Tập trù mật

*) Chắc hẳn các bạn đều đã biết đến phương trình hàm Cosi và cách chứng minh của nó. Trong đó, ta có sử dụng 1 mệnh đề: mọi số ~~thực~~ vô tỷ x đều tồn tại 1 dãy vô hạn số hữu tỷ dần đến nó. Nghe thật đơn giản nhưng nó lại có liên quan đến một phần khá quan trọng của lý thuyết giải tích: tập trù mật. Vậy trù mật là gì?

Trước hết ta đi vào phần định nghĩa

I, Định nghĩa

1. Đ/n: Giả sử A, B là các tập số: $A, B \subset \mathbb{R}$

ta nói A là tập con trù mật trong B nếu A, B thoả mãn 2 điều kiện sau:

i) $A \subset B$

ii, $\forall x \in B$ và $\forall \varepsilon > 0$ tuỳ ý, đều $\exists y \in A$ sao cho $|x-y| < \varepsilon$.

- VD: tập các hữu tỉ trên $[0,1]$ là trù mật trong $[0,1]$.

2. t/c cơ bản

- Nếu $A \subset B \subset C$, A trù mật trong C thì B trù mật trong C
- Nếu A trù mật trong B thì $\forall x \in B$ đều $\exists$ dãy $\{x_n\}$ sao cho

  * $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $x_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

II. Một số định lý

1. Định lý 1:

- Giả sử hai hàm số $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho: $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A$ trong đó A là 1 tập con trù mật trong $\mathbb{R}$. Khi đó $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- có thể thay giả thiết cả 2 hàm liên tục bằng giả thiết 1 hàm liên tục, 1 hàm đơn điệu thì kết quả vẫn đúng.

Chứng minh:

+) Nếu cả f và g liên tục. Xét $x_0 \in \mathbb{R}$ bất kỳ

Nếu $x_0 \in A \Rightarrow f(x_0) = g(x_0)$

Nếu $x_0 \notin A$ thì đó $\exists$ dãy $\{x_n\}_1^\infty$ sao cho:

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \in A$ $\forall n$.

Xét hàm $h(x) = f(x) - g(x)$ liên tục, $h(x_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow h(x_0) = 0$.

Vậy $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

*) Nếu 1 hàm liên tục, 1 hàm đơn điệu.

Không mất tính tổng quát, giả sử f liên tục, g đơn điệu

Xét $x_0 \in R$: Nếu $x_0 \in A \Rightarrow f(x_0) = g(x_0)$

Nếu $x_0 \notin A$:

Khi đó A phân hoạch thành $A = B \cup C$ trong đó $B = \{x \in A \mid x > x_0\}$

$C = \{x \in A, x < x_0\}$

$\Rightarrow$ B và C là các tập trù mật trên $[x_0, +\infty)$ và $(-\infty, x_0]$.

$\Rightarrow \exists$ 2 dãy $\{\alpha_n\}_1^\infty$, $\{\beta_n\}_1^\infty$ sao cho:

$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = x_0$, $\alpha_n \in A \ \forall n$

$\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_n > \ldots$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = x_0$, $\beta_n \in A \ \forall n$.

+) TH1: g đơn điệu tăng.

ta có: $f(\alpha_n) = g(\alpha_n) \ \forall n \in N$

$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = f(x_0)$, $g(\alpha_n) < g(x_0) \ \forall n \in N$

$\lim_{n\to\infty} g(\alpha_n) = f(x_0) \Rightarrow f(x_0) \le g(x_0)$ (1)

và $f(\beta_n) = g(\beta_n) > g(x_0) \ \forall n \in N$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(\beta_n) = \lim_{n\to\infty} f(\beta_n) = f(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0) \ge g(x_0)$ (2)

từ (1) (2) $\Rightarrow f(x_0) = g(x_0)$

$\Rightarrow f(x) = g(x) \ \forall x \in R$.

+) TH2: g đơn điệu giảm: hoàn toàn tương tự.

Vậy định lý được chứng minh hoàn toàn.

2. Định lý 2:

Giả sử A là tập con trù mật trong B và $f: R \to R$ là 1 hàm liên tục.

CMR: $f(A)$ trù mật trong $f(B)$

Chứng minh:

Giả sử $y \in B$ và $x_0 = f(y)$ bất kỳ.

Do A trù mật trong B nên $\forall \varepsilon_1 > 0$ cho trước, $\exists x \in A$ sao cho $|x - y| < \varepsilon_1$

Do f liên tục nên $\forall \varepsilon > 0$ cho trước, $\exists$ ~~$x \in A$~~ $\delta > 0$ sao cho $\forall x \in (y - \delta, y + \delta)$ thì $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

lấy $\varepsilon_1 = \delta$, $\exists x \in A$ sao cho $|x - y| < \varepsilon_1$

$\Rightarrow \forall \varepsilon$ cho trước, $\exists x \in A$ sao cho $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$\Rightarrow f(A)$ trù mật trong $f(B)$

Định lý 2 được chứng minh.

3. Định lý 3:

Cho dãy số dương $\{a_n\}_1^\infty$ và $\{b_n\}_1^\infty$ T/mãn:

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots \to +\infty$$

$$0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots \to +\infty$$

Biết rằng $\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_n) = 0$

CMR: tập hợp $\{a_n - b_m \mid m = 1, 2, \dots\}$ trù mật trong R.

Chứng minh.

ta chứng minh $\forall x \in R$ và $\forall \varepsilon > 0$ tuỳ ý, $\exists m, n \in N$ sao cho $|a_n - b_m - x| < \varepsilon$.

Xét $\{p_n\}$: $p_n = a_n - x$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$, p_n tăng

$\Rightarrow \exists\, n_0$ đủ lớn sao cho $\forall n > n_0$, $p_n > b_0$

$\Rightarrow$ Với mỗi $n \in N$, $n > n_0$, $\exists!\, m = \varphi(n)$ sao cho

$b_{m+1} > p_n > b_m$ (do $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$)

Hơn nữa, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\varphi(n)) = +\infty$

$$|p_n - b_m| < b_{m+1} - b_m$$

$$\lim_{m\to+\infty}(b_{m+1} - b_m) = 0$$

Suy ra $\exists\, m, n \in N^*$: $|p_n - b_m| < \varepsilon$ với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý,

$\Rightarrow \exists\, m, n \in N^*$: $|a_n - b_m - x| < \varepsilon$ với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý

$\Rightarrow A = \{a_n - b_m \mid m, n \in N^*\}$ trù mật trên R.

Ai. - ta có đpcm.

4. ~~Định lý~~ * Một số kết quả khác:

4.1) Giả sử $\alpha \in R$, khi đó: $\alpha \notin Q \Leftrightarrow$ tập $\{\{n\alpha\} \mid n \in N\}$ trù mật trong $[0, 1]$

4.2, Giả sử $\beta > 0$

Với mỗi $x \in R$ biểu diễn $x = k\beta + \gamma$ với $k \in Z$, $0 \le \gamma < \beta$

$\left(k = \left[\frac{x}{\beta}\right], \gamma = \beta\left\{\frac{x}{\beta}\right\}\right)$

khi đó ký hiệu $\{x\} (\bmod \beta) = \gamma$.

thì $\{\{nx\} (\bmod \beta) \mid n \in N\}$ trù mật trong $[0, \beta] \Leftrightarrow \frac{x}{\beta} \notin Q$

4.3, Định lý Kosma.

Giả sử $u_1, u_2, \dots$ là 1 dãy số thực thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

CMR: $\exists\, x \in R$ sao cho tập

$A = \{\{x . u_n\} \mid n \in N\}$ trù mật trong $[0, 1]$.

Chứng minh:

Dễ thấy các kết quả 4.2 và 4.3 là hệ quả của kquả 4.1

Vì vậy, ta chỉ cần chứng minh 4.1.

Trước hết, ta xét bổ đề sau:

*) Bổ đề Dirichlê: Cho $\alpha \in R$. Khi đó với mọi $n \in N^*, n \geq 2$, tồn tại các số nguyên p, q sao cho $1 \leq q \leq n$, $p \in Z$ + t/mãn:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q(n+1)} \quad (1)$$

Chứng minh bổ đề:

Xét n số $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$ và $n+1$ khoảng $[0, \frac{1}{n+1}), [\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}), \ldots [\frac{n}{n+1}, 1)$

+) Nếu $\exists k, 1 \leq k \leq n$ sao cho $\{k\alpha\} \in [0, \frac{1}{n+1})$.

Chọn $q = k$, $p = [q\alpha]$. Ta có:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{\alpha q - p}{q}\right| = \left|\frac{\{q\alpha\}}{q}\right| < \frac{1}{q(n+1)} \quad \text{(t/mãn (1))}$$

+) Nếu $\exists k, 1 \leq k \leq n$ sao cho $\{k\alpha\} \in [\frac{n}{n+1}, 1)$

Chọn $q = k$, $p = [q\alpha] + 1$. Ta có:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{q\alpha - p}{q}\right| = \left|\frac{1 - \{q\alpha\}}{q}\right| < \frac{1}{q(n+1)} \quad \text{(t/mãn (1))}$$

+) Trong các trường hợp còn lại, n số thuộc n-1 khoảng $[\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}), \ldots, [\frac{n-1}{n+1}, \frac{n}{n+1})$. Khi đó, theo nguyên lý Dirichlê thì phải tồn tại 2 số thuộc cùng 1 khoảng, tức là $\exists k, l$ với $1 \leq k < l \leq n$ để:

$$|\{k\alpha\} - \{l\alpha\}| < \frac{1}{n+1}$$

Chọn $q = |k - l|$, $q \leq n$

$p = |[k\alpha] - [l\alpha]|$

Khi đó,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{\alpha q - p}{q}\right| = \left|\frac{\alpha|k-l| - |[k\alpha] - [l\alpha]|}{q}\right|$$

$$\leq \left|\frac{|[\alpha k] - [l\alpha]| + |\{\alpha k\} - \{l\alpha\}| - |[k\alpha] - [l\alpha]|}{q}\right|$$

$$= \left|\frac{|\{k\alpha\} - \{l\alpha\}|}{q}\right|$$

$$\leq \frac{1}{q(n+1)} \quad \text{(t/mãn (1))}.$$

Vậy bổ đề Dirichlê đc chứng minh hoàn toàn.

<u>Trở lại bài toán</u>, điều phải chứng minh tương đương với $\forall b \in [0,1]$, $\forall \varepsilon > 0$ tuỳ ý, đều tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $|\{n\alpha\} - b| < \varepsilon$ (*)

(*) sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được

$\forall [a,b] \subset [0,1]$, đều $\exists n \in \mathbb{N}$ sao cho $\{n\alpha\} \in [a,b]$ (**)

Trước hết, ta chứng minh $\forall \varepsilon > 0$ tuỳ ý, đều tồn tại n sao cho $\{n\alpha\} < \varepsilon$

Từ đây, ta có thể suy ra (**) cho trường hợp $\alpha = 0$.

thật vậy, $\exists n_1$ sao cho $\frac{1}{n_1} < \varepsilon$

Áp dụng bổ đề Dirichlê, $\exists \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$, $1 \le q_1 \le n_1$ sao cho:

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| \le \frac{1}{q_1(n_1+1)} < \frac{\varepsilon}{q_1} \Rightarrow$$

$$(\Leftrightarrow) \quad |\alpha q_1 - p_1| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Do $\alpha \notin \mathbb{Q}$ nên $\exists n_2 > n_1$, $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{1}{n_2+1} < \left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right|$

Lại áp dụng bổ đề Dirichlê:

$\exists \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$, $1 \le q_2 \le n_2 + 1$ sao cho:

$$\left|\alpha - \frac{p_2}{q_2}\right| \le \frac{1}{q_2(n_2+1)} \quad \text{và} \quad q_2 \ne q_1.$$

$$\Rightarrow |\alpha q_2 - p_2| < \varepsilon. \quad (2)$$

từ (1)(2) ta có:
$$\begin{cases} |\alpha q_2 - p_2| < \varepsilon \\ |\alpha q_1 - p_1| < \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \{\alpha q_2\} < \varepsilon \\ \{\alpha q_2\} > 1 - \varepsilon \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \{\alpha q_1\} < \varepsilon \\ \{\alpha q_1\} > 1 - \varepsilon \end{array}\right. \end{cases}$$

+) Nếu 1 trong 2 số $\{\alpha q_1\}$; $\{\alpha q_2\}$ có 1 số nhỏ hơn ε thì khẳng định trên được chứng minh.

+) Nếu $\begin{cases} \{\alpha q_1\} > 1 - \varepsilon \\ \{\alpha q_2\} > 1 - \varepsilon \end{cases}$

Xét $n = |q_2 - q_1| \Rightarrow n \in \mathbb{N}^*$ và $\{n\alpha\} = \{|q_2\alpha - q_1\alpha|\} = \{|\{\alpha q_2\} - \{\alpha q_1\}|\}$
$= \{|\{\alpha q_2\} - \{\alpha q_1\}|\} < \varepsilon$

Vậy luôn tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\{n\alpha\} < \varepsilon$ với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý.

Với $a, b > 0$, chọn $\begin{cases} \varepsilon < b - a \\ \varepsilon < a \end{cases}$. Xét các số $\{n\alpha\}, 2\{n\alpha\}, \dots$

khoảng cách giữa 2 số liên tiếp là $\{n\alpha\} < \varepsilon < b - a$ và số đầu $\{n\alpha\} < a$.

$\Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $t\{n\alpha\} \in [a,b]$

Chọn $m = tn$, ta có $\{m\alpha\} = \{t[n\alpha] + t\{n\alpha\}\} = \{t\{n\alpha\}\}$
$= t\{n\alpha\} \in [a,b]$.

Vậy $\forall [a,b] \subset [0,1]$ đều $\exists n \in \mathbb{N}$: $\{n\alpha\} \in [a,b]$, (*) đc chứng minh nên bài toán 4.1 đc chứng minh hoàn toàn.

*) Nhận xét.

1. NX 1: Bằng việc chứng minh tương tự như trên, ta còn có thể chứng minh $\forall \alpha, \beta$ t/mãn $\alpha p + \beta q \notin \mathbb{Q}$ $\forall p, q \in \mathbb{Q}$ tuỳ ý; khi đó $A = \{(\{n\alpha\}, \{n\beta\}) | n \in \mathbb{N}^*\}$ trù mật trong hình vuông đơn vị. Phương hướng như sau:

+) Chứng minh $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*$ để:
$$\begin{cases} \{n\alpha\} < \varepsilon \\ \{n\beta\} < \varepsilon \end{cases}$$
(Áp dụng bổ đề Đirichlê cho 2 số α, β)

+) $\forall [a,b] \subset [0,1]$ và $\forall \varepsilon > 0$ tuỳ ý, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ để:
$$\begin{cases} \{n\alpha\} < \varepsilon \\ \{n\beta\} \in [a,b] \end{cases}$$

+) $\forall [a,b], [c,d] \subset [0,1]$ đều $\exists n \in \mathbb{N}^*$ sao cho
$$\begin{cases} \{n\alpha\} \in [a,b] \\ \{n\beta\} \in [c,d]. \end{cases}$$

từ đây ta có đpcm.

2. NX2: ta còn có thể chứng minh 1 kết quả mạnh hơn nữa đó là:

Cho $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \notin \mathbb{Q}$. Ký hiệu $n[a,b]$ là số các số tự nhiên k t/mãn $a \leq \{k\alpha\} \leq b$ $(0 \leq a < b < 1$ bất kỳ$)$. CMR: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n[a,b]}{n} = b - a$

Đây chính là bổ đề phân phối. Việc chứng minh của bổ đề này xin hẹn các bạn dịp khác thích hợp hơn.

III. Bài tập áp dụng.

Sau khi đọc xong phần định nghĩa và định lý ở trên, chắc hẳn các bạn đã có được 1 cái nhìn cơ bản về trù mật. Bài tập của phần này thường là rất khó, với trình độ học sinh phổ thông như chúng ta hiện nay thì việc có thể làm tất cả các dạng bài tập của phần này là không thể. Vì vậy, sau đây tôi chỉ đưa ra 1 số ví dụ và bài tập được coi là dễ nhất, cơ bản nhất để các bạn tham khảo, tập làm để nắm sâu hơn về định nghĩa và các định lý.

Ta sẽ đi từ bài dễ nhất.

1. Ví dụ 1:

Chứng minh rằng: $\exists$ vô số $n \in \mathbb{N}$ để $|\sin n| < \frac{1}{2}$.

Giải:

+) Do π là số vô tỷ nên $A = \{\{n\pi\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ trù mật trong $[0,1]$.

$\Rightarrow \exists$ vô số $n \in \mathbb{N}$ để $\{n\pi\} < \arcsin \frac{1}{2}$

Với $k = [n\pi] \Rightarrow |\sin k| < \frac{1}{2}$.

tồn tại vô số k như vậy $\Rightarrow \exists$ vô số n để $|\sin n| < \frac{1}{2}$.

+) ta có thể giải bằng cách khác như sau:

Áp dụng bổ đề Dirichlê $\Rightarrow \exists$ vô số $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \Rightarrow |\pi q - p| < \frac{1}{q}.$$

$$\Rightarrow |\sin p| < \sin \frac{1}{q}.$$

Với q đủ lớn thì $\sin \frac{1}{q} < \sin \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \exists$ vô số n để $|\sin n| < \frac{1}{2}$

2. Ví dụ 2:

Giả sử $b_1, b_2, \ldots$

$a_1, a_2, \ldots$

là 2 dãy số thực t/mãn các điều kiện sau:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

ii) $a_n > 0$ $\forall n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

CMR: tập hợp

$$A = \left\{ b_m - \sum_{k=1}^{n} a_k \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\}$$ trù mật trên $\mathbb{R}$.

Giải

Giả sử $x \in \mathbb{R}$ bất kì, ta chứng minh $\exists m, n \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$\left| b_m - \sum_{k=1}^{n} a_k - x \right| < \varepsilon$$ với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý cho trước.

Xét $\{c_n\}_1^\infty$: $c_n = b_n - x$. ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

ta chứng minh: $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$: $\left|c_m - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right| < \varepsilon$.

Do $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty \Rightarrow \exists n_0$ đủ lớn: $\forall m > n_0$, $c_m > a_1$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = +\infty \Rightarrow$ với mỗi $m > n_0$, $\exists$ duy nhất $\varphi(m) = n$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{\varphi(m)} a_i \le b_m < \sum_{i=1}^{\varphi(m)+1} a_i$$

Đồng thời, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(m) = +\infty$

ta có: $\left|c_m - \sum\limits_{i=1}^{\varphi(m)} a_i\right| < a_{\varphi(m)+1}$

Lại do $\lim a_n = 0$ nên $\exists m$ đủ lớn: $a_{\varphi(m)+1} < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists\, m,n \in \mathbb{N}^*: \left|c_m - \sum_{i=1}^{n} a_i\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists\, m,n \in \mathbb{N}^*: \left|b_m - \sum_{i=1}^{n} a_i - x\right| < \varepsilon$.

Do $x \in \mathbb{R}$ bất kì

Suy ra $A = \left\{ b_m - \sum_{i=1}^{n} a_i \mid m,n \in \mathbb{N}^* \right\}$ trù mật trên $\mathbb{R}$.

Bài toán đc giải xong.

*) <u>Nhận xét:</u>

Đây là 1 bài toán không khó nhưng có khá nhiều ứng dụng. Từ bài toán này ta có thể giải được khá nhiều bài toán về trù mật được cho là rất khó.

<u>3. Ví dụ 3:</u>

Cho dãy các số nguyên dương $\{a_n\}_1^\infty$ t/mãn $0 < a_{n+1} - a_n < \sqrt{a_n}$

CMR: tập hợp $\left\{ \frac{a_m}{a_n} \mid m \le n \right\}$ trù mật trong $[0,1]$.

<u>Giải.</u>

Do cách xác định dãy $\{a_n\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Xét 2 dãy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ và $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ sao cho:

$$x_n = y_n = \ln a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Khi đó ta có: $0 \le x_1 < x_2 < \dots$

$0 \le y_1 < y_2 < \dots$

và $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} (y_{n+1} - y_n) = 0$.

(Do $y_{n+1} - y_n = \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1}{\sqrt{a_n}} \to 0$)

Áp dụng định lý 3 suy ra: $A = \{ x_m - y_n \mid m,n \in \mathbb{N}^* \}$ trù mật trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow B = \{ x_m - x_n \mid m < n \in \mathbb{N}^* \}$ trù mật trên $(-\infty, 0]$.

$\Rightarrow S = \left\{ \frac{a_m}{a_n} \mid m < n,\ m,n \in \mathbb{N}^* \right\}$ trù mật trong $[0,1]$.

Bài toán được giải xong.

<u>4. Ví dụ 4:</u>

Cho số $\alpha \in \mathbb{R}$. Biết rằng $[\alpha[n\alpha]] + 1 = [\alpha^2 . n]$ $\forall n = 1,2,3,\dots$

CMR: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

<u>Giải.</u>

Để giải bài toán này ta sử dụng 1 kết quả đã đc chứng minh ở trên.

Cho 2 số thực α, β. Khi đó tập $A = \{ M(\{n\alpha\}, \{n\beta\}) \mid n \in \mathbb{N}^* \}$ trù mật trong hình vuông đơn vị khi và chỉ khi $\alpha p + \beta q \notin \mathbb{Q}$ $\forall p,q \in \mathbb{Q}$

<u>Trở lại bài toán.</u>

4. Ví dụ 4:

Chứng minh rằng tập hợp
$$A = \left\{ \varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\dots+\varepsilon_n\sqrt{2}}} \;\middle|\; n\in\mathbb{N}^*, \varepsilon_i = \pm 1 \right\}$$
trù mật trong đoạn $[-2,2]$.

Giải

Trước hết, ta cần bổ đề sau:

Bổ đề: Cho dãy đa thức $P_n(x)$ xác bởi:
$$P_1(x) = x$$
$$P_{n+1}(x) = [P_n(x)]^2 - 2$$
khi đó, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, phương trình $P_n(x) = 0$ có đúng 2^{n-1} nghiệm thực phân biệt tất cả đều thuộc $[-2,2]$.

Chứng minh bổ đề.

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P_n(x)$ là đa thức bậc 2^{n-1} do đó nó có không quá 2^{n-1} nghiệm thực phân biệt.

Do đó ta chỉ cần chứng minh trên $[-2,2]$, $P_n(x)$ có 2^{n-1} nghiệm thực phân biệt thì bổ đề được chứng minh.

Với $x\in[-2,2]$. Đặt $x = 2\cos t$ $(t\in[0,\pi])$.
$$P_1(x) = 2\cos t$$
$$P_2(x) = (2\cos t)^2 - 2 = 2\cos 2t$$
$$\dots$$
$$P_n(x) = 2\cos 2^{n-1}t \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$
$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2^{n-1}t = 0$$
$$t\in[0,\pi] \Rightarrow 2^{n-1}t \in [0, 2^{n-1}\pi]$$
$$\cos 2^{n-1}t = 0 \Leftrightarrow 2^{n-1}t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}, 0\le k < 2^{n-1})$$
$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{2^n} + \frac{k\pi}{2^{n-1}} \quad (0\le k < 2^{n-1})$$
Với 2^{n-1} giá trị phân biệt này của k thì $2\cos t$ cũng nhận 2^{n-1} giá trị phân biệt, tất cả đều thuộc $[-2,2]$ là nghiệm của $P_n(x)$.

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*$, phương trình $P_n(x) = 0$ có tất cả 2^{n-1} nghiệm thực phân biệt, tất cả đều thuộc $[-2,2]$.

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$ đặt $S = \varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\dots+\varepsilon_n\sqrt{2}}}$; $\varepsilon_i = \pm 1$

ta có: $S^2 - 2 = \varepsilon_2\sqrt{2+\dots+\varepsilon_n\sqrt{2}}$

$\dots$

$\Rightarrow S$ là nghiệm của $P_{n+1}(x)$

Theo bổ đề, $P_{n+1}(x)$ có đủ 2^n nghiệm thực, dạng lượng giác của nó là:
$$t = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}} + \frac{k\pi}{2^n}\right) \quad (0\le k\le 2^n - 1)$$

Suy ra: $A = \{2\cos\pi(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{k}{2^n}) \mid 0 \le k \le 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}^* \}$

Do tập hợp $\{(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{k}{2^n}) \mid 0 \le k \le 2^n - 1, n \in \mathbb{N}^* \}$ trù mật trong $[0,1]$

$\Rightarrow$ tập hợp $\{\pi(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{k}{2^n}) \mid 0 \le k \le 2^n - 1, n \in \mathbb{N}^* \}$ trù mật trong $[0, \pi]$

$\Rightarrow$ A trù mật trong $[-2,2]$.

Bài toán được giải xong.

5. Ví dụ 5:

Cho số $\alpha \in \mathbb{R}$. Biết rằng $[\alpha[n\alpha]] + 1 = [\alpha^2 . n]$ $\forall n = 1,2,3,\dots$

CMR: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Giải.

Để giải bài toán này ta sử dụng 1 kết quả đã được chứng minh ở trên

Cho 2 số thực α, β. Khi đó tập $A = \{ M(\{n\alpha\}, \{n\beta\}) / n \in \mathbb{N}^* \}$ trù mật trong hình vuông đơn vị khi và chỉ khi $\alpha p + \beta q \notin \mathbb{Q}$ $\forall p, q \in \mathbb{Q}$.

Trở lại bài toán

Đẳng thức đầu bài tương đương với:

$$[\alpha^2 n - \alpha\{\alpha n\}] + 1 = [\alpha^2 n].$$

$$\Leftrightarrow \quad [\{\alpha^2 n\} - \alpha\{\alpha n\}] + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \ge \alpha\{\alpha n\} - [\alpha^2 n] > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đây, ta dễ chứng suy ra $\alpha > 0$.

Ta chứng minh: $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Thật vậy, giả sử phản chứng rằng $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Xét 2 trường hợp.

+) TH1: $\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha\{\alpha n\} - \{\alpha^2 n\} = 0$ (vô lý)

+) TH2: $\alpha \notin \mathbb{N}$. Khi đó có thể viết $\alpha = \frac{p}{q}$ với $q > 1$.

Do đó, với $n = q$, ta có: $\alpha\{\alpha n\} = 0 \Rightarrow \alpha\{\alpha n\} - \{\alpha^2 n\} \le 0$ (vô lý)

Vậy điều g/sử sai $\Rightarrow \alpha \notin \mathbb{Q}$.

Tương tự, giả sử phản chứng rằng $\alpha^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{p}{q}$ $(p > 1, p$ k° CP$, q \in \mathbb{N}^*$ $(p,q) = 1$.

.) $q = 1$. Do $\{n\alpha\}$ trù mật trong $[0,1]$ nên cho $\{n\alpha\} \to 1$

$\Rightarrow \alpha \le 1$ (vô lý) vì $\alpha^2 = p > 1$.

.) $q > 1$. Xét khi $n \not\vdots q$, do $\{n\alpha\}$ trù mật trong $[0,1]$ nên cho $\{n\alpha\} \to 0$ ta luôn có $\{\alpha^2 . n\} \ge \frac{1}{q}$ (vô lý)

Vậy điều g/sử sai $\Rightarrow \alpha^2 \notin \mathbb{Q}$.

+) Chứng minh $\alpha > 1$: Giả sử $\alpha < 1$

Do $\{n\alpha^2\}$ trù mật trong $[0,1]$ (vì $\alpha^2 \notin \mathbb{Q}$) nên cho $\{n\alpha^2\} \to 1$

$\Rightarrow \alpha\{\alpha n\} \ge 1 \Rightarrow \alpha \ge 1$ (mâu thuẫn..)

Vậy $\alpha > 1$

+) Chứng minh $\alpha < 2$:

Ta có: $2 > \alpha\{n\alpha\}$

Do $\{n\alpha\}$ trù mật trong $[0,1]$ nên khi cho $\{n\alpha\} \to 1$, ta có $\alpha \geq 2$ $\lambda \geq \alpha$.

Vậy ta đã chứng minh được các khẳng định sau:

i) $\alpha \notin \mathbb{Q}$ và $\alpha^2 \notin \mathbb{Q}$

ii, $1 < \alpha < 2$.

Tiếp theo, ta chứng minh α là nghiệm của phương trình bậc 2:
$ax^2 - bx - c = 0$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b, c \neq 0$, $(a,b,c) = 1$.

Thật vậy, giả sử trái lại thì $\forall p, q \in \mathbb{Q}$, $p^2 + q^2 \neq 0$ tuỳ ý ta đều có $p\alpha + q\alpha^2 \notin \mathbb{Q}$.

Khi đó, tập $A = \{M(\{n\alpha\}, \{n\alpha^2\}) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ trù mật trong hình vuông đơn vị $\Rightarrow \exists$ dãy các giá trị của n để: $\begin{cases} \{n\alpha\} \to 1 \\ \{n\alpha^2\} \to 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \geq \alpha$ (vô lý)

Vậy α là n° của pt $ax^2 - bx - c = 0$.

Từ đẳng thức $1 \geq \alpha\{\alpha n\} - \{\alpha^2 n\} > 0$ thay n bởi $n.a$ đc:

$$1 \geq \alpha\{\alpha.a.n\} - \{b\alpha n\} > 0$$

Do $\{\alpha n\}$ trù mật trong $[0,1]$ nên chọn n_0 sao cho $\{n_0\alpha\} < \min\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{|b|}\right\}$

$$\Rightarrow \alpha\{\alpha.a.n_0\} = \alpha^2.a.n_0 \text{ và}$$

$$\{b.\alpha.n_0\} = \begin{cases} b.\alpha.n_0 \text{ nếu } b > 0 \\ 1 + b.\alpha.n_0 \text{ nếu } b < 0 \Rightarrow 1 \geq n_0(-c) > 0 \text{ (vô lý)} \end{cases}$$

$\Rightarrow b > 0$ và $a\alpha^2 - b > 0$

$\Rightarrow a, b, c > 0$.

⊛ ta chứng minh $a = 1$.

Giả sử phản chứng rằng $a > 1$. Ta có: $\alpha^2 = \frac{b\alpha}{a} + \frac{c}{a}$

$$\Rightarrow 1 \geq \alpha\{\alpha n\} - \left\{\frac{b.\alpha}{a}.n + \frac{c}{a}.n\right\} > 0$$

$$\Rightarrow 1 \geq \alpha\left\{a.\left\{\frac{\alpha n}{a}\right\}\right\} - \left\{\left\{\frac{b.\alpha.n}{a}\right\} + \left\{\frac{c}{a}.n\right\}\right\} > 0 \quad (1)$$

Với $n = ka + 1$

Do $\{k\alpha\}$ trù mật trong $[0,1]$ nên $\exists$ dãy các số k sao cho: $\{k\alpha\} \to \frac{c-\alpha}{a}$, $\{k\alpha\} > \frac{c-\alpha}{a}$.

$$\Rightarrow \left\{\frac{n\alpha}{a}\right\} \to 0$$

Từ (1) $\Rightarrow \left\{\left\{\frac{cn}{a}\right\}\right\} \geq 0 \Rightarrow c \mid a \Rightarrow (b,a) = 1$.

Khi đó ta sẽ có $1 \geq \alpha\{\alpha n\} - \left\{\frac{b.\alpha.n}{a}\right\} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Mà $\{\alpha n\}$ trù mật trong $[0,1] \Rightarrow$ cho $\{\alpha.n\} \to 1$, $\left\{\frac{b.\alpha.n}{a}\right\} \to 0$.

$$\Rightarrow \alpha.\{\alpha.n\} > 1 \quad (VL)$$

$\Rightarrow$ g/sử sai $\Rightarrow a = 1$.

Hoàn toàn tương tự ta đc: $b = c = 1$

$\Rightarrow \alpha$ là n° của pt bậc 2: $x^2 - x - 1 = 0$ mà $\alpha > 0$ $\Leftrightarrow \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài toán được giải xong.

(*) Nhận xét:

Các bạn có thể áp dụng cách trên để giải bài toán sau:

Cho $\alpha \in \mathbb{R}$ t/mãn $\alpha^3 = \alpha^2 + 1$. Với $n \in \mathbb{Z}^+$ đặt $A_n = [n\alpha]$, $B_n = [n\alpha^3]$, $C_n = [n\alpha^2]$.

CMR: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ta có: $A_n + B_n + C_n = C_{B_n} + \varepsilon_n$ với $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$.

(*) Câu hỏi mở

Phải chăng nếu số thực α t/mãn: $[n\alpha] + [n\alpha^2] + [n\alpha^3] = [\alpha^2[n\alpha^3]]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ thì α là n° duy nhất của $f(x) = x^3 - x^2 - 1$?

Cuối cùng xin nêu 1 số bài tập về trù mật để các bạn rèn luyện kĩ năng:

BT1: Cho dãy $\{a_n\}_1^\infty$ t/mãn: $\forall \alpha > 1$ thì:

$$\lim_{n \to \infty} a_{[\alpha^n]} = 0$$

CMR: $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Chú ý: Ngoài cách sử dụng tập trù mật, còn một cách khác khá ngắn gọn là áp dụng bổ đề sau: Giả sử dãy vô hạn tăng các số nguyên dương $\{u_n\}_1^\infty$. Khi đó tồn tại số thực γ, $1 < \gamma < 2$ sao cho 2 dãy $\{[\gamma^k]\}_{k \geq 1}^\infty$ và $\{u_n\}_1^\infty$ có vô hạn phần tử chung (chứng minh bằng đ/lý Cantor).

BT2: Cho $x > 1$. Đặt $a_n = [x^n]$ $\forall n = 1, 2, \ldots$

Đặt $a = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$. CMR: a là số vô tỷ.

BT3: Cho $M \subset \mathbb{N}^*$ t/mãn $x \in M \Rightarrow \begin{cases} [\sqrt{x}] \in M \\ 4x \in M \end{cases}$.

CMR: $M = \mathbb{N}^*$.

BT4: Cho $P \in \mathbb{Z}_x$, có $\deg P > 1$. CMR: tập $A = \{x \mid x \notin \mathbb{Q}, P(x) \in \mathbb{Q}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$.

BT5: Cho A là tập con trù mật của $\mathbb{R}$. Tìm tất cả $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l.tục t/mãn $\forall (x+y) \in A \Rightarrow (f(x) + f(y)) \in A$.