HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC - 2009

Đề thi: Môn Đại số

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn các đẳng thức sau

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 2 \\ x^3+y^3+z^3 &= 0. \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có $x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}=0$.

Câu 2. Tồn tại hay không một ma trận thực A vuông cấp 2 sao cho

$$A^{2010} = \begin{pmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{pmatrix}?$$

Câu 3. Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp n sao cho C giao hoán với A và B, $C^2 = E$ (ma trận đơn vị) và

$$AB = 2(A+B)C.$$

a) Chứng minh rằng $AB = BA$.

b) Nếu có thêm điều kiện $A+B+C=0$, hãy chứng tỏ

$$\operatorname{rank}(A-C) + \operatorname{rank}(B-C) = n.$$

Câu 4. Tính A^{2009}, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Câu 5. Tìm tất cả các ma trận vuông A cấp n ($n \geq 2$) sao cho với mọi ma trận vuông B cấp n, ta đều có $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Câu 6. Thí sinh chọn một trong hai câu sau:

a) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

b) Ứng với mỗi đa thức $P(x)$ với hệ số thực và có nhiều hơn một nghiệm thực, gọi $d(P)$ là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai nghiệm thực bất kỳ của nó. Giả sử các đa thức với hệ số thực $P(x)$ và $P(x)+P'(x)$ đều có bậc k ($k>1$) và có k nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng $d(P+P') \geq d(P)$.