HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC - 2009

Đề thi: Môn Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Giả sử dãy số $\{x_n\}$ được xác định theo công thức

$$\begin{cases} x_1 = 1; \ \ x_2 = 1; \\ x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}), \ \ n = 3, 4, \dots. \end{cases}$$

Tính x_{2009}?

Câu 2. Cho hàm số $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp hai liên tục và $f''(x) > 0$ trên $[0,1]$. Chứng minh rằng

$$2\int_0^1 f(t)dt \geq 3\int_0^1 f(t^2)dt - f(0).$$

Câu 3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(x) \leq 4 + 2009x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \\ f(x+y) \leq f(x) + f(y) - 4, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Câu 4. Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện

$$f(g(x)) \equiv g(f(x)), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thực, thì phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ cũng không có nghiệm thực.

Câu 5. Cho hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định theo công thức

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \ \ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, \ \ y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}, \ \ n = 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng $x_n y_n \in (2,3), \ \ n = 2, 3, \dots$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Câu 6. Thí sinh làm một trong hai câu sau:

a) Cho $P(x)$ là đa thức bậc n với hệ số thực. Chứng minh rằng phương trình $2^x = P(x)$ có không quá $n+1$ nghiệm thực.

b) Cho $f(x) - x$ và $f(x) - x^3$ là những hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số $f(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$ cũng là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.
