j \\ &= \sum_{i,j} t'_{ij} x^i y^j + \sum_{i,j} t''_{ij} x^i y^j \\ &= T_{G-e_m}(x, y) + T_{G/e_m}, \end{aligned}$$

như đã tuyên bố.

Điều này hoàn tất phép chứng minh của bước quy nạp. □

Định lí trên có thể coi là một cách định nghĩa khác của đa thức Tutte. Như chúng ta đã đề cập, đây chính xác là cách định nghĩa ban đầu của Tutte: đối với một đồ thị liên thông G với một thứ tự bất kì nào đó trên các cạnh,

$$T_G(x, y) = \sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j,$$

trong đó $t_{ij} = t_{ij}(G)$ là số các cây khung G có i hoạt động trong và j hoạt động ngoài.

Rõ ràng là, với mọi thứ tự $<$ xác định trên các cạnh, chúng ta đều có một đa thức $T_<$, nhưng điều đáng lưu ý ở đây đó là đa thức $T_<$ này không phụ thuộc vào thứ tự xác định trên tập các cạnh mà chúng ta chọn. Khi chứng minh Kết quả 10.5.1), chúng ta đã được hỗ trợ rất nhiều bởi định nghĩa trước đó của đa thức Tutte, nghĩa là chúng ta đã biết trước rằng có một đa thức với các tính chất phù hợp.

Để hiểu rõ bản chất của các hoạt động trong và các hoạt động ngoài, chúng ta hãy xem Kết quả 10.5.1) có thể được chứng minh như thế nào từ các nguyên lý đầu tiên mà không cần viện dẫn bất kỳ kết quả nào trước đó.

Chứng minh thứ hai của kết quả 10.5.1.

Chúng ta hãy bắt đầu với tính độc lập của $T_<$ với thứ tự $<$ xác định trên tập các cạnh. Để đơn giản hóa cách ký hiệu, chúng ta hãy giả sử rằng đồ thị của chúng ta là liên thông, bởi vì phần mở rộng cho trường hợp tổng quát là tầm thường.

Giả sử $<$ là thứ tự $e_1 < e_2 < \dots < e_m$, trong đó $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, và giả sử $<'$ là thứ tự nhận được từ $<$ bằng cách đổi chỗ e_h và e_{h+1} .

Như vậy, trong thứ tự $<'$, chúng ta sẽ có

$$e_1 <' e_2 <' \dots <' e_{h-1} <' e_{h+1} <' e_h <' e_{h+2} <' \dots <' e_{m-1} <' e_m.$$

Kế tiếp, chúng ta hãy xác định các trọng lượng w và w' trên tập $\mathcal{T}$ gồm các cây khung của G : với $T \in \mathcal{T}$, kí hiệu $w(T) = x^i y^j$ nếu T là một (i, j) – cây đối với $<$ và $w'(T) = x^i y^j$ nếu T là một (i, j) – cây đối với $<'$. Khi đó, $T_{<}(G)$ và $T_{<' }(G)$ là tổng của các w – trọng lượng và các w' – trọng lượng: $T_{<}(G) = \sum_{\mathcal{T}} w(T)$ và $T_{<' }(G) = \sum_{\mathcal{T}} w'(T)$. Chúng ta hãy phân hoạch $\mathcal{T}$ thành các tập nhỏ hơn (thành các tập có kích thước 1 và 2) và chỉ ra rằng, với mỗi tập, tổng các w – trọng lượng của một tập chính là tổng các w' – trọng lượng của nó. Khi đó, $T_{<}(G) = T_{<' }(G)$.

Các tập nhỏ được đề cập đến ở trên chính là các quỹ đạo của một phép nghịch biến $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$, $T \mapsto T'$ được xác định như sau. Với $T \in \mathcal{T}$, nếu có một trong e_h hoặc e_{h+1} nằm trong tập chu trình của cái kia (nghĩa là $e_h \in Z_T(e_{h+1})$ hoặc $e_{h+1} \in Z_T(e_h)$) thì kí hiệu T' là cây nhận được từ T bằng cách hoán đổi e_h và e_{h+1} ; trường hợp ngược lại, kí hiệu $T' = T$. Rõ ràng là ánh xạ $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ xác định bởi $T \mapsto T'$ thực sự là một phép nghịch biến, nghĩa là $(T')' = T$.

Nhận thấy rằng do mọi cạnh e khác với e_h và e_{h+1} đều có cùng hoạt động đối với T trong $<$ như trong $<'$ nên $w(T) = w'(T)$ trừ khi ít nhất một trong e_h và e_{h+1} có các hoạt động khác đối với T trong $<$ và $<'$, điều này chỉ có thể xảy ra nếu $T \neq T'$.

Như vậy, để chứng minh $T_{<}(G) = T_{<' }(G)$, chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng

$$w(T) + w(T') = w'(T) + w'(T'),$$

bất cứ khi nào $T \in \mathcal{T}$, $T \neq T'$.

Giả sử mọi cạnh $e \neq e_h, e_{h+1}$ có cùng hoạt động đối với T cũng như đối với T' . Lưu ý rằng nó không liên quan đến việc chúng ta chọn $<$ hoặc $<'$, bởi vì $e < f$ khi và chỉ khi $e <' f$. Do các lát cắt và các chu trình là giống nhau nên các hoạt động của e_h đối với T và T' trong $<$ cũng giống như các hoạt động của e_{h+1} đối với T và T' trong $<'$. Do đó, trong trường hợp này, $w(T) = w'(T')$ và $w(T') = w'(T)$. Như vậy, chúng ta có thể giả sử rằng có một số cạnh $e \neq e_h, e_{h+1}$ hoạt động đối với T và không hoạt động đối với T' . Bằng cách hoán đổi nhãn của e_h và e_{h+1} , và đổi chỗ $<$ với $<'$, chúng ta cũng có thể giả sử rằng $e_h \in E(T)$, $e_{h+1} \in E(T')$.

Giả sử $e \in E(T)$, $e \neq e_h$, hoạt động đối với T nhưng không hoạt động đối với T' . Do đó, e là phần tử tối tiểu của $U_T(e)$, nhưng phần tử tối tiểu f của $U_{T'}(e)$ lại nhỏ hơn e . Khi đó, $U_T(e) \neq U_{T'}(e)$, nên $e_{h+1} \in U_T(e)$ và do e hoạt động đối với T nên $e < e_{h+1}$. Kế tiếp, do f thuộc một trong $U_T(e)$, $U_{T'}(e)$ nhưng không thuộc cái còn lại nên $f \in U_T(e_h) = U_{T'}(e_{h+1})$, trong khi $e_{h+1} \in U_T(e)$ tương đương với việc $e \in Z_T(e_{h+1}) = Z_{T'}(e_h)$. Nhưng khi đó e_h, e_{h+1} sẽ không hoạt động đối với T, T' theo một trong hai thứ tự (bởi vì e, f đứng trước e_h, e_{h+1} trong cả hai thứ tự), e nằm trong các chu trình liên quan và f cũng nằm trong các lát cắt liên quan. Như vậy, $w(T) = w'(T)$ và $w(T') = w'(T')$.

Cuối cùng, giả sử $e \notin E(T)$, $e \neq e_{h+1}$, hoạt động đối với T nhưng không hoạt động đối với T' . Do đó, e là phần tử tối tiểu của $Z_T(e)$, nhưng phần tử tối tiểu f của $Z_{T'}(e)$ lại nhỏ hơn e . Khi đó, $e_h \in Z_T(e)$, nghĩa là $e \in U_T(e_h) = U_{T'}(e_{h+1})$, và $f \in Z_T(e_{h+1}) = Z_{T'}(e_h)$. Như vậy, như trước đây, e_h, e_{h+1} không hoạt động trong cả hai trường hợp, nên $w(T) = w'(T)$ và $w(T') = w'(T')$.

Điều này hoàn tất phần chứng minh $T_{<}(G) = T_{<' }(G)$ của chúng ta.

Để chứng minh tính độc lập của t_{ij} với thứ tự (nghĩa là $t_{ij} = t_{ij}(G)$ đơn giản chỉ là một hàm của đồ thị G), chúng ta nhận thấy rằng đa thức đồ thị $\tilde{T}(G) = \sum_{i,j} t_{ij}(G) x^i y^j$ thỏa mãn công thức truy hồi và điều kiện biên, nên $\tilde{T}(G)$ chính là đa thức Tutte T_G .

Do $t_{00}(E_n) = 1$ và $t_{ij}(E_n) = 0$ nếu $i + j > 0$ nên chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng $\tilde{T}(E_n) = 1$.

Kế tiếp, chúng ta hãy chuyển sang kiểm tra các quan hệ truy hồi. Chọn ra một phần tử của $E(G)$ và phân biệt ba trường hợp sau đây tùy theo tính chất của phần tử này. Chúng ta được lợi rất nhiều từ tính độc lập với thứ tự của $t_{ij}(G)$: giả sử cho trước một cạnh $e \in E(G)$, chúng ta có thể và sẽ giả định rằng e là phần tử cuối cùng trong thứ tự này, nghĩa là $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ và cạnh mà chúng ta quan tâm chính là $e = e_m$.

(i) *Giả sử e_m là một cạnh cầu.* Khi đó, e_m nằm trong mọi rừng khung của G và nó là một cạnh hoạt động trong mọi rừng khung. Như vậy, các rừng khung của $G - e_m$ sẽ tương ứng 1 – 1 với các rừng khung của G với một (i, j) – rừng của $G - e_m$ tương ứng 1 – 1 với một $(i + 1, j)$ – rừng nào đó của G .

Nhưng khi đó

$$\tilde{T}(G) = \sum t_{i+1,j}(G) x^{i+1} y^j = x \sum t_{ij}(G - e_m) x^i y^j = x \tilde{T}(G - e_m).$$

(ii) *Giả sử e_m là một cạnh khuyên.* Khi đó, e_m là một cạnh hoạt động ngoài đối với mọi rừng khung của G , nên các rừng khung của $G - e_m$ sẽ tương ứng 1 – 1 với các rừng khung của G với một (i, j) – rừng của $G - e_m$ tương ứng 1 – 1 với một $(i, j + 1)$ – rừng nào đó của G .

Nhưng khi đó

$$\tilde{T}(G) = \sum t_{i,j+1}(G) x^i y^{j+1} = y \sum t_{ij}(G - e_m) x^i y^j = y \tilde{T}(G - e_m).$$

(iii) *Giả sử e_m không phải là một cạnh cầu cũng như không phải là một cạnh khuyên.* Phân hoạch tập $\mathcal{F}_{ij}$ các (i, j) – rừng thành $\mathcal{F}'_{ij} \cup \mathcal{F}''_{ij}$ với $\mathcal{F}'_{ij} = \{F \in \mathcal{F}_{ij} : e_m \in E(F)\}$. Khi đó, $\{F - e_m : F \in \mathcal{F}'_{ij}\}$ sẽ tương ứng với tập các (i, j) – rừng của G/e_m , bởi vì e_m không hoạt động trong đối với bất kỳ một rừng $F \in \mathcal{F}'_{ij}$ nào. Ngoài ra, do e_m không hoạt động ngoài đối với bất kỳ một rừng $F \in \mathcal{F}''_{ij}$ nào, nên $\mathcal{F}''_{ij}$ sẽ tương ứng với tập các (i, j) – rừng của $G - e_m$.

Như vậy,

$$\tilde{T}(G) = \tilde{T}(G - e_m) + \tilde{T}(G/e_m),$$

như chúng ta đã tuyên bố. □

Cách định nghĩa mới, khai triển theo các cây khung, này có một số lợi thế nhất định so với cách định nghĩa cũ, cụ thể là,

$$T_G(x, y) = S(G; x - 1, y - 1) = \sum_{F \subseteq E} (x - 1)^{r(E) - r(F)} (y - 1)^{n(F)}.$$

Thứ nhất, tổng mới này (thường) có ít số hạng hơn so với tổng cũ. Thứ hai, quan trọng hơn, trong khai triển mới này, hệ số của $x^i y^j$ chứ không phải hệ số của $(x-1)^i (y-1)^j$ được xác định một cách rõ ràng và hóa ra là nó không âm. (Chúng ta có thể nhận được điều này từ định nghĩa đệ quy, nhưng điều đó không cung cấp cho chúng ta bất kỳ một biểu thức rõ ràng nào cho các hệ số.) Thứ ba, một cách lựa chọn sáng suốt thứ tự trên các cạnh thường sẽ có lợi hơn trong việc chứng minh các kết quả về các hệ số $t_{ij} = t_{ij}(G)$.

Như một ứng dụng đơn giản của Kết quả 10.5.1), hãy xem chúng ta có thể nói được những gì về các hệ số của các số hạng nhỏ nhất, cụ thể là t_{00}, t_{10}, t_{01} . Đầu tiên, do $T_{E_n}(x, y) = 1$, giả sử rằng $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$, với $m \geq 1$, đây cũng chính là kích thước của G . Lưu ý rằng, bất kể rừng khung F của chúng ta là gì, e_1 chắc chắn là một cạnh hoạt động: hoạt động trong nếu $e_1 \in E(F)$ và hoạt động ngoài trong trường hợp ngược lại. Đặc biệt, $t_{00} = 0$. Rõ ràng, do $t_{10}(K_2) = 1$ và $t_{01}(K_2) = 0$ nên chúng ta có thể giả sử rằng $m \geq 2$. Nếu G có ít nhất hai khối sao cho mỗi khối có chứa ít nhất một cạnh thì chúng ta luôn có thể chọn ra một thứ tự trên $E(G)$ sao cho e_1 và e_2 nằm trong các khối phân biệt của G . Khi đó, cả e_1 và e_2 đều hoạt động đối với mọi rừng khung, nên $t_{10} = t_{01} = 0$.

Kế tiếp, giả sử G gồm một đồ thị 2 – liên thông và các đỉnh cô lập. Do việc bổ sung thêm các đỉnh cô lập không làm thay đổi đa thức Tutte nên, trong các nghiên cứu của chúng ta về t_{10} và t_{01} , chúng ta luôn có thể giả định rằng bản thân G là một đồ thị 2 – liên thông. Điều này về mặt thực tế chỉ để chúng ta có thể gọi một quân bích là một quân bích: t_{ij} là số các (i, j) – cây của G chứ không phải là số các (i, j) – rừng. Tuy nhiên, về mặt tranh luận, điều này gần như hoàn toàn là không liên quan.

Như đã lưu ý từ trước đó, e_1 là hoạt động đối với mọi cây khung. Hơn nữa, cạnh e_2 cũng hoạt động trừ khi lát cắt hoặc chu trình của nó (tùy theo trường hợp nào phù hợp) có chứa e_1 . Như vậy, nếu T là một $(1, 0)$ – cây thì $e_1 \in E(F)$ và $e_2 \in U_T(e_1)$. Kí hiệu T^* là cây thu được từ T bằng cách hoán đổi e_1 và e_2 : do $e_2 \in U_T(e_1)$ (nghĩa là $e_1 \in Z_T(e_2)$) nên T^* cũng là một cây khung. Rõ ràng, T^* là một $(0, 1)$ – cây: cạnh hoạt động duy nhất của nó là e_1 và nó là một cạnh hoạt động ngoài.

Ngay lập tức, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng quá trình trên hoàn toàn có thể được đảo ngược: một $(0, 1)$ – cây T không chứa e_1 nhưng chứa e_2 và, bằng cách hoán đổi e_1 và e_2 , chúng ta sẽ thu được một $(1, 0)$ – cây T^* . Như vậy, ánh xạ $T \mapsto T^*$ chỉ ra cho chúng ta một phép tương ứng 1 – 1 giữa tập các $(1, 0)$ – cây và tập các $(0, 1)$ – cây. Đặc biệt, điều này cung cấp cho chúng ta kết quả sau đây:

Kết quả 10.5.2.

Giả sử $\sum_{i,j} t_{ij} x^i y^j$ là đa thức Tutte của một đồ thị G với ít nhất hai cạnh.

Khi đó, $t_{10} = t_{01}$.

Đẳng thức $t_{10} = t_{01}$ là một trong số một họ vô hạn các đẳng thức đúng cho các hệ số t_{ij} của đa thức Tutte.

Brylawski đã chứng minh được rằng nếu $\|G\| > h$ thì

$$\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^{h-i} (-1)^j \binom{h-i}{j} t_{ij} = 0.$$

Như vậy, nếu $\|G\| > 0$ thì $t_{00} = 0$; nếu $\|G\| > 1$ thì $t_{10} = t_{01}$; nếu $\|G\| > 2$ thì $t_{20} - t_{11} + t_{02} = t_{10}$; v.v...

Trên thực tế, $t_{10} = t_{10}(G)$ là một bất biến đồ thị quan trọng theo đúng nghĩa của nó: nó thường được gọi là **bất biến sắc số của G** và được kí hiệu lại bởi $\theta(G)$. Thuật ngữ này có thể được giải thích bằng định lí đơn giản sau đây. Phần đầu tiên chỉ ra mối liên hệ giữa bất biến sắc số với đa thức sắc số và phần thứ hai chỉ ra θ là bất biến của các ước con của các đồ thị có ít nhất hai cạnh.

Kết quả 10.5.3.

(i) Với mọi đồ thị G , đạo hàm $P'_G(1)$ của đa thức sắc số $P_G(x)$ sẽ thỏa mãn

$$P'_G(1) = (-1)^{r(G)+1} \theta(G).$$

(ii) Giả sử G và H là các đồ thị đồng dạng, mỗi đồ thị đều có ít nhất hai cạnh.

Khi đó, $\theta(G) = \theta(H)$.

Chứng minh kết quả 10.5.3.

(i) Tính đúng đắn của khẳng định trên được suy ra ngay lập tức từ việc

$$P_G(x) = (-1)^{r(G)} x^{k(G)} T_G(1-x, 0) = (-1)^{r(G)} x^{k(G)} \sum_{i=0}^{n-1} t_{i0} (1-x)^i.$$

(ii) Chúng ta biết rằng G và H sẽ có các ước con đồng dạng. Như vậy, để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng nếu H thu được từ G bằng cách chia nhỏ một cạnh $e \in E(G)$ thành hai cạnh, tạm giả sử là e_1 và e_2 , thì $\theta(H) = \theta(G)$.

Nếu e là một cạnh cầu của G thì $\theta(G) = \theta(H) = 0$, bởi vì bất biến sắc số của một đồ thị có ít nhất hai khối không tầm thường là 0. Nếu e không phải là một cạnh cầu của H thì e_1 cũng không phải là một cạnh cầu cũng như không phải là một cạnh khuyên của H .

Như vậy, từ công thức truy hồi của đa thức Tutte,

$$\theta(H) = \theta(H - e_1) + \theta(H/e_1).$$

Rõ ràng, e_2 là một khối của $H - e_1$, nên đồ thị này có ít nhất hai khối không tầm thường. Điều này ngụ ý với chúng ta rằng $\theta(H - e_1) = 0$. Ngoài ra, $H/e_1 \cong G$, nên $\theta(G) = \theta(H)$. $\square$

Việc khai triển theo các cây khung cũng cung cấp cho chúng ta một số thông tin quan trọng về độ lớn của các hệ số của đa thức sắc số.

Kết quả 10.5.4.

Giả sử G là một đồ thị liên thông bậc n với đa thức sắc số $P_G(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a_j x^{n-j}$.

Khi đó, $a_0 = 1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_l$, với $l = \lfloor n/2 \rfloor$.

Chứng minh kết quả 10.5.4.

Chúng ta biết rằng

$$P_G(x) = (-1)^{n-1}x \sum_{i=0}^{n-1} t_{i0}(-x+1)^i,$$

nên

$$(-1)^j a_j = (-1)^{n-1} \sum_{i=n-j-1}^{n-1} (-1)^{n-j-1} t_{i0} \binom{i}{n-j-1},$$

nghĩa là

$$a_j = \sum_{i=n-j-1}^{n-1} t_{i0} \binom{i}{n-j-1}.$$

Như vậy, nếu $1 \leq j \leq n/2$ thì

$$a_j - a_{j-1} = t_{n-j-1,0} + \sum_{i=n-j}^{n-1} t_{i0} \left\{ \binom{i}{n-j-1} - \binom{i}{n-j} \right\} \geq t_{n-j-1,0},$$

bởi vì $n-j-1 \geq n/2-1 \geq (i-1)/2$ với mọi $i \leq n-1$ nên $\binom{i}{n-j-1} \geq \binom{i}{n-j}$. □

Các quan hệ $\deg_x T_G(x, y) = r(G)$ và $\deg_y T_G(x, y) = n(G)$ mà chúng ta đã gặp trước đó sẽ được suy ra ngay từ thực tế $t_{ij}(G)$ là số các cây khung với i hoạt động trong và j hoạt động ngoài. Hơn nữa, nếu G không có chứa cạnh khuyên nào và F là một rừng khung của G thì, với một thứ tự mà trong đó mọi cạnh của F đều đứng trước mọi cạnh khác, F sẽ có $r(G)$ hoạt động trong và 0 hoạt động ngoài. Tương tự, nếu G không có chứa cạnh cầu nào và F là một rừng khung của G thì, với một thứ tự mà trong đó mọi cạnh của F đều đứng trước mọi cạnh khác, F sẽ có 0 hoạt động trong và $n(G)$ hoạt động ngoài. Đặc biệt, $t_{r(G),0} \geq 1$ và $t_{0,n(G)} \geq 1$. Như vậy, $\max\{i-j: t_{ij}(G) \neq 0\} = r(G)$ và $\max\{j-i: t_{ij}(G) \neq 0\} = n(G)$. Bằng cách xem xét các thứ tự ít rõ ràng hơn trên tập các cạnh, chúng ta có thể chỉ ra thêm rằng một số hệ số khác cũng khác không. Chúng ta sẽ đưa ra hai ví dụ kinh điển cho điều này.

Kết quả 10.5.5.

Giả sử G là một đồ thị 2 – liên thông không có chứa cạnh khuyên với n đỉnh và m cạnh, và $T_G(x, y) = \sum_{ij} t_{ij} x^i y^j$.

Khi đó, $t_{i0} > 0$ với mọi i , $1 \leq i \leq n-1$ và $t_{0j} > 0$ với mọi j , $1 \leq j \leq m-n+1$.

Chứng minh kết quả 10.5.5.

Giả sử cho trước một cây khung T , với $E_0 \subset E(G)$, kí hiệu $\gamma_T(E_0)$ là hợp của tập các dây cung với các chu trình tương ứng có giao với E_0 cùng với tập các cạnh cây với lát cắt tương ứng có giao với E_0 :

$$\gamma_T(E_0) = \{e \in E(G) : Z_T(e) \cap E_0 \neq \emptyset\} \cup \{e \in E(G) : U_T(e) \cap E_0 \neq \emptyset\}.$$

Lưu ý rằng $\gamma_T(E_0) \supset E_0$. Kí hiệu $\overline{\gamma_T}(E_0)$ là bao đóng của E_0 đối với γ – toán tử này:

$$\overline{\gamma_T}(E_0) = E_0 \cup E_1 \cup \dots,$$

trong đó $E_{k+1} = \gamma_T(E_k)$.

Do G là một đồ thị 2 – liên thông nên $\overline{\gamma_T}(E_0) = E(G)$ bất cứ khi nào E_0 là một tập không rỗng các cạnh.

Như vậy, $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_l = E(G)$ đối với một chỉ số l nào đó.

(i) Với $1 \leq i \leq n - 1$, kí hiệu E_0 là một tập gồm i cạnh của T , $E_1 = \gamma_T(E_0)$, $E_2 = \gamma_T(E_1)$, v.v...

Chúng ta biết rằng $E_l = E(G)$ đối với một chỉ số l nào đó. Giả sử $<$ là một thứ tự tương thích với dãy $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_l = E(G)$, nghĩa là một thứ tự mà các cạnh của E_0 xuất hiện đầu tiên, tiếp theo là các cạnh của $E_1 \setminus E_0$, các cạnh của $E_2 \setminus E_1$, v.v..., kết thúc bởi các cạnh của $E_l \setminus E_{l-1}$. Khi đó, mỗi cạnh của E_0 đều hoạt động và không có cạnh nào khác hoạt động. Như vậy, T là một $(i, 0)$ – cây theo thứ tự $<$, nên $t_{i0} > 0$.

(ii) Với $1 \leq j \leq m - n + 1$, chúng ta hãy bắt đầu với một tập E_0 gồm j dây cung của T , nghĩa là một tập $E_0 \subset E(G) \setminus E(T)$, và tiến hành tiếp tục như trong (i). Một lần nữa, các cạnh hoạt động chính là các cạnh của E_0 . Như vậy, T là một $(0, j)$ – cây, nên $t_{0j} > 0$.

Để hoàn tất phép chứng minh, nhắc lại rằng $\deg_x T_G(x, y) = r(G) = n - 1$ và $\deg_y T_G(x, y) = n(G) = m - n + 1$. □

Còn hệ số t_{11} thì sao? Nhận thấy rằng, với một chu trình C_n , chúng ta sẽ có $T_{C_n} = y + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$, nên $t_{11}(C_n) = 0$. Ngoài ra, với một cạnh dày I_k gồm hai đỉnh được nối với nhau bởi $k \geq 2$ cạnh, chúng ta sẽ có $T_{I_k} = x + y + y^2 + \dots + y^{k-1}$, nên $t_{11}(I_k) = 0$. Như chúng ta sẽ chỉ ra ngay sau đây, với mọi đồ thị 2 – liên thông không có chứa cạnh khuyên khác, chúng ta đều có $t_{11} \geq 1$.

Kết quả 10.5.6.

Giả sử G là một đồ thị 2 – liên thông không có chứa cạnh khuyên không phải là một chu trình cũng không phải là một cạnh dày.

Khi đó, $t_{11}(G) > 0$.

Chứng minh kết quả 10.5.6.

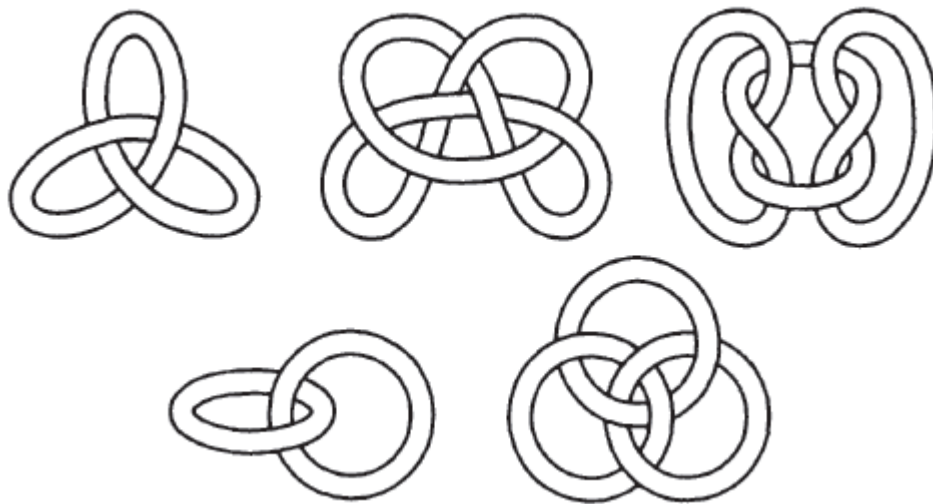
Dễ dàng nhận thấy rằng G sẽ có chứa một chu trình C và một cạnh e_1 nối một đỉnh của C với một đỉnh không thuộc C . Giả sử T là một cây khung chứa e_1 và tất cả các cạnh của C ngoại trừ một cạnh e nào đó, kí hiệu $E_0 = \{e_1, e_2\}$. Giả sử $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_l = E(G)$ như trong phép chứng minh của Kết quả 10.5.5), với $E_{k+1} = \gamma_T(E_k)$, và $<$ là một thứ tự tương thích với dãy lồng nhau này. Rõ ràng, đối với thứ tự này, T có chính xác một cạnh hoạt động trong, cụ thể là e_1 , và chính xác một cạnh hoạt động ngoài, cụ thể là e_2 .

Như vậy, $t_{11}(G) > 0$, như đã tuyên bố. □

Năm 1968, Ronald Read đã phỏng đoán rằng dãy các mô đun của các hệ số của đa thức sắc số là **unimodal**, nghĩa là, với cách ký hiệu như trong Kết quả 10.5.4), $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m \geq a_{m+1} \geq \dots \geq a_{n-1}$ với một chỉ số m nào đó. Năm 1974, Hoggar đã thắt chặt điều này với việc phỏng đoán rằng các hệ số này phải lõm logarit mạnh. Phỏng đoán của Hoggar còn được gọi là phỏng đoán Read – Hoggar. Giả thuyết Read – Hoggar đã không được giải quyết trong hơn 40 năm trước khi June Huh chứng minh nó vào năm 2009, trong quá trình học tiến sĩ của ông, bằng cách sử dụng các phương pháp đến từ hình học đại số. Một phỏng đoán có liên quan của Tutte khẳng định rằng t_{ij} tạo thành các dãy unimodal theo i và j một cách riêng biệt và một phỏng đoán tương tự của Seymour và Welsh cho các matroid đã bị Schwärzker bác bỏ vào năm 1993.

10.6. Đa thức của các nút thắt và các mắt xích

Các nút thắt và các mắt xích dưới dạng các đối tượng toán học được Listing giới thiệu vào năm 1847 và một cách độc lập bởi Thomson vào năm 1869. Trong một bài báo của ông về các chuyển động xoáy, Thomson gợi ý rằng, để có thể hiểu đúng về không gian, chúng ta phải nghiên cứu các nút thắt và các mắt xích. Các thách thức đã được đưa ra bởi một cộng tác viên của Thomson, Tait, trong một bài giảng vào năm 1876 và trong một loạt bài báo tiếp theo của ông. Vào những năm 1880, Tait, Kirkman, Little đã cố gắng thống kê các nút thắt với tối đa không quá mười giao điểm.

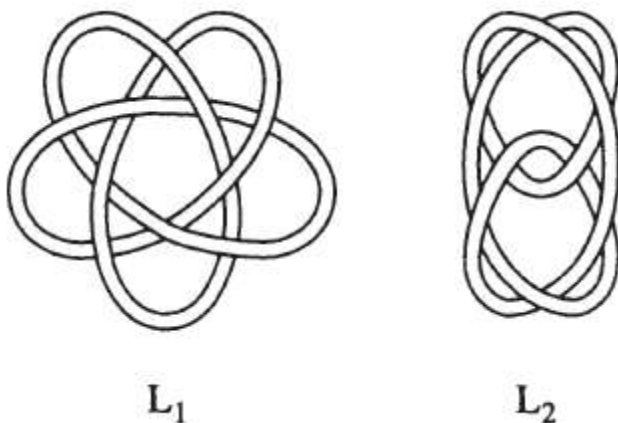


Hình vẽ minh họa các nút thắt và các mắt xích nêu trong bài báo vào năm 1869 của Thomson; nút đầu tiên là nút thắt hình tam giác (thuận tay phải), hai mắt xích là các mắt xích Hopf và các vòng Borromean.

Tuy nhiên, lý thuyết nút thắt chỉ thực sự được bắt đầu vào những năm 1920 bởi các công trình nghiên cứu của Dehn, Alexander, Reidemeister, những người này đã giới thiệu nhiều loại bất biến nút thắt khác nhau. Những bất biến nút thắt này cũng đã cho phép Alexander và Briggs hoàn thành việc phân loại nghiêm ngặt các nút thắt với tối đa không quá chín giao điểm. Thật kỳ lạ, một sai lầm trong bảng phân loại của Little đã được Perko, một nhà toán học nghiệp dư, sửa chữa lại vào năm 1974, khi ông chỉ ra rằng hai nút thắt với mười giao điểm được Little cho là khác nhau, trên thực tế, lại tương đương nhau. Hầu hết các ký hiệu được sử dụng phổ biến nhất cho các nút thắt chính là các ký hiệu đã được giới thiệu bởi Alexander và Briggs.

Tất cả những điều vừa trình bày ở trên đều thuộc về thời kỳ cổ điển của lý thuyết nút thắt và chúng ta sẽ nói rất ít về chúng. Mọi quan tâm của chúng ta đối với lý thuyết nút chỉ mới bắt đầu từ một thực tế là vào những năm 1980 khi Jones đã bắt đầu một cuộc cách mạng trong lý thuyết nút bằng cách đưa ra một đa thức bất biến mới, mà sau này được chứng minh là có liên quan chặt chẽ với đa thức Tutte. Mục đích của chúng ta trong phần này của bài viết là giới thiệu đa thức này cùng với một số đa thức liên quan và chỉ ra mối liên hệ của chúng với đa thức Tutte.

Mặc dù trong mục **8.1. Các đồ thị Cayley và Schreier**, chúng ta đã đề cập sơ qua về các nút thắt, khi chúng ta thảo luận về các nhóm cơ bản của chúng, nhưng đối với phần này, chúng ta sẽ phải thiết lập bối cảnh cẩn thận hơn một chút. **Một mắt xích L với n thành phần** được định nghĩa là một tập con của $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3$ gồm n đường gấp khúc đơn khép kín phân biệt. **Một nút thắt** được định nghĩa là một mắt xích liên thông. Mặt cầu 3 – chiều S^3 luôn được định hướng trước; đôi khi các thành phần của L cũng được định hướng, trong trường hợp đó chúng ta có một **mắt xích định hướng**. Chúng ta luôn giả định rằng các mắt xích của chúng ta chỉ là các đường gấp khúc để tránh việc phải khảo sát các chuỗi xoắn vô hạn; sẽ tốt không kém nếu giả định rằng các mắt xích của chúng ta là các đa tạp con trơn của S^3 – trên thực tế, trong các bản vẽ của chúng ta, chúng ta sẽ luôn tuân theo quy ước này. Hai mắt xích L_1 và L_2 được gọi là **tương đương** nếu tồn tại một đồng cấu bảo toàn hướng $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sao cho $h(L_1) = L_2$. Nếu L_1 và L_2 đều được định hướng thì $h(L_1)$ phải được định hướng giống như L_2 .



Hình vẽ minh họa hai nút tương đương L_1 và L_2 .

Tính tương đương cũng có thể được định nghĩa theo thuật ngữ đồng luân: hai mắt xích được gọi là **đồng vị xung quanh** (hoặc **tương đương**) nếu chúng có thể được biến dạng vào nhau. Chẳng hạn, nếu L_1 và L_2 là các nút cho trước được xác định bởi các ánh xạ tuyến tính từng phần $h_i: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, với $h_i(0) = h_i(1)$, $i = 0,1$, thì L_1 và L_2 được gọi là tương đương nếu có một ánh xạ tuyến tính từng phần $h: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sao cho $h_0(x) = h(0, x)$, $h_1(x) = h(1, x)$ và $h_t(x) = h(t, x)$ xác định một nút thắt với mọi t , nghĩa là, $h(t, 0) = h(t, 1)$ với mọi t .

Trên thực tế, chúng ta không cần quá nhiều đến sự tinh vi của lý thuyết topo trong việc khảo sát các bài toán của lý thuyết nút thắt, bởi vì rất dễ để xem các mắt xích như các đối tượng tổ hợp thuần túy. Những gì chúng ta phải làm đó là xem xét các **sơ đồ mắt xích**: các **hình chiếu** của các mắt xích trên $\mathbb{R}^2$. Chúng ta luôn có thể giả định rằng hình chiếu là một đa đồ thị phẳng 4 – chính quy với các cạnh khuyên, trong đó một cạnh khuyên sẽ đóng góp thêm 2 đơn vị vào bậc của đỉnh tương ứng với nó. Hơn nữa, tại mỗi đỉnh, các cạnh

tạo thành các góc dương thực sự sao cho các hình chiếu của hai phần của mắt xích sẽ “giao nhau hoàn toàn”, thay vì chạm vào nhau. Như vậy, một sơ đồ mắt xích là một đồ thị phẳng 4 – chính quy (hữu hạn) với một số cấu trúc bổ sung, cụ thể là tại mỗi đỉnh, hai cặp cạnh sẽ giao nhau theo một trong hai cách: một cái nằm bên dưới hoặc bên trên cái kia. Lưu ý rằng một đồ thị phẳng 4 – chính quy với bậc n sẽ tạo ra 2^n sơ đồ mắt xích; đồ thị 4 – chính quy này được gọi là **universe** của các sơ đồ mắt xích phát sinh từ nó.



Hình vẽ minh họa các sơ đồ phát sinh từ universe U của một tam giác với các cạnh kép; có bốn sơ đồ nữa từ hai cái cuối cùng bằng cách thực hiện phép quay. Cái đầu tiên là sơ đồ tiêu chuẩn của nút thắt hoa ba lá thuận tay phải và cái thứ hai là sơ đồ tiêu chuẩn của nút thắt hoa ba lá thuận tay trái.

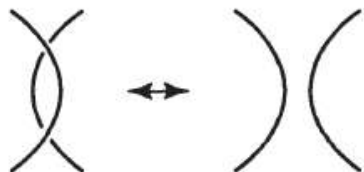
Trong suốt quá trình nghiên cứu về các sơ đồ mắt xích, chúng ta thường không quan tâm đến việc phân biệt giữa các sơ đồ mắt xích phẳng đồng vị. Như vậy, hai sơ đồ mắt xích được coi là giống nhau nếu chúng đều xuất phát từ các đồ thị phẳng đẳng cấu với cùng cấu trúc phụ. Để thuận tiện, cùng một chữ cái sẽ được sử dụng cho cả mắt xích và sơ đồ của nó.

Reidemeister đã chứng minh, vào những năm 1920, rằng hai mắt xích là đồng vị xung quanh khi và chỉ khi các sơ đồ của chúng có thể chuyển hóa lẫn nhau bởi các phép đồng vị khả phẳng và ba **phép di chuyển Reidemeister**. Các phép di chuyển của Reidemeister cũng được sử dụng để định nghĩa một cách tốt hơn sự tương đương của các sơ đồ mắt xích: hai sơ đồ mắt xích được gọi là **đồng vị chính quy** nếu chúng có thể chuyển hóa lẫn nhau bởi các phép đồng vị khả phẳng và các phép di chuyển loại II) và III).

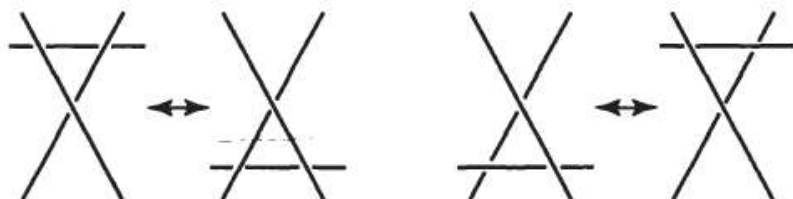
I.



II.



III.



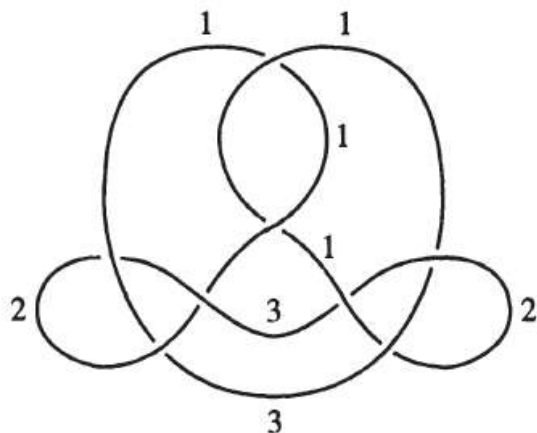
Hình vẽ minh họa ba phép di chuyển của Reidemeister: một phép di chuyển loại I là một phép bổ sung hoặc loại bỏ một đường cong, một phép di chuyển loại II là một phép bổ sung hoặc loại bỏ hai đường cắt ngang nhau hoặc chạy ngầm nhau, một phép di chuyển loại III, một phép di chuyển tam giác, là một phép thay đổi vị trí của hai đường cắt ngang nhau hoặc chạy ngầm nhau.

Lý tưởng nhất là chúng ta muốn tìm một bảng phân loại đơn giản và đầy đủ về các nút thắt và các mắt xích. Về mặt lý thuyết, các nút thắt đã được phân loại bởi Haken vào năm 1962, nhưng sự phân loại đó lại dựa trên một thuật toán rất phức tạp, quá khó để có thể sử dụng trong thực tế.

Bằng cách hạ tầm nhìn của chúng ta xuống một chút, thay vì cố gắng đưa ra một bảng phân loại hoàn chỉnh đơn giản, chúng ta có thể cố gắng giới thiệu các bất biến khá đơn giản để tính toán nhưng vẫn đủ tốt để phân biệt được “nhiều” nút và mắt xích. Đây cũng chính là cách tiếp cận mà chúng ta sẽ áp dụng ở đây. Đặc biệt, chúng ta mong muốn những bất biến này có thể giúp chúng ta trả lời các câu hỏi cơ bản sau đây: “Liệu một mắt xích với một số thành phần có thực sự được liên kết hay nó chỉ là một mắt xích với một sơ đồ có ít nhất hai thành phần? Liệu một nút thắt có thực sự được thắt nút hay nó chỉ là một nút thắt không, nút thắt tầm thường mà sơ đồ của nó không có giao điểm nào? Tổng quát hơn, liệu một mắt xích có một sơ đồ không có giao điểm nào hay không? Liệu một mắt xích có tương đương với hình ảnh phản chiếu của nó hay không?”

Một bất biến tầm thường của các mắt xích là số các thành phần của nó: nó có thể dễ dàng được đọc ra từ sơ đồ của một mắt xích. Các bất biến không tầm thường mà chúng ta sẽ tìm thấy được định nghĩa là các bất biến của các sơ đồ mắt xích và tất cả chúng đều dựa trên việc kiểm tra trực quan và có thể thay đổi một giao điểm trong một sơ đồ mắt xích, trong khi vẫn giữ nguyên sơ đồ bên ngoài một vùng lân cận nhỏ của giao điểm này.

Một số bất biến tô hợp đẹp mắt của các mắt xích được xây dựng dựa trên việc tô màu các “sợi” của chúng, các cung từ đường chạy ngầm này sang đường chạy ngầm khác. Mặc dù cách tiếp cận này nằm ngoài mục đích chính của phần này nhưng chúng ta vẫn hãy mô tả một cách ngắn gọn nhất có thể những bất biến đơn giản nhất trong số chúng. Chúng ta sẽ gọi một phép 3 – tô màu của các dải của sơ đồ là **thực sự** nếu không có giao điểm nào mà chúng ta tìm thấy được tô bởi chính xác hai màu. Một phép 3 – tô màu được gọi là **không tầm thường** nếu có ít nhất hai màu được sử dụng. Kế tiếp, chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng nếu một phép di chuyển Reidemeister biến một sơ đồ L thành một sơ đồ L' và L có một phép 3 – tô màu không tầm thường thực sự thì L' cũng vậy. Do đó, sự tồn tại của một phép 3 – tô màu không tầm thường thực sự là một bất biến đồng vị xung quanh. Nút thắt không không có bất kỳ một phép 3 – tô màu không tầm thường thực sự nào. Như vậy, một nút thắt mà sơ đồ có một phép 3 – tô màu không tầm thường thực sự sẽ không thể tương đương với nút thắt không.

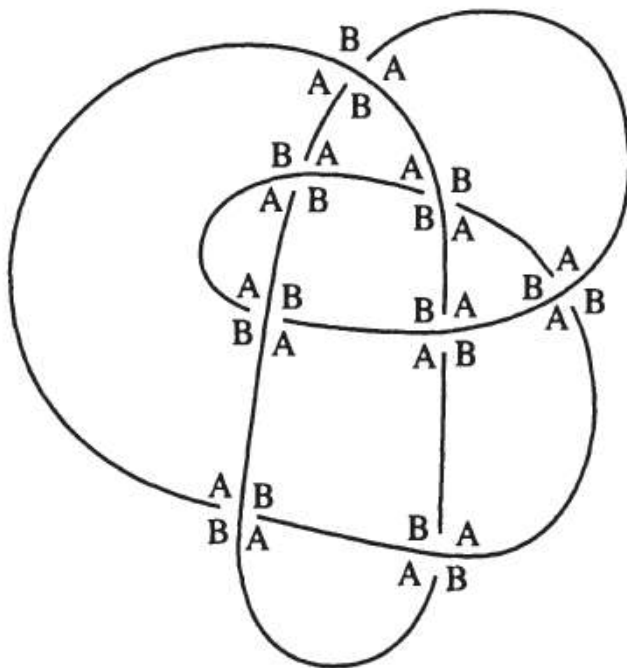


Hình vẽ minh họa một phép 3 – tô màu không tầm thường thực sự của một sơ đồ nút thắt

(cụ thể là một sơ đồ của nút thắt 8_{15} viết theo lối ký hiệu Alexander – Briggs)

Tuy nhiên, chúng ta hãy quay trở lại chủ đề chính của phần này:

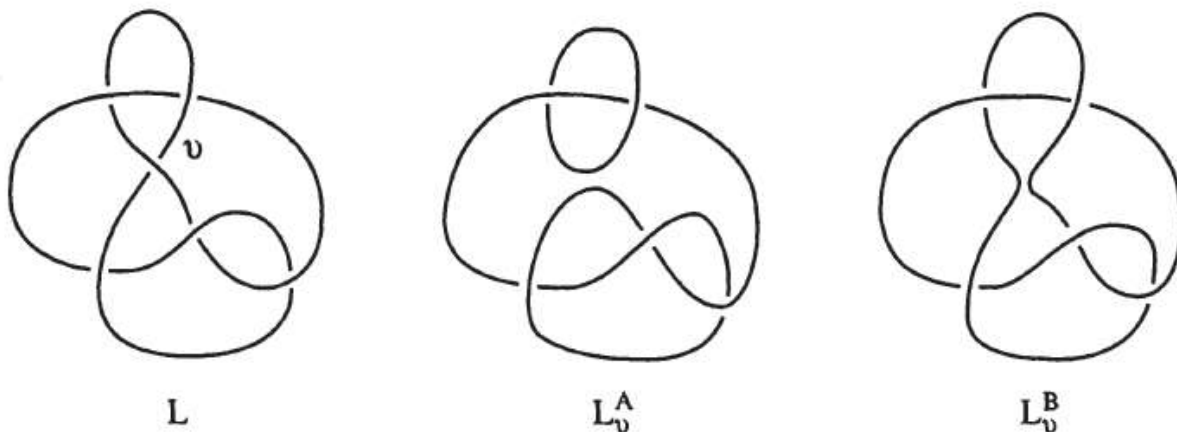
Nhắc lại rằng đa thức Tutte có thể được xác định bằng cách “giải quyết” một cạnh theo hai cách khác nhau: xóa nó và thu gọn nó. Ngoài ra, chúng ta cũng có hai cách để giải quyết một giao điểm trong một sơ đồ nút thắt (không định hướng), như chúng ta sẽ thấy ngay sau đây. Mỗi giao điểm không định hướng đều phân biệt hai trong số bốn miền liên thuộc tại đỉnh của nó. Quay cung cắt ngang ngược chiều kim đồng hồ cho đến khi đạt đến cung chạy ngầm. Khi đó, hai miền bị quét ra được gọi là ***các miền A*** và hai miền còn lại được gọi là ***các miền B***. Đôi khi thay cho các miền, chúng ta sẽ gọi chúng là ***các kênh***.



Hình vẽ minh họa các miền A và B trong một sơ đồ của nút thắt 8_{19} .

Hai cách để giải quyết một giao điểm là gì? Chúng ta có thể cắt nó ra ở các miền A , để hai miền A hợp nhất, hoặc chúng ta có thể cắt nó ra ở các miền B , để hai miền B hợp nhất. Tóm lại, tại mỗi giao điểm, chúng ta có thể có một A – lát cắt hoặc một B – lát cắt.

Như một cách tốc kí nhanh, chúng ta sẽ dùng $\times$ để kí hiệu cho một sơ đồ nút thắt, với việc nhấn mạnh vào một giao điểm cụ thể trong đó. Sau khi thực hiện một A – lát cắt, chúng ta sẽ nhận được $\smile$; sau khi thực hiện một B – lát cắt, chúng ta sẽ nhận được $\succ$. Nếu chúng ta muốn chặt chẽ hơn một chút (và cũng để tránh những khó khăn sẽ gặp phải trong việc đánh máy) thì, giả sử cho trước một sơ đồ nút thắt L với một giao điểm tại v , chúng ta sẽ dùng L_v^A để kí hiệu cho sơ đồ nút thắt thu được từ L bởi một A – lát cắt tại v , và L_v^B để kí hiệu cho sơ đồ nút thắt thu được từ L bởi một B – lát cắt tại v .



Hình vẽ minh họa một sơ đồ L (của nút thắt 6_3) với một giao điểm tại v , các sơ đồ L_v^A và L_v^B .

Bằng cách bắt chước đa thức Tutte và các biến thể của nó, chúng ta sẽ xác định một đa thức, **ngoặc Kauffman**, có giá trị trên một sơ đồ nút thắt L là một tổ hợp tuyến tính cố định của các giá trị của nó trên L_v^A và L_v^B . Đa thức này được xác định một cách duy nhất bởi điều này và một số điều kiện biên tự nhiên nhưng, giống như đa thức Tutte, nó cũng có thể được xác định một cách rõ ràng. Để đưa ra biểu thức rõ ràng này, chúng ta cần thêm một số định nghĩa khác.

Một **trạng thái S của một sơ đồ nút thắt** là một sự lựa chọn cho các lát cắt cho mỗi giao điểm của sơ đồ. Do đó, một sơ đồ với n giao điểm sẽ có 2^n trạng thái. Một **S – phân tách của một sơ đồ nút thắt L** là kết quả của việc cắt tất cả các giao điểm theo trạng thái S ; rõ ràng một sự phân tách là một tập các nút thắt tầm thường không liên kết với nhau, đó là một mắt xích không có bất kỳ giao điểm nào. Bằng cách dùng V để kí hiệu cho tập các giao điểm, chúng ta nhận thấy rằng một trạng thái S thật ra là một hàm $S: V \rightarrow \{A, B\}$, trong đó $S(v) = A$ khi, tại v , chúng ta có một A – lát cắt. Như vậy, tập tất cả các trạng thái là $\{A, B\}^V$.

Giả sử cho trước một sơ đồ nút thắt L và một trạng thái S của L , kí hiệu $a_L(S)$ là số các A – lát cắt, $b_L(S)$ là số các B – lát cắt trong lát cắt trong S . Ngoài ra, kí hiệu $c_L(S)$ là số các thành phần liên thông của S – phân tách của L .

Sau tất cả những sự chuẩn bị nêu ở trên, **ngoặc vuông Kauffman $[L]$ của một sơ đồ nút thắt L , với các giá trị trong $\mathbb{Z}[A, B, d]$** , được xác định bởi công thức:

$$[L] = \sum_S A^{a_L(S)} B^{b_L(S)} d^{c_L(S)-1},$$

trong đó tổng được tính trên tất cả các trạng thái của sơ đồ L .

Các tính chất cơ bản của ngoặc vuông Kauffman được đưa ra trong kết quả bên dưới, kết quả này làm chúng ta gợi nhớ đến Kết quả 10.2.1). Chúng ta sẽ dùng $\bigcirc$ để kí hiệu cho một sơ đồ nút thắt liên thông không có bất kỳ một giao điểm nào và $L_1 \cup L_2$ cho sơ đồ là hợp phân biệt của L_1 và L_2 . Kí hiệu $\mathcal{L}$ là tập các sơ đồ nút thắt.

Kết quả 10.6.1.

Chúng ta luôn tìm được duy nhất một ánh xạ $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[A, B, d]$ sao cho

- (i) nếu L và L' là các sơ đồ nút thắt khả phẳng đẳng cấu thì $\varphi(L) = \varphi(L')$,
- (ii) $\varphi(\bigcirc) = 1$,
- (iii) $\varphi(L \cup \bigcirc) = d\varphi(L)$, với mọi sơ đồ nút thắt L ,
- (iv) $\varphi(L) = A\varphi(L_v^A) + B\varphi(L_v^B)$ với mọi sơ đồ nút thắt L có một giao điểm tại v . Hơn nữa, $\varphi(L) = [L]$.

Chứng minh kết quả 10.6.1.

Rõ ràng là các điều kiện (i) – (iv) xác định duy nhất một ánh xạ, nếu có một ánh xạ như vậy. Như vậy, tất cả những gì phải làm đó là kiểm tra ngoặc vuông Kauffman $[\cdot]$ thỏa mãn các điều kiện (i) – (iv). Ba cái đầu tiên có thể được suy ra ngay lập tức từ định nghĩa.

Tính chất (iv) cũng gần như được suy ra ngay lập tức. Thật vậy, giả sử v là một giao điểm của L . Khi đó, bằng cách kí hiệu $L' = L_v^A$ và $L'' = L_v^B$,

$$\begin{aligned}
 [L] &= \sum_S A^{a_L(S)} B^{b_L(S)} d^{c_L(S)-1} \\
 &= \sum_{S, S(v)=A} A^{a_L(S)} B^{b_L(S)} d^{c_L(S)-1} + \sum_{S, S(v)=B} A^{a_L(S)} B^{b_L(S)} d^{c_L(S)-1} \\
 &= A \sum_{S'} A^{a_{L'}(S')} B^{b_{L'}(S')} d^{c_{L'}(S')-1} + B \sum_{S''} A^{a_{L''}(S'')} B^{b_{L''}(S'')} d^{c_{L''}(S'')-1} \\
 &= A[L_v^A] + B[L_v^B],
 \end{aligned}$$

trong đó $\Sigma'_{S'}$ kí hiệu cho tổng tính trên tất cả các trạng thái S' của L' và $\Sigma''_{S''}$ kí hiệu cho tổng tính trên tất cả các trạng thái S'' của L'' . □

Một cách tương đương, Kết quả 10.6.1) chỉ ra rằng nếu R là một vành giao hoán và $A, B, d \in R$ thì ngoặc vuông Kauffman, với các tham số A, B, d , sẽ thỏa mãn các điều kiện (i) – (iv). Nói chung, ngoặc vuông không phải là một bất biến đối với đồng vị xung quanh hoặc thậm chí là đồng vị chính quy, nhưng nếu A, B, d thỏa mãn một số điều kiện nhất định nào đó thì nó sẽ là một bất biến đồng vị chính quy.

Để chính xác hơn, chúng ta sẽ định nghĩa **ngoặc góc Kauffman** (hoặc **ngoặc Kauffman**) $\langle L \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ của một nút thắt L bởi hệ thức

$$\langle L \rangle(A) = [L](A, A^{-1}, -A^2 - A^{-2}).$$

Như vậy, $\langle L \rangle$ là một **đa thức Laurent** theo A và nó đơn giản chỉ là giá trị của $[L]$ tại A, B, d thỏa mãn các điều kiện $AB = 1$ và $d = -A^2 - A^{-2}$.

Kết quả 10.6.2.

Ngoặc Kauffman bất biến đối với đồng vị chính quy.

Chứng minh kết quả 10.6.2.

Giả sử cho trước các A, B, d như trên, nghĩa là $AB = 1$ và $d = -A^2 - A^{-2}$, và, với các điều kiện này, $\langle L \rangle(A) = [L](A, B, d)$.

Đầu tiên, chúng ta hãy đánh giá tác động của một phép di chuyển loại II lên ngoặc góc bằng cách giải quyết các giao điểm bởi (iv) và áp dụng (iii):

$$\begin{aligned} \langle \text{II} \rangle &= A \langle \text{II} \rangle + B \langle \text{II} \rangle \\ &= A \{ A \langle \text{II} \rangle + B \langle \text{II} \rangle \} + B \{ A \langle \text{II} \rangle + B \langle \text{II} \rangle \} \\ &= \{ A^2 + ABd + B^2 \} \langle \text{II} \rangle + AB \langle \text{II} \rangle. \end{aligned}$$



Do $AB = 1$ và $A^2 + ABd + B^2 = 0$ nên vế phải của biểu thức trên là $\langle \text{II} \rangle$, nên ngoặc Kauffman là bất biến đối với phép di chuyển Reidemeister loại II.

Để hoàn tất phép chứng minh, chúng ta sẽ chỉ ra rằng bất biến loại II sẽ kéo theo bất biến loại III.

Thật vậy, từ (iv),

$$\langle \text{III} \rangle = A \langle \text{III} \rangle + B \langle \text{III} \rangle$$

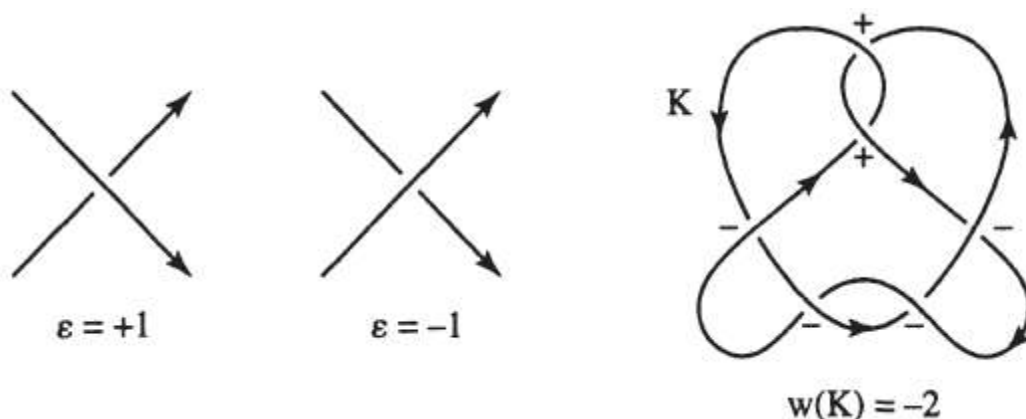
và

$$\langle \text{III} \rangle = A \langle \text{III} \rangle + B \langle \text{III} \rangle,$$

và hai vế phải của các biểu thức trên đều bằng bất biến loại II. Tính bất biến của phép di chuyển Reidemeister loại III cũng được kiểm tra tương tự.

□

Khi điều đó xảy ra, chúng ta có thể dễ dàng thay đổi một chút ngoặc (góc) Kauffman $\langle L \rangle$ để biến nó thành một bất biến đồng vị xung quanh của các nút thắt. Để làm điều này, chúng ta sẽ sử dụng một bất biến đơn giản của các sơ đồ nút thắt định hướng. Các giao điểm định hướng có thể được gán nhãn bởi các giá trị ± 1 , thường được gọi là **các dấu**, theo các quy tắc nêu trong hình vẽ bên dưới đây. Tổng của các dấu của tất cả các giao điểm trong một sơ đồ nút thắt định hướng L được gọi là **số xoắn** (hoặc **chỉ số xoắn**) $w(L)$ của L . Chỉ số xoắn không phải là một bất biến đồng vị xung quanh, nhưng nó là một bất biến đồng vị chính quy, như chúng ta có thể thấy ngay lập tức bằng cách kiểm tra tác động của các phép di chuyển Reidemeister thuộc loại II và III.



Hình ảnh minh họa quy ước của các dấu và chỉ số xoắn của một sơ đồ (của nút thắt 6_1).

Trên thực tế, do chúng ta chủ yếu quan tâm đến các nút thắt không định hướng hơn là các nút thắt định hướng, nên chúng ta sẽ sử dụng thuật ngữ chỉ số tự xoắn hơn là chỉ số xoắn. Giả sử cho trước một sơ đồ nút thắt định hướng L với các thành phần $L_1, \dots, L_k$, **chỉ số tự xoắn** $s(L)$ của L được định nghĩa là $s(L) = w(L_1) + \dots + w(L_k)$. Do dấu của một giao điểm sẽ không thay đổi nếu chúng ta thay đổi hướng của cả hai cung tại giao điểm nên chỉ số tự xoắn không phụ thuộc vào cách định hướng. Như vậy, chúng ta có thể định nghĩa chỉ số tự xoắn $s(L)$ của sơ đồ nút thắt không định hướng như là chỉ số tự xoắn theo bất kỳ hướng nào của L . Như kết quả tiếp theo đây cho thấy, nếu chúng ta nhân $\langle L \rangle$ với một hàm đơn giản của chỉ số tự xoắn thì chúng ta sẽ thu được một bất biến đồng vị xung quanh.

Kết quả 10.6.3.

Đa thức Laurent $f[L] = (-A)^{-3s(L)} \langle L \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ là một bất biến đồng vị xung quanh đối với các nút thắt không định hướng.

Chứng minh kết quả 10.6.3.

Do $s(L)$ và $\langle L \rangle$ là các bất biến đối với phép đồng vị chính quy nên $f[L]$ cũng vậy. Như vậy, tất cả những gì chúng phải làm đó là chỉ ra rằng $f[L]$ là một bất biến đối với phép di chuyển Reidemeister loại I.

Đầu tiên, lưu ý rằng

$$\begin{aligned} \langle \text{crossing} \rangle &= A \langle \text{positive crossing} \rangle + B \langle \text{negative crossing} \rangle \\ &= (A + B) \langle \text{positive crossing} \rangle = (-A^3 - A^{-1} + A^{-1}) \langle \text{positive crossing} \rangle \\ &= (-A^3) \langle \text{positive crossing} \rangle. \end{aligned}$$

Lập luận tương tự, chúng ta cũng thu được dạng khai triển tương tự sau đây

$$\langle \text{↯} \rangle = (-A^{-3}) \langle \text{↷} \rangle.$$

Do $s(\text{↯}) = s(\text{↷}) + 1$ và $s(\text{↯}) = s(\text{↷}) - 1$, độc lập với cách định hướng, nên đa thức Laurent $f[L]$ cũng bất biến đối với phép di chuyển Reidemeister loại I:

$$\begin{aligned} f[\text{↯}] &= (-A)^{-3s(\text{↯})} \langle \text{↯} \rangle = (-A)^{-3(s(\text{↷})+1)} (-A^3) \langle \text{↷} \rangle \\ &= (-A)^{-3s(\text{↷})} \langle \text{↷} \rangle = f[\text{↷}] \end{aligned}$$

và, tương tự,

$$f[\text{↯}] = f[\text{↷}].$$

□

Các hàm tương tự cũng có thể được định nghĩa cho các nút thắt định hướng. Như vậy, ngoặc Kauffman $\langle L \rangle$ của một nút thắt định hướng L đơn giản chỉ là ngoặc Kauffman của nút thắt không định hướng của nó. Đây cũng lại là một bất biến đồng vị chính quy của các nút thắt định hướng: để biến nó thành một bất biến đồng vị xung quanh $f[L]$, chúng ta thường nhân nó với $(-A)^{-3w(L)}$ chứ không phải với $(-A)^{-3s(L)}$.

Đa thức Laurent $f[L]$, mà chúng ta sẽ gọi là **đa thức Kauffman một biến của một nút thắt hoặc một nút thắt định hướng**, có lẽ là đa thức đẹp nhất trong số các đa thức nút thắt có liên quan chặt chẽ với nhau. Thành viên đầu tiên của họ này, **đa thức Jones $V_L(t)$** , được đề xuất bởi Vaughn Jones vào năm 1985, là một

bất biến đồng vị xung quanh của các nút thắt định hướng được xác định bởi các hệ thức $V_{\text{↻}} = 1$ và

$$t^{-1} V_{\text{↘↗}} - t V_{\text{↗↘}} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{\text{↗↗}}.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng chúng ta chỉ có tối đa một đa thức Laurent $V_L \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ thỏa mãn các hệ thức nêu ở trên: vấn đề ở đây đó là chứng minh tồn tại một đa thức như vậy. Trên thực tế, đây là một phép biến đổi đơn giản biến $f[L]$ thành đa thức Jones.

Kết quả 10.6.4.

Đa thức Jones $V_L(t)$ của một nút thắt định hướng L được xác định bởi hệ thức $V_L(t) = f[L](t^{-1/4})$, trong đó $f[L] = (-A)^{-3w(L)} \langle L \rangle (A)$.

Chứng minh kết quả 10.6.4.

Do $f[\text{↻}] = 1$ nên tất cả những gì chúng ta phải làm đó là chỉ ra rằng $f[L](t^{-1/4})$ thỏa mãn các hệ

thức điều kiện.

Từ tính chất (iv) của đa thức ngoặc, do $B = A^{-1}$ nên chúng ta sẽ có

$$\langle \nearrow \rangle = A \langle \searrow \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle$$

và

$$\langle \searrow \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \nearrow \rangle.$$

Như vậy,

$$A \langle \searrow \rangle - A^{-1} \langle \searrow \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \nearrow \rangle,$$

nên

$$\begin{aligned} A^4 f[\nearrow] - A^{-4} f[\searrow] &= A^4 (-A)^{-3(w(\nearrow)+1)} \langle \nearrow \rangle - A^{-4} (-A)^{-3(w(\searrow)-1)} \langle \searrow \rangle \\ &= (-A)^{-3w(\nearrow)} \left\{ -A \langle \nearrow \rangle + A^{-1} \langle \searrow \rangle \right\} \\ &= (A^{-2} - A^2) f[\nearrow]. \end{aligned}$$

Bằng cách thay thế $A = t^{-1/4}$, chúng ta nhận thấy rằng

$$t^{-1} f[\searrow] - t f[\nearrow] = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) f[\nearrow]$$

như chúng ta đã tuyên bố. □

Đa thức Jones, đặc biệt ở dạng đa thức Kauffman một biến, có thể được sử dụng để chỉ ra sự không tương đương của nhiều nút thắt và mắt xích. Chẳng hạn, ngoặc của nút thắt hình tam giác thuận tay phải là $A^{-7} - A^{-3} - A^5$ và, do chỉ số xoắn của nó là +3, đa thức Kauffman của nó là $-A^{-16} + A^{-12} + A^{-4}$. Đặc biệt, nút thắt hình tam giác thuận tay phải không tương đương với nút thắt không (nút thắt tầm thường): nó được thắt nút. Khi nó xảy ra, khẳng định cụ thể này sẽ được chứng minh dễ dàng hơn bằng các phương pháp khác, chẳng hạn, bằng lập luận tô màu đã được đề cập đến ở trên. Tuy nhiên, như chúng ta sẽ thấy trong giây lát nữa, đa thức Kauffman của nút thắt hình tam giác thuận tay phải cũng có thể được sử dụng để chỉ ra rằng nút thắt hình tam giác thuận tay phải là bất đối xứng: nó không tương đương với ảnh phản chiếu của nó – nút thắt hình tam giác thuận tay trái.

Giả sử cho trước một sơ đồ nút thắt L , chúng ta sẽ dùng L^* cho ảnh phản chiếu của nó thu được bằng cách đảo ngược tất cả các giao điểm (và giữ nguyên hướng nếu L được định hướng).

Kết quả 10.6.5.

Ngoặc và đa thức Kauffman một biên của ảnh phản chiếu L^* của một sơ đồ nút thắt L lần lượt là

$$\langle L^* \rangle(A) = \langle L \rangle(A^*)$$

và

$$f_{L^*}[A] = f_L[A^{-1}].$$

Ngoài ra, các hệ thức tương tự cũng đúng đối với các sơ đồ nút thắt định hướng.

Chứng minh kết quả 10.6.5.

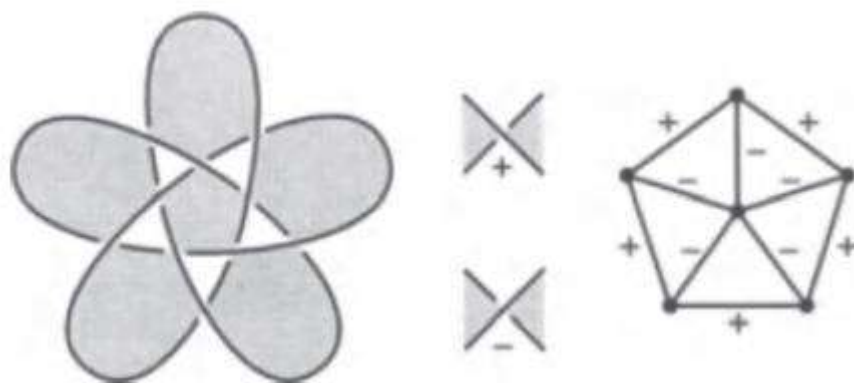
Nhận thấy rằng việc đảo ngược tất cả các giao điểm sẽ dẫn đến việc hoán đổi A và B , nghĩa là A và A^{-1} , trong dạng khai triển của ngoặc. Như vậy, $\langle L^* \rangle(A) = \langle L \rangle(A^{-1})$. Ngoài ra, $s(L^*) = -s(L)$ và $w(L^*) = -w(L)$, nên khẳng định thứ hai được suy ra ngay lập tức. $\square$

Do đa thức Kauffman một biên của nút thắt hình tam giác là không bất biến nếu A được thay thế bởi A^{-1} nên nút thắt hình tam giác sẽ không đối xứng, như chúng ta đã khẳng định. (Nó cũng chính là lý do khiến chúng ta phải phân biệt nút thắt hình tam giác thuận tay phải với nút thắt hình tam giác thuận tay trái.)

Sự giống nhau rõ rệt giữa việc “giải quyết” một cạnh của một đồ thị trong việc xác định đa thức Tutte và “giải quyết” một giao điểm của một sơ đồ nút thắt trong việc xác định ngoặc Kauffman khác xa với vẻ bề ngoài: các đa thức nút thắt được mô tả ở trên có thể dễ dàng thu được từ các đa thức Tutte của các đồ thị được tô màu nhất định liên kết với các sơ đồ. Như chúng ta sẽ thấy, mối liên hệ này đặc biệt nổi bật trong các sơ đồ nút thắt thay phiên, nên chúng ta chỉ cần quan tâm đến các đa thức Tutte của các đồ thị không được tô màu.

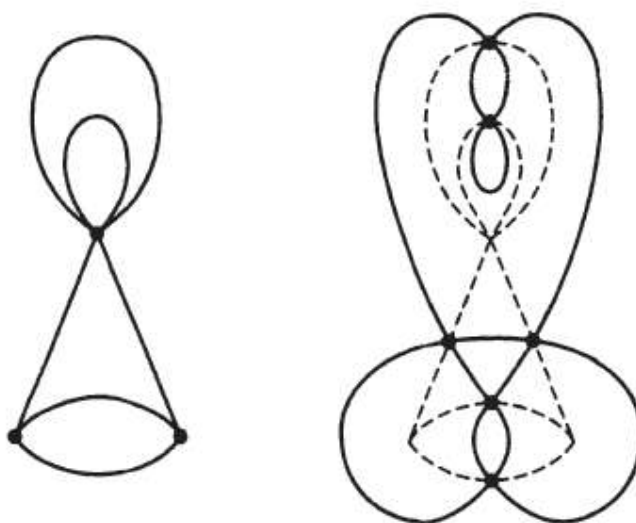
Để kết thúc lại chủ đề này, chúng ta sẽ thảo luận về sự tương ứng giữa các sơ đồ nút thắt và các đồ thị phẳng được gán dấu, giới thiệu các sơ đồ thay phiên và chỉ ra rằng, với một sơ đồ thay phiên, ngoặc Kauffman có thể dễ dàng được biểu thị dưới dạng đa thức Tutte của đồ thị liên kết.

Nhắc lại rằng bản vẽ của universe của một nút thắt là 2 – colourable. Chúng ta thường chọn hai màu đen và trắng để tô màu cho các mặt và gọi phép tô màu này là một **phép tô bóng**. Một **sơ đồ nút thắt được tô bóng** là một sơ đồ nút thắt có một phép 2 – tô màu thực sự, nghĩa là các miền có thể được tô bóng thay phiên nhau. Lưu ý rằng mọi sơ đồ phẳng đều có chính xác hai phép tô bóng. Ngoài ra, trong lân cận của mỗi giao điểm, chúng ta luôn có hai miền được tô bóng và hai miền không được tô bóng, mặc dù các miền này không nhất thiết phải khác nhau. Với mỗi sơ đồ phẳng được tô bóng liên thông D , chúng ta sẽ liên kết nó với một đa đồ thị tô màu cạnh $G(D)$ như sau. Với mỗi mặt được tô bóng F , chọn ra một đỉnh v_F trong F và, với mỗi giao điểm mà tại đó F_1 và F_2 giao nhau, chọn ra một cạnh $v_{F_1}v_{F_2}$. Như vậy, nếu $F_1 = F_2 = F$ thì giao điểm sẽ đóng góp một cạnh khuyên tại v_F . Hơn nữa, chúng ta cũng sẽ tô màu cho mỗi cạnh bởi + hoặc – tùy theo loại đường giao nhau. Chúng ta sẽ gọi đồ thị thu được như trên là một **đồ thị phẳng được gán dấu**.



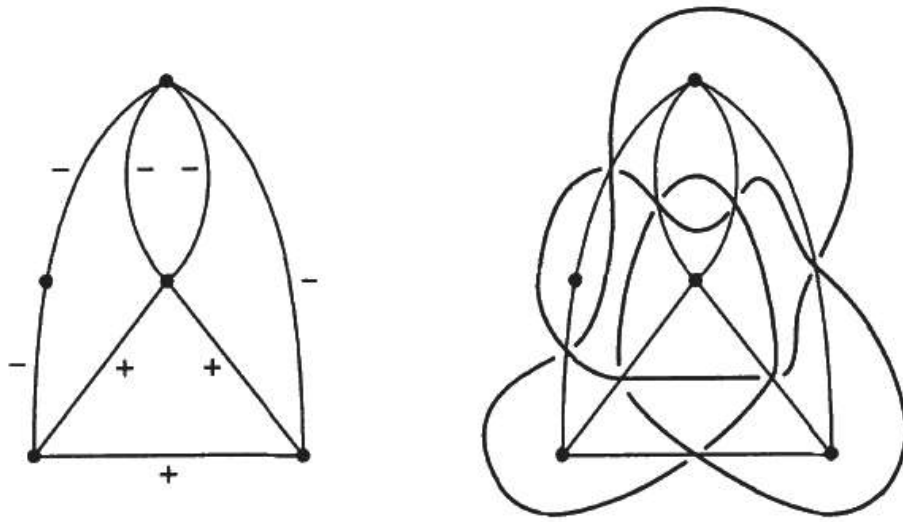
Hình vẽ minh họa một phép tô bóng của một sơ đồ nút thắt, hai loại giao điểm và đồ thị được gán dấu liên kết với sơ đồ nút thắt.

Ngược lại, mọi sơ đồ phẳng được tô bóng đều có thể được xây dựng lại từ $G(D)$. Để nhận thấy điều này, chúng ta chỉ cần xây dựng một đồ thị trung gian của $G(D)$ và gán thông tin về các giao điểm cho nó tùy theo cách tô màu của $G(D)$. Đồ thị trung gian đặc biệt dễ xác định đối với một đồ thị phẳng trong đó mọi mặt đều là một đa giác với ít nhất ba cạnh. Với một đồ thị phẳng G như vậy, **đồ thị trung gian $M(G)$ của G** có thể thu được bằng cách chèn thêm một đỉnh trên mỗi cạnh của G và nối hai đỉnh mới được bổ sung thêm với nhau bởi một cạnh nằm trong một mặt nào đó của G nếu các đỉnh nằm trên các cạnh liên hợp của mặt đó. Như vậy, $M(G)$ là một đồ thị phẳng 4 – chính quy với các mặt thay phiên nhau chứa các đỉnh của G . Phép xây dựng $M(G)$ cho các đa đồ thị phẳng cũng được thực hiện tương tự.



Hình vẽ minh họa một đa đồ thị và đồ thị trung gian của nó.

Kế tiếp, giả sử cho trước một đồ thị phẳng được gán dấu G với đồ thị trung gian $M(G)$, chúng ta sẽ tô bóng các mặt của $M(G)$ có chứa các đỉnh của G . Để biến $M(G)$ thành sơ đồ nút thắt $D = D(G)$, chúng ta chỉ cần xác định các giao điểm trên hoặc dưới tùy theo màu của cạnh tại giao điểm đó. Với các sơ đồ không liên thông, phép tương ứng phức tạp hơn một chút và chúng ta sẽ không đi sâu vào nó.



Hình vẽ minh họa một đồ thị phẳng được gán dấu và sơ đồ nút thắt của nó (một sơ đồ của nút thắt 8_{20}).

Chúng ta sẽ gọi hai đồ thị phẳng được gán dấu là **tương đương** nếu chúng là các đồ thị được gán dấu của các sơ đồ nút thắt tương đương với nhau. Từ Định lý Reidemeister, hai đồ thị phẳng được gán dấu là tương đương nếu chúng có thể thu được từ nhau thông qua một dãy các phép biến đổi tương ứng với các phép di chuyển Reidemeister; do đồ thị của chúng ta được gán dấu nên, trên thực tế, sẽ có sáu **đồ thị Reidemeister**.

Để chuyển các nghiên cứu về (các lớp tương đương của) các sơ đồ nút thắt thành các nghiên cứu về (các lớp tương đương của) các đồ thị phẳng được gán dấu, chúng ta thường chỉ quan tâm đến các bất biến của các đồ thị phẳng được gán dấu là hằng trên các lớp tương đương. Cách đơn giản nhất để gán dấu cho các cạnh của một đồ thị phẳng là làm cho tất cả chúng đều là $+$ hoặc làm cho tất cả chúng đều là $-$. Các sơ đồ tương ứng với cách gán dấu này được gọi là **các sơ đồ thay phiên**. Tương tự, một sơ đồ nút thắt được gọi là thay phiên nếu các giao điểm của nó thay đổi một cách luân phiên khi chúng ta đi dọc theo các cung của nút thắt: trên, dưới, trên, dưới, ...

Dễ dàng nhận thấy rằng mọi đa đồ thị phẳng 4 – chính quy đều là universe của một sơ đồ nút thắt thay phiên. Ngoài ra, nếu L là một sơ đồ gồm k nút thắt thành phần thì universe của L sẽ là universe của tối thiểu 2 và tối đa 2^k sơ đồ thay phiên.

Rõ ràng, một sơ đồ nút thắt liên thông là thay phiên khi và chỉ khi mỗi miền của nó chỉ gồm các A – kênh hoặc các B – kênh. Chúng ta sẽ gọi một miền là một **A – miền** nếu tất cả các kênh của nó là các A – kênh và là một **B – miền** nếu tất cả các kênh của nó là các B – kênh. Có hai cách để chúng ta có thể tô bóng cho một sơ đồ nút thắt liên thông thay phiên L : chúng ta có thể tô bóng tất cả các A – miền hoặc chúng ta có thể tô bóng tất cả các B – miền. Chúng ta sẽ dùng $G^+(L)$ để kí hiệu cho đồ thị nhận được từ phép tô bóng thứ nhất và $G^-(L)$ để kí hiệu cho đồ thị nhận được từ phép tô bóng thứ hai. Do là một đồ thị được gán dấu nên $G^+(L)$ sẽ được chọn với dấu $+$ và $G^-(L)$ sẽ được chọn với dấu $-$.

Ngược lại, giả sử cho trước một đồ thị phẳng liên thông G , kí hiệu $D^+(G)$ là sơ đồ nút thắt thay phiên thu được từ G bằng cách chọn dấu $+$ cho mỗi cạnh và $D^-(G)$ là sơ đồ nút thắt thay phiên thu được từ G bằng cách chọn dấu $-$ cho mỗi cạnh. Từ cách xây dựng, với mọi sơ đồ nút thắt liên thông thay phiên L , chúng ta sẽ có $D^+(G^+(L)) = D^-(G^-(L)) = L$.

Bằng cách kiểm tra cẩn thận ảnh hưởng của việc giải quyết một giao điểm trên đồ thị được gán dấu liên kết, từ Kết quả 10.6.1), chúng ta có thể chỉ ra rằng, với một sơ đồ thay phiên, đa thức Kauffman và đa thức Jones đều có thể được xác định bởi đa thức Tutte của đồ thị liên kết. Cụ thể, chúng ta có thể chứng minh được kết quả sau.

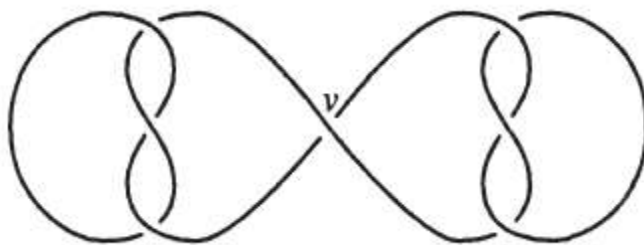
Kết quả 10.6.6.

Giả sử L là một sơ đồ nút thắt liên thông thay phiên định hướng với a A – miền, b B – miền và chỉ số xoắn w .

Khi đó, đa thức Jones của L được xác định bởi đa thức Tutte của $G^+(L)$:

$$V_L(t) = (-1)^w t^{(b-a+3w)/4} T_{G^+(L)}(-t, -1/t).$$

Một giao điểm được gọi là một **giao điểm vô định** nếu hai trong số các miền cục bộ xuất hiện tại giao điểm là các phần của cùng một miền trong toàn bộ sơ đồ.



Hình ảnh minh họa một sơ đồ với một giao điểm vô định tại v .

Một giao điểm vô định có thể xuất hiện dưới dạng một cạnh khuyên hoặc một cầu trong $G^+(L)$ và $G^-(L)$; chẳng hạn, như trong hình vẽ minh họa nêu ở trên, giao điểm vô định tại v tạo ra một cạnh cầu trong $G^+(L)$ và một cạnh khuyên trong $G^-(L)$. Do các giao điểm vô định không đóng góp gì vào “sự thắt nút” nên, tốt hơn hết, chúng ta nên nghiên cứu các sơ đồ không có chứa bất kỳ một giao điểm vô định nào trong số này. Kết quả sau đây được phỏng đoán bởi Tait và được chứng minh một cách độc lập bởi Murasugi và Thistlethwaite khoảng một trăm năm sau đó.

Kết quả 10.6.7.

Số các giao điểm của một sơ đồ nút thắt liên thông thay phiên mà không có chứa bất kỳ một giao điểm vô định nào sẽ là một bất biến đồng vị xung quanh.

Chứng minh kết quả 10.6.7.

Giả sử L là một sơ đồ nút thắt liên thông thay phiên với m giao điểm và không có giao điểm nào trong số đó là một giao điểm vô định. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng m chính là **bề rộng của đa thức Laurent $V_L(t)$** , nghĩa là hiệu giữa bậc lớn nhất và bậc nhỏ nhất của $V_L(t)$. Do đa thức Jones là một bất biến đồng vị xung quanh nên, trên thực tế, điều này còn nhiều hơn những gì định lý của chúng ta khẳng định.

Để chứng minh tính đúng đắn của tuyên bố của chúng ta, kí hiệu $a = a(L)$ là số các A – miền. Khi đó, $G = G^+(L)$ sẽ có a đỉnh và m cạnh; hơn nữa, G không có chứa bất kỳ một cạnh khuyên hoặc cạnh cầu nào, bởi vì L không có chứa bất kỳ một giao điểm vô định nào.

Từ Kết quả 10.6.6), bề rộng của $V_L(t)$ được xác định bởi

$$\begin{aligned}\text{bề rộng của } V_L(t) &= \max \deg V_L(t) - \min \deg V_L(t) \\ &= \max\{i - j: t_{ij}(G) \neq 0\} - \min\{i - j: t_{ij}(G) \neq 0\} \\ &= (a - 1) - (-m + a - 1) \\ &= m,\end{aligned}$$

trong đó hệ thức áp chót được suy ra từ Kết quả 10.5.5). □

Rõ ràng, từ phép chứng minh nêu ở trên, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng nếu một sơ đồ liên thông thay phiên L có m giao điểm, trong đó m' giao điểm là vô định, thì $m - m'$ chính là bề rộng của đa thức Jones, nên $m - m'$ là một bất biến đồng vị xung quanh.

Trên thực tế, bằng cách sử dụng các phương pháp lập luận tương tự, Murasugi và Thistlethwaite đã chứng minh được một phỏng đoán cổ điển khác của Tait: “Mọi nút thắt thay phiên đều có một sơ đồ nút thắt thay phiên với số nhỏ nhất có thể có các giao điểm.”

Để kết thúc lại phần này của bài viết, chúng ta nhận thấy rằng, trong hơn một thế kỷ qua, lý thuyết nút thắt đã được phát triển một cách khá đầy đủ. Nó được bắt đầu với hy vọng của Thomson về việc áp dụng nó vào các nghiên cứu về các tính chất của không gian. Hiện tại, nó có tầm quan trọng lớn trong việc nghiên cứu các nút thắt được hình thành bởi các phân tử DNA trong quá trình tổng hợp các phân tử bị thắt nút khác nhau và, thông qua các đa thức Tutte, trong cơ học thống kê và lý thuyết trường lượng tử topo.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Béla Bollobás, Modern Graph Theory, ???/??/????