

Thứ Hai, 21. Tháng Chín 2020

Bài 1. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Điểm P nằm bên trong của $ABCD$. Biết rằng :

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Chứng minh rằng ba đường thẳng sau cùng đi qua một điểm: các phân giác trong của các góc $\angle ADP$ và $\angle PCB$ và đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Bài 2. Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a \geq b \geq c \geq d > 0$ và $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1.$$

Bài 3. Cho $4n$ viên sỏi với khối lượng $1, 2, 3, \dots, 4n$. Mỗi viên sỏi được tô bởi một trong n màu và có đúng bốn viên mỗi màu. Chứng minh rằng ta có thể chia các viên sỏi thành hai đống sao cho hai điều kiện sau đồng thời được thỏa mãn:

- Tổng khối lượng của các viên sỏi ở hai đống là bằng nhau.
- Trong mỗi đống có đúng hai viên sỏi mỗi màu.

Thứ Ba, 22. Tháng Chín 2020

Bài 4. Cho số nguyên $n > 1$. Có n^2 ga cáp treo trên một sườn núi tại các độ cao khác nhau. Có hai công ty cáp treo A và B , mỗi công ty vận hành k xe cáp treo. Mỗi xe vận chuyển khách từ một ga này đến một ga khác ở vị trí cao hơn và không dừng ở các ga trung gian. Biết rằng, k xe của công ty A có k ga đi khác nhau và k ga đến khác nhau, đồng thời xe nào xuất phát ở ga cao hơn cũng sẽ kết thúc ở ga cao hơn. Điều này cũng đúng với các xe của công ty B . Ta nói rằng hai ga được nối bởi một công ty nếu có thể xuất phát từ ga thấp hơn đi đến ga cao hơn mà chỉ sử dụng một hoặc nhiều xe của công ty đó (không có cách di chuyển nào khác giữa các ga cáp treo).

Xác định số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho ta có thể đảm bảo rằng luôn có hai ga được nối bởi cả hai công ty.

Bài 5. Cho một bộ bài gồm $n > 1$ quân bài. Trên mỗi quân bài được viết một số nguyên dương. Biết rằng trung bình cộng của hai số trên mỗi cặp quân bài cũng là trung bình nhân của các số trên một vài quân bài nào đó (có thể gồm một hoặc nhiều quân).

Với những giá trị nào của n thì ta có thể khẳng định được rằng các số trên các quân bài là bằng nhau?

Bài 6. Chứng minh rằng tồn tại hằng số dương c sao cho khẳng định sau đúng:

Với mọi số nguyên $n > 1$ và một tập \mathcal{S} gồm n điểm trên mặt phẳng sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kì của \mathcal{S} ít nhất là 1, ta có một đường thẳng ℓ chia tách tập \mathcal{S} sao cho khoảng cách từ mỗi điểm của \mathcal{S} đến ℓ ít nhất là $cn^{-1/3}$.

(Ta nói đường thẳng ℓ chia tách một tập điểm \mathcal{S} nếu nó cắt một đoạn thẳng nối hai điểm nào đó của tập \mathcal{S} .)

Lưu ý. Các kết quả yếu hơn với $cn^{-1/3}$ được thay bởi $cn^{-\alpha}$ có thể được cho điểm tùy thuộc vào giá trị của hằng số $\alpha > 1/3$.