Đôi điều tản mạn về bất đẳng thức Jack Garfulkel

Phan Thành Nam

April 26,2009

Biên tập :Vũ Thanh Tú

Đôi điều tản mạn về bất đẳng thức (BĐT) Jack Garfulkel

Phan Thành Nam

Lời tựa. Khi tôi còn là học sinh, các BĐT hình học của Jack Garfulkel từng gây ấn tượng rất mạnh với tôi như là những bất đẳng thức tuyệt diệu nhất: đẹp, khó và đầy bí ẩn. Vậy mà, chỉ sau vài năm, các bất đẳng thức này đã không còn gây "khó dễ" được với nhiều người nữa. Bây giờ nhìn lại điều đáng mừng này cũng thấy bất ngờ.

Tuy nhiên, với tôi đây vẫn là các bất đẳng thức thực sự đáng nhớ. Vẫn còn đó vẻ đẹp giản dị và thuần khiết dù độ khó đã giảm đi nhiều; vẫn còn đó những băn khoăn, trăn trở khi đứng trước những vấn đề hóc búa; vẫn còn đó niềm vui nhẹ nhàng mà sâu lắng của những tìm tòi khám phá tuy rằng nhỏ ....

Tôi xin chép ra đây đôi điều tản mạn về một vài bất đẳng thức của Jack Garfulkel, gồm một số suy nghĩ là khi tôi còn học phổ thông, và một số là khi tôi tham gia diễn đàn này.

Phần 1.Từ một lời giải "kì lạ"...

Xin bắt đầu bằng một bài toán rất quen thuộc của **Jack Garfulkel**.
Bài toán 1. Cho tam giác ngọn ABC. Chứng minh rằng:

$$\sin(\frac{A}{2})+\sin(\frac{B}{2})+\sin(\frac{C}{2})\ge\frac{4}{3}(1+\sin(\frac{A}{2}).\sin(\frac{B}{2}).\sin(\frac{C}{2}))$$

Ta sẽ kí hiệu
$x=\sin\left(\frac{A}{2}\right),y=\sin\left(\frac{B}{2}\right),z=\sin\left(\frac{C}{2}\right)$
Khi A, B, C là 3 góc một tam giác thì ta có x, y, z > 0 và $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ (*).

Khi đó, **Bài toán 1** có thể viết lại thành.

Bài toán 1a. Cho $x,y,z\in(0,1/\sqrt{2})$ thỏa $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

CMR: $3(x+y+z)\ge 4(1+xyz)$
Ta sẽ chứng minh kết quả mạnh hơn:

Bài toán 1b. Cho $x,y,z\in[0,\sqrt{3}-1]$ thỏa $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.
CMR: $3(x+y+z)\ge 4(1+xyz)$
Chứng minh. Giả sử x=max(x,y,z), khi đó $x\in[1/2,\sqrt{3}-1]$. Ta có:

$(\sqrt{2-2x}-x)(\sqrt{2-2x}-1)^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2+x+3\sqrt{2-2x} \geq 4$ (1)

Mặt khác, dễ thấy: $1-z^2 = x^2+y^2+2xyz \geq 2xy(1+z)$ nên $x+2yz \leq 1$.

Cụ thể hơn, xét hiệu
$0 \leq 1-x-2yz = (\sqrt{2}-\sqrt{1+x+2yz})(\sqrt{2}+\sqrt{1+x+2yz})$

Ta có: $2x(\sqrt{2}+\sqrt{1+x+2yz}) \geq \sqrt{2}+1 > 3\sqrt{1-x}$, và $(1-x)(1+x+2yz) = (y+z)^2$,

suy ra: $2x(1-x-2yz) \geq 3\sqrt{1-x}(\sqrt{2}-\sqrt{1+x+2yz})$

$\Rightarrow 2x-2x^2-3\sqrt{2-2x}+3(y+z) \geq 4xyz$ (2)
Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta có đpcm.

Cách thay các yếu tố lượng giác bởi các biến thực x, y, z kèm điều kiện

$x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$ có thể tạm gọi là "đại số hóa lượng giác" (ngược với một cách làm thông thường là lượng giác hóa đại số). Chúng ta cũng có các lời giải đại số kiểu như vậy cho hai bài toán sau, cũng của **Jack Garfulkel** (thật ra thì Bài toán 2 yếu hơn - tức có thể xem như hệ quả- của Bài toán 1). Lời giải chi tiết xin dành cho các bạn.

Bài toán 2. Cho tam giác ngọn ABC. Chứng minh rằng:

$$\cos(\frac{A}{2})+\cos(\frac{B}{2})+\cos(\frac{C}{2}) \geq \frac{4}{\sqrt{3}}(1+\cos(\frac{A}{2}).\cos(\frac{B}{2}).\cos\frac{C}{2}))$$

Bài toán 3. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:
$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)+\cos\left(\frac{C-A}{2}\right) \geq \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin A+\sin B+\sin C)$

Như chúng ta sẽ thấy, lời giải có vẻ "kì lạ" của bài toán 1.b nói trên thật ra chẳng kì lạ chút nào. Lời giải này chẳng qua là viết lại dưới dạng đại số một lời giải dựa trên biến đổi lượng giác đã đăng trên THTT 12/2001, có điều lời giải lượng giác cần điều kiện $A,B,C \geq \frac{\pi}{4}$, trong khi lời giải đại số thì bất ngờ thoát được điều kiện đó. Còn viết một biến đổi lượng giác dưới dạng đại số thế nào thì ta sẽ đề cập sau đây

Phần 2.Tới một bài toán Olympic

Chúng ta có một ví dụ khác, được trình bày cụ thể hơn, cho mối liên hệ giữa cách làm đại số và lượng giác. Sau đây là một bài toán trong đề dự tuyển IMO 1995.

Bài toán 1. Tìm tất cả các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ 4xyz-(a^2x+b^2y+c^2z)=abc \end{cases}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương cho trước.

Nhận xét rằng nếu đặt

$$\alpha=\frac{a}{2\sqrt{yz}},\beta=\frac{b}{2\sqrt{zx}},\gamma=\frac{c}{2\sqrt{xy}}$$

thì hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x+y+z=2\sqrt{xy}\alpha+2\sqrt{yz}\beta+2\sqrt{zx}\gamma (1) \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\gamma=1 (2) \end{cases}$$

Hệ trên thuộc loại "không mẫu mực" vì có tới 3 ẩn trong khi chỉ có 2 phương trình, và thực chất nó là một bài toán cực trị. Cụ thể hơn, ta thấy nếu đặt

$\alpha=\cos A, \beta=\cos B, \gamma=\cos C$

với A, B, C là 3 góc một tam giác, thì "cốt lõi" bài toán trên chính là BDT quen thuộc:

$2bc\cos A+2ca\cos B+2ab\cos C\leq a^2+b^2+c^2$ (*)

Tới đây, có lẽ các bạn đã thấy rõ lời giải bài toán 1.

Bây giờ, ta khái quát lại bài toán ở trên thành

Bài toán 2. Cho các số thực không âm a, b, c, x, y, z thỏa mãn $x+y+z\geq a+b+c$.

CMR: $ax^2+by^2+cz^2+xyz\geq 4abc$.

Đây là một bài toán hay. Tất nhiên chúng ta có thể dùng lượng giác hóa như phân tích ở trên để giải, nhưng từ đẳng thức (2) ta còn hi vọng sẽ có một lời giải khác cho nó chỉ bằng đại số.

Trước hết, chúng ta thử nhìn BDT (*) dưới quan điểm đại số.

Bài toán 3. Cho $\alpha,\beta,\gamma\in[-1,1]$ thỏa $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\gamma\leq 1$, và các số thực a,b,c.

CMR: $2bc\alpha+2ca\beta+2ab\gamma\leq a^2+b^2+c^2$.

Chứng minh.

Xuất phát từ lời giải lượng giác

$$a^2+b^2+c^2-2bc\cos A-2ca\cos B-2ab\cos C$$
$$=(b\sin C-c\sin B)^2+(a-b\cos C-c\cos B)^2\geq 0$$

ta thay (α,β,γ) cho $(\cos A,\cos B,\cos C)$ để thu được biến đổi

$$a^2+b^2+c^2-2bc\alpha-2ca\beta-2ab\gamma=$$

$$[a^2-2a(c\beta+b\gamma)+(c\beta+b\gamma)^2]+[(1-\gamma^2)b^2+(1-\beta^2)c^2]-2bc(\alpha+\beta\gamma)$$
$$=(a-b\gamma-c\beta)^2+(\sqrt{1-\gamma^2}b+\sqrt{1-\beta^2}c)^2+2bc(\sqrt{(1-\beta^2)(1-\gamma^2)}-\alpha-\beta\gamma)\geq 0$$

Bài toán 3 chứng minh xong.
Bây giờ ta áp dụng các biến đổi trên vào bài toán 2.
Giả sử $ax^2+by^2+cz^2+xyz<4abc$,
khi đó a, b, c đều dương và
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\gamma<1$
Với $\alpha=\frac{x}{2\sqrt{bc}}, \beta=\frac{y}{2\sqrt{ca}}, \gamma=\frac{z}{2\sqrt{ab}}$
Sử dụng các phép biến đổi trong chứng minh **Bài toán 3**, ta có

$$a+b+c-x-y-z>0$$
$$\Leftrightarrow a+b+c-2\sqrt{bc}\alpha-2\sqrt{ca}\beta-2\sqrt{ab}\gamma>0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b}\gamma-\sqrt{c}\beta)^2+(\sqrt{1-\gamma^2}b+\sqrt{1-\beta^2}c)^2+2\sqrt{bc}(\sqrt{(1-\beta^2)(1-\gamma^2)}-\alpha-\beta\gamma)>0$$
$$\Leftrightarrow (2a-z-y)^2+(\sqrt{4ab-z^2}-\sqrt{4ac-y^2})^2+2(\sqrt{(4ac-y^2)(4ab-z^2)}-4ax-yz)>0$$

Từ đó, ta có một lời giải rất ngắn gọn cho **Bài toán 2** như sau.

Lời giải bài toán 2.

Tất nhiên ta chỉ cần xét khi $4ab>z^2$ và $4ca>y^2$. Khi đó $a>0$ và ta có

$$x+y+z\geq a+b+c$$
$$\Rightarrow 4ax\geq 4a^2+4ab+4ac-4ay-4az$$
$$\Rightarrow 4ax+2yz\geq (2a-y-z)^2+(4ab-z^2)+(4ac-y^2)\geq 2\sqrt{(4ab-z^2)(4ac-y^2)}$$
$$\Rightarrow (2ax+yz)^2\geq (4ab-z^2)(4ac-y^2)$$
$$\Rightarrow 4a(ax^2+by^2+cz^2+xyz)\geq 16a^2bc$$

Suy ra đpcm.

Đối với tôi, đây là một lời giải thật sự ấn tượng. Nó là kết quả của một "chu trình": chuyển từ đại số qua lượng giác, rồi chuyển ngược trở lại đại số. Tuy nhiên, đây không hẳn là con đường duy nhất để có lời giải này. Trước đây, đã có lần tôi đưa bài toán 2 lên diễn đàn toán học và nhận được một lời giải rất giống về mặt ý tưởng (chỉ dùng BDT Cauchy) của bạn **Trần Quốc Hoàn** (K09). Đó là một kỉ niệm thú vị.

Cuối cùng, xin nêu 1 bài toán để các bạn suy nghĩ.

Bài toán 4. Cho tứ diện vuông O.ABC. Giả sử α,β,γ là các góc nhị diện cạnh BC, CA, AB. CMR

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma\geq tg\alpha.tg\beta.tg\gamma+4cotg\alpha.cotg\beta.cotg\gamma\geq 2(cotg\alpha+cotg\beta+cotg\gamma)$$

Phần 3.Vài vấn đề với đường trung tuyến

Sau đây là một trong những bất đẳng thức rất đẹp khác của **Jack Garfulkel**:

Bài toán 1. $m_a+l_b+h_c\leq\sqrt{3}p$
với m_a, l_b, h_c, p là các kí hiệu quen thuộc của độ dài trung tuyến, phân giác trong,

đường cao, và nửa chu vi của một tam giác.

Cách đây gần 10 năm thì đây vẫn là một bài toán khó. Một trong những lời giải đầu tiên cho nó là chứng minh BDT mạnh hơn
$m_a+m_b+l_c\le\sqrt{3}p$
với c là cạnh lớn nhất trong 3 cạnh tam giác. Chứng minh này dựa trên bổ đề là

$m_a+m_b\le\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2+2c^2}$ (*)

Bổ đề trên được đề xuất và chứng minh dựa theo ý tưởng hình học (áp dụng BDT Ptoleme cho tứ giác lồi). Tuy nhiên, ta cũng có thể chứng minh trực tiếp dựa và biểu diễn tường minh của đường trung tuyến
$m_a=\sqrt{px+\frac{(y-z)^2}{4}}$
với a=y+z,b=z+x,c=x+y và p=x+y+z. Chúng ta sẽ trở lại Bổ đề này sau.

Trong một bài viết trên THTT, anh **Phạm Gia Vĩnh Anh** đã đưa ra và chứng minh một kết quả mạnh hơn là
Bài toán 2. $m_a+l_b+l_c\le\sqrt{3}p$
Hơn nữa, đây là một chứng minh ngắn gọn chỉ bằng BDT Cauchy (dựa trên biểu diễn của m_a và các đánh giá quen thuộc $l_b\le\sqrt{py},l_c\le\sqrt{pz}$).

Đối với bài toán 2, ta cũng có thể chứng minh ngắn gọn hơn nữa nhờ BDT Bunhiacopski. Lời giải sau đây dựa theo ý của bạn **Phùng Trọng Thực**.

Lời giải bài toán 2.Để đơn giản, ta cho p=1. Ta có
$$m_a+l_b+l_c\le\sqrt{x+\frac{(y-z)^2}{4}}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$
$$\le\sqrt{(1+2)(x+\frac{(y-z)^2}{4}+\frac{(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{2})}$$
$$=\sqrt{3(1+\frac{(y-z)^2}{4}-\frac{(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2}{2})}\le\sqrt{3}.$$
Kết quả ở bài toán 2 đã là khá chặt, vì như chúng ta biết, bất đẳng thức sau đây không đúng $m_a+m_b+m_c\le\sqrt{3}p$. Cũng trong bài viết của mình, anh **Vĩnh Anh** đã đưa ra BDT sau nhằm “bù đắp” cho sự không đúng của BDT trên.
$$m_a+m_b+m_c\le\sqrt{3}p+\frac{1}{4}(|a-b|+|b-c|+|c-a|)$$

Tuy nhiên, hằng số k=1/4 không phải là tốt nhất. Thực ra ta có
Bài toán 3. Chứng minh rằng trong một tam giác thì
$$m_a+m_b+m_c\le\sqrt{3}p+k(|a-b|+|b-c|+|c-a|)$$
với $k=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Với các cách tiếp cận trước đây thì thậm chí tìm ra hằng số tốt nhất đã là một bài toán rất khó. Tuy nhiên, giờ đây có lẽ lời giải bài toán trên là nằm trong khả năng của các bạn.

Một hướng khác để “bù đắp” cho BDT không đúng
$m_a+m_b+m_c\le\sqrt{3}p$
là như sau. Ta viết lại BDT này thành
$\sqrt{px+\frac{(y-z)^2}{4}}+\sqrt{px+\frac{(y-z)^2}{4}}+\sqrt{px+\frac{(y-z)^2}{4}}\le\sqrt{3}p$
Từ đó xuất hiện câu hỏi là có thể giảm hệ số k=1/4 trong công thức đường trung tuyến để BDT trên trở thành đúng. Một câu trả lời là k=1/12.
Bài toán 4. (VMEO I, bài 1) Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. CMR
$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{12}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{12}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{12}}\ge\sqrt{3}$

Bài toán này đặt ra dựa trên hướng tiếp cận ban đầu cho bài toán của **Jackgarfulkel**. Từ bổ đề (*) ta có thể khái quát thành
Bổ đề A. Cho các số thực a, b, u, v sao các căn thức dưới đây có nghĩa. Khi đó 2 điều sau là tương đương

(i) $\sqrt{a+u^2}+\sqrt{b+v^2}\ge\sqrt{2(a+b)+(u+v)^2}$

(ii) $4(u-v)(bu-av)\ge(a-b)^2$
(điều kết luận vẫn đúng nếu ta thay các dấu $\ge$ thành $\le$).
Để chứng minh bổ đề ta chỉ việc liên tục bình phương và đơn giản 2 vế.

Chứng minh bài toán 4.
Áp dụng bổ đề A với $u=(b-c)/\sqrt{12}$, $v=(a-c)/\sqrt{12}$ ta thu được
$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{12}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{12}}\le\frac{5-3c}{\sqrt{12}}$
Cùng với 2 BDT tương tự ta có đpcm.

Mặt dù con số k=1/12 dẫn tới biến đổi đại số rất đẹp ở lời giải trên, nhưng nó không phải là hằng số tốt nhất. Cũng như đối với Bài toán 3, trước đây thậm chí tìm ra hằng số tốt nhất đã là một bài toán rất khó, nhưng bây giờ thì giải quyết nó không phải là điều quá khó. Cụ thể, kimluan đã tìm được kết quả sau bằng dồn biến.
Bài toán 5. Cho các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng
$\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{b+k(c-a)^2}+\sqrt{c+k(a-b)^2}\le\sqrt{3}$
với $k=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Chú ý rằng trong bài toán 5 thì $k=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ là hằng số tốt nhất vì đẳng thức xảy ra tại a=b=c=1/3 và a=1,b=c=0 và các hoán vị. Một điều thú vị là đây cũng chính là hằng số tốt nhất trong bài toán 3.

Khi đổi dấu BDT trong **Bài toán 5** thì ta được bài toán sau đây (đẳng thức cũng đạt được tại 2 chỗ), mà lời giải – khá đơn giản – xin được dành lại cho các bạn.
Bài toán 6. Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. CMR
$\sqrt{a+(b-c)^2}+\sqrt{b+(c-a)^2}+\sqrt{c+(a-b)^2}\geq\sqrt{3}$

Phần 4. Một dạng BDT chứa căn

Bổ đề A ở bài trên cho ta một tiêu chuẩn rất dễ kiểm tra đối với BDT có vẻ "không tầm thường" sau
$\sqrt{a+u^2}+\sqrt{b+v^2}\geq\sqrt{2(a+b)+(u+v)^2}.$
và từ đó dẫn tới khá nhiều bài toán thú vị. Bây giờ xuất hiện câu hỏi là liệu có một kết quả nào, tương tự như Bổ đề A, để áp dụng cho nhiều hơn 2 biến không? Nói riêng, trong trường hợp 3 số, thì liệu có một tiêu chuẩn nào (tương đối dễ kiểm tra) áp đặt lên các số a, b, c, x, y, z sao cho ta có
$\sqrt{a+x^2}+\sqrt{b+y^2}+\sqrt{c+a^2}\geq\sqrt{3(a+b+c)+(x+y+z)^2}$

Ở đây $\geq$ có thể thay bằng $\leq$. Tuy nhiên, một tiêu chuẩn tổng quát vẫn chưa tìm ra, và các BDT dạng này vẫn là những bài toán khó, gần như mỗi bài lại cần một cách giải riêng. Chẳng hạn, ta thấy các BDT đã nói ở mục trước nằm trong dạng tổng quát này: với a, b, c không âm, a+b+c=1 thì

$$\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{b+k(c-a)^2}+\sqrt{c+k(a-b)^2}$$
$$\leq\sqrt{3(a+b+c)+(\sqrt{k}(b-c)+\sqrt{k}(c-a)+\sqrt{k}(a-b))^2}=\sqrt{3}$$
với $k=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, và
$$\sqrt{a+(b-c)^2}+\sqrt{b+(c-a)^2}+\sqrt{c+(a-b)^2}$$
$$\geq\sqrt{3(a+b+c)+((b-c)+(c-a)+(a-b))^2}=\sqrt{3}$$

Sau đây là một số ví dụ khác cho các BDT dạng này.
Bài toán 1. Cho 3 số không âm x, y, z có tổng bằng 1. CMR:
$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2}\geq 2$

Nhận xét là BDT trên có dạng

$$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2}\geq\sqrt{3(x+y+z)+(y+z+x)^2}=\sqrt{4}=2,$$
Đồng thời đẳng thức xảy ra tại x=y=z=1/3 và x=1,y=z=0.
Chứng minh bài toán 1.
Ta quan sát mối tương quan giữa các biểu thức
$a_1=x+y^2, b_1=y+z^2, b_2=z+y^2$
Ta có
$b_1-b_2=(y-z)(1-y-z)=x(y-z)$

và

$a_1 = x+y^2 = x(1-x)+(x+y)^2-2xy = x(y+z)+(x+y)^2-2xy = (x+y)^2-x(y-z)$

Vậy: $a_1+b_1 = c+b_2$, với $c=(x+y)^2$.

Ta có bổ đề đơn giản sau đây cho phép hoán vị các biểu thức dưới dấu căn

Bổ đề. Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn a+b=c+d và $|a-b| \le |c-d|$. Thì $\sqrt{a}+\sqrt{b} \ge \sqrt{c}+\sqrt{d}$.

Trở lại bài toán, giả sử c=min(a,b,c). Ta sẽ kiểm tra rằng $|a_1-b_1| \le c-b_2$. Ta có:

$c-b_2 = (x+y)^2-(z+y^2) = x(x+2y)-z = x(1+y-z)-z = (x-z)+x(y-z)$

và

$a_1-b_1 = x+y^2-y-z^2 = x-y+(y-z)(1-x) = (x-z)-x(y-z)$

Vì x-z và x(y-z) đều không âm nên ta có đpcm.

Từ đó, áp dụng bổ đề ta có:

$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2} \ge (x+y)+\sqrt{z+y^2}$

Và suy ra

$\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2}$

$\ge x+y+\sqrt{z+y^2}+\sqrt{z+x^2}$

$\ge x+y+\sqrt{(\sqrt{z}+\sqrt{z})^2+(x+y)^2}$

$= x+y+\sqrt{4z+(1-z)^2} = x+y+(2-z) = 2$

Bài toán chứng minh xong!

Bài toán 2. (VMEO III, bài 8) Cho x, y, z là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$\sqrt[3]{x-y+z^3}+\sqrt[3]{y-z+x^3}+\sqrt[3]{z-x+y^3} \le 1$

Chứng minh.

Nhận xét rằng dấu "=" xảy ra x=y=z và x=1,y=z=0 (cùng các hoán vị). Ta cũng sẽ giải bài này bằng cách hoán đổi các biểu thức dưới dấu căn. Ta có bổ đề sau.

Bổ đề. Cho các só thực A, B, C, D thỏa mãn: $A+B=C+D \ge 0$ và $|A-B| \ge |C-D|$. Khi đó:

$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B} \le \sqrt[3]{C}+\sqrt[3]{D}$

Chứng minh đơn giản và xin dành lại cho các bạn.

Trở lại bài toán, ta đặt

$A=y-z+x^3, B=z-x+y^3, C=x-y+z^3$

Nếu có, chẳng hạn, $B+C \le 0$, thì $\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C} \le 0$ và $A \le y-z+x \le y+z+x=1$, nên ta có ngay đpcm.

Do đó, từ giờ trở đi ta chỉ cần xét khi $A+B \ge 0$, $B+C \ge 0$, $C+A \ge 0$. Vì BDT ban đầu có dạng hoán vị vòng quanh nên ta có thể giả sử $z=min\{x,y,z\}$. Khi đó ta cần xét 2 trường hợp $x \ge y \ge z$ và $y \ge x \ge z$.

*Trường hợp 1. Xét khi $x \ge y \ge z$. Ta có

$B+C=z^3+(y^3+z-y)$
và
$C-B=2x-y-z+z^3-y^3\geq y-z+z^3-y^3$
$z^3-(y^3+z-y)=(y-z)(1-y^2-yz-z^2)\geq 0$
nên áp dụng Bổ đề ta có:

$\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}\leq z+\sqrt[3]{D}$(2), với $D=y^3+z-y$.
Lại có:
$A+D=x^3+y^3\geq 0$
$A-D=x^3-y^3+2(y-z)\geq x^3-y^3\geq 0$
nên áp dụng Bổ đề ta có:
$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{D}\leq x+y$(3).
Từ (2) và (3) ta có đpcm.
*Trường hợp 2. Xét khi $y\geq x\geq z$. Ta có
$A+B=y^3+(x^3+y-x)$
và
$A-B=x+y-2z+x^3-y^3\geq y-x+x^3-y^3$

$=(x^3+y-x)-y^3=(y-x)(1-x^2-xy-y^2)\geq 0$
nên áp dụng Bổ đề ta có:

$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\leq y+\sqrt[3]{E}$(4), với $E=x^3+y-x$.
Lại có
$E+C=x^3+z^3\geq 0$
$E-C=x^3-z^3+2(y-x)\geq y^3-x^3\geq 0$
nên áp dụng Bổ đề ta có:

$\sqrt[3]{C}+\sqrt[3]{E}\leq x+y$ (5).
Từ (4) và (5) ta có đpcm.
Bài toán chứng minh xong!
Cũng xuất phát từ dạng BDT ở trên, ta có bài toán sau.
Bài toán 3.
Cho $x,y,z\geq -1$, $x+y+z\geq 0$. Chứng minh rằng
$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2}\geq 3$

Nhận xét rằng BDT trên có thể viết ở dạng
$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2}\geq\sqrt{3(1+x+1+y+1+z)+(y+z+x)^2}\geq 3$

Trong lời giải đầu tiên cho bài toán trên, tôi sử dụng Bổ đề A để suy ra phải có 1 BDT kiểu sau đây (hoán vị (x,y,z) nếu cần)
$\sqrt{1+x+\frac{y^2}{4}}+\sqrt{1+y+\frac{z^2}{4}}\geq\sqrt{2(2+x+y)+\frac{(y+z)^2}{4}}$,
rồi sau đó dùng BDT

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}\geq\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

để thực hiện việc dồn căn.

Tuy nhiên, khi bài toán này được đưa lên diễn đàn toán học thì thầy **namdung** đã đề xuất

một Bổ đề khác cho phép chứng minh gọn hơn nhiều.

Chứng minh bài toán 3.

Trước hết ta có Bổ đề sau, chứng minh đơn giản bằng cách bình phương 2 vế.

Bổ đề. Cho các số thực a, b, u, v sao cho các căn thức dưới đây có nghĩa. Khi đó

$$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\geq 1+\sqrt{1+a+b}\Leftrightarrow ab\geq 0$$

Trở lại bài toán 3. Trong 3 số $x+y^2$, $y+z^2$, $z+x^2$ phải có 2 số cùng dấu (tức là tích

của chúng ≥ 0), ta có thể giả sử là $x+y^2$ và $y+z^2$. Khi đó, áp dụng Bổ đề, ta có

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2}$$
$$\geq 1+\sqrt{(1+x+y+z^2)+y^2}+\sqrt{(1+z)+x^2}$$
$$\geq 1+\sqrt{(\sqrt{1+x+y+z^2}+\sqrt{1+z})^2+(y+x)^2}$$
$$\geq 1+\sqrt{(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z})^2+z^2}$$

Ta có

$$(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z})^2+z^2\geq 4$$
$$\Leftrightarrow 2+2z^2+2\sqrt{(1-z+z^2)(1+z)}\geq 4$$
$$\Leftrightarrow z^2+\sqrt{1+z^3}\geq 1$$

Nếu $z\geq 0$ thì $\sqrt{1+z^3}\geq 1$, còn nếu $z<0$ thì:

$$z^2+\sqrt{1+z^3}\geq z^2+(1+z^3)=1+z^2(1+z)\geq 1$$

Bài toán chứng minh xong.

Bài toán 3 đã được **kimluan** làm mạnh thành kết quả sau đây.

Bài toán 4. Cho $x,y,z\in[-1,1]$ và x+y+z=0. CMR

$$\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2}+\sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2}+\sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2}\geq 3$$

Đẳng thức xảy ra tại x = y = z = 0 và x =0,y =1,z = -1. Đây là 1 BDT đẹp và ấn tượng nhưng chưa có một lời giải đơn giản nào cho nó.

Dạng BDT xuất phát từ Bổ đề A cũng có thể mở rộng cho nhiều hơn 3 số. Sau đây là một ví dụ cho trường hợp 4 số.

Bài toán 5. Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn $max(xy,yz,zt,tz)\leq 1$. CMR

$$\sqrt{1-xy+y^2}+\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-zt+t^2}+\sqrt{1-tx+x^2}$$

$\geq \sqrt{16+(x-y+z-t)^2}$

Đây là một bài toán khó. Lưu ý rằng BDT trên có thể viết ở dạng
$\sqrt{1-xy+y^2}+\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-zt+t^2}+\sqrt{1-tx+x^2}$
$\geq \sqrt{4(1-xy+1-yz+1-zt+1-tz)+(y+z+t+x)^2}$
$=\sqrt{16+(x-y+z-t)^2}$.

Chứng minh bài toán 5.
*Trước hết, để có cảm giác về bài toán, ta hãy xét một trường hợp riêng: cho x=z, y=t. Khi đó, với điều kiện $xy \leq 1$, ta cần chứng minh
$\sqrt{1-xy+y^2}+\sqrt{1-xy+x^2} \geq \sqrt{4+(x-y)^2}$
Để ý là $2(1-xy+1-xy)+(x+y)^2=4+(x-y)^2$, áp dụng Bổ đề A thì BDT trên tương đương với $4(1-xy)(y-x)^2 \geq 0$. Điều này đúng vì $xy \leq 1$.

*Trở lại bài toán tổng quát, ta sẽ tìm cách quy về trường hợp 2 số. Ta hi vọng sẽ có BDT dạng như

$$\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-tx+x^2} \geq \sqrt{1-xy+x^2}+\sqrt{1-zt+z^2}\ (*)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1-yz+z^2}-\sqrt{1-zt+z^2})+(\sqrt{1-tx+x^2}+\sqrt{1-xy+x^2}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z(t-y)}{\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-zt+z^2}}+\frac{x(y-t)}{\sqrt{1-tx+x^2}+\sqrt{1-xy+x^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-y)\left(\frac{z}{\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-zt+z^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-tx+x^2}+\sqrt{1-xy+x^2}}\right) \geq 0$$

Bằng tính toán cụ thể, ta chứng minh được thừa số thứ 2 của biểu thức vế trái cùng dấu với z-x.
Do đó BDT (*) tương đương với $(t-y)(z-x) \geq 0$(**). Điều thú vị là bằng cách hoán vị ta có thể giả sử có điều này. Thật vậy, BDT ở đề bài là không đổi nếu ta làm việc với bộ 4 số (y,z, t, x), và với bộ 4 số này thì BDT (**) trở thành $(x-z)(t-y) \geq 0$(***). Vì (**) và (***) phải có một cái đúng, nên ta có thể gỉ sử là (**) đúng. Khi đó (*) đúng.

Sử dụng (*) và trường hợp 2 số, ta có
$\sqrt{1-xy+y^2}+\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-zt+t^2}+\sqrt{1-tx+x^2}$
$\geq \left(\sqrt{1-xy+y^2}+\sqrt{1-xy+x^2}\right)+\left(\sqrt{1-zt+t^2}+\sqrt{1-zt+z^2}\right)$
$\geq \sqrt{4+(x-y)^2}+\sqrt{4+(z-t)^2}$
$\geq \sqrt{(2+2)^2+(x-y+z-t)^2}=\sqrt{16+(x-y+z-t)^2}$

Bài toán chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi x = y = z = t hoặc x = z,y = t,xy =1.

Dưới đây là hai bài toán khác, cũng ở dạng này, mà lời giải xin được dành lại cho các bạn.

Bài toán 6. Cho các số thực $x,y,z \in [-1,1]$ thỏa mãn x+y+z=0. CMR

$$\sqrt{1+x+\frac{y^2}{6}}+\sqrt{1+y+\frac{z^2}{6}}+\sqrt{1+z+\frac{x^2}{6}} \leq 3$$

Bài toán 7. Cho các số thực $x,y,z,t \in [-1,1]$ thỏa mãn $x+y+z+t \geq 0$. CMR

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+t^2}+\sqrt{1+t+x^2} \geq 4.$$

------------------------------------ Hết ------------------------------------

''Niềm vui sáng tạo là cảm hứng cho chúng ta theo đuổi các ý tưởng đến tận cùng ''