Bài 1 **Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9} \end{cases}$

Giải

+) ĐK: $\begin{cases} 1+2xy>0 \\ x(1-2x)\ge 0 \\ y(1-2y)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le \dfrac{1}{2} \\ 0\le y\le \dfrac{1}{2} \end{cases}$

+) Với điều kiện trên ta có $x^2\le \dfrac{1}{4}$ và $y^2\le \dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+2xy}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\ge \dfrac{2\sqrt{2}}{3}>\sqrt{2}\Rightarrow 2xy<1$

+) Mặt khác $\forall a,b\in\left[0;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ và $a.b<1$ ta luôn có bất đẳng thức sau: $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le \dfrac{2}{\sqrt{1+ab}},(*)$.

- Thật vậy bất đẳng thức (*) $\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}-\dfrac{4}{1+ab}\le 0$
- Theo bất đẳng thức B.C.S ta có $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\ge 1+ab\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}\le \dfrac{2}{1+ab}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}-\dfrac{2}{1+ab}\le 0$

- Mặt khác ta có: $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}-\dfrac{2}{1+ab}=\dfrac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)}\le 0$, vì $a,b\in\left[0;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ và $a.b<1$.

Do đó $\dfrac{2}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}-\dfrac{4}{1+ab}\le 0$ luôn đúng $\forall a,b\in\left[0;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ và $a.b<1$.

+) Vì $0\le x\le\dfrac{1}{2}$, $0\le y\le \dfrac{1}{2}$ và $2xy<1$.

Áp dụng BĐT (*) cho $a=\sqrt{2}x$, $b=\sqrt{2}y$ ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\le\dfrac{1}{\sqrt{1+2xy}}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y$

+) Vậy hệ phương trình ban đầu $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 162x^2-81x+1=0\end{cases}$

+) Giải hệ này và đối chiếu với các điều kiện ta có hai cặp nghiệm (x; y) như sau:

$\left(\dfrac{81+\sqrt{5913}}{324};\dfrac{81+\sqrt{5913}}{324}\right)$; $\left(\dfrac{81-\sqrt{5913}}{324};\dfrac{81-\sqrt{5913}}{324}\right)$.

+) Kết luận: Hệ có hai nghiệm là $\left(\dfrac{81+\sqrt{5913}}{324};\dfrac{81+\sqrt{5913}}{324}\right)$ và $\left(\dfrac{81-\sqrt{5913}}{324};\dfrac{81-\sqrt{5913}}{324}\right)$.

Bài 2 Cho dãy số (x_n) : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_n = \dfrac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \end{cases}$, $\forall n \ge 2$. Chứng minh rằng dãy (y_n) với $y_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$ và tìm giới hạn đó.

Giải

+) Từ giả thiết ta có $x_n > 0, \forall n \ge 1$.

Khi đó $x_n - x_{n-1} = \dfrac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} - x_{n-1} = \dfrac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} - x_{n-1}}{2} = \dfrac{2x_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}} > 0$, $\forall n \ge 2$.

Do đó (x_n) là dãy số tăng

+) Giả sử $\lim(x_n) = a \Rightarrow a > 0$ và ta có $a = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4a} + a}{2} \Leftrightarrow a = 0$, (vô lí).

Vậy $x_n \to \infty$ khi $n \to \infty$.

+) Mặt khác ta có $x_n = \dfrac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}$, $\forall n \ge 2 \Rightarrow x_n^2 = (x_n + 1)x_{n-1} \Rightarrow \dfrac{1}{x_{n-1}} - \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x_n^2}, \forall n \ge 2$

Do đó $y_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2} = \dfrac{1}{x_1^2} + \left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right) + \left(\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{x_{n-1}} - \dfrac{1}{x_n}\right) = \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_n} = 6 - \dfrac{1}{x_n}$, $\forall n \ge 2$.

+) Từ trên ta có $y_n < 6, \forall n \ge 1$, (vì $x_n > 0, \forall n \ge 1$). Mặt khác $y_n = y_{n-1} + \dfrac{1}{x_n} > y_{n-1}$. Do đó (y_n) là dãy tăng và bị chặn trên hay (y_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$.

+) Ta có : $\lim_{n \to +\infty} y_n = \lim_{n \to +\infty} \left(6 - \dfrac{1}{x_n}\right) = 6$, (vì $x_n \to \infty$ khi $n \to \infty$).

+) Kết luận : $\lim_{n \to +\infty} y_n = 6$.

Bài 3 **Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định A, B ($A \neq B$). Một điểm C di động trên mặt phẳng sao cho $\widehat{ACB} = \alpha$ không đổi $\left(0^0 < \alpha < 180^0\right)$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Các đường thẳng AI, BI cắt đường thẳng EF lần lượt tại M và N.**

a) Chứng minh rằng đoạn thẳng MN có độ dài không đổi.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

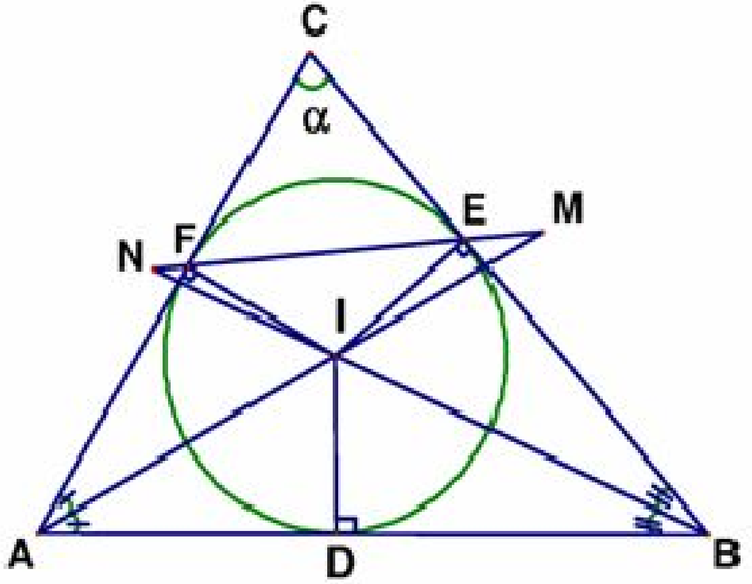
a) Chứng minh rằng đoạn thẳng MN có độ dài không đổi.

+) Ta có $\widehat{NFA} = \widehat{CFE} = \dfrac{180^0 - \widehat{ACB}}{2} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} + \dfrac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{AIN} \Rightarrow$ ***ANFI*** là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{INF} = \widehat{IAF} = \widehat{IAD}$ và $\widehat{ANI} = \widehat{AFI} = 90^0$

+) Mặt khác ta có $\Delta NIM \sim \Delta AIB$, (g-g) $\Rightarrow \dfrac{NM}{AB} = \dfrac{NI}{AI} = \cos\widehat{AIN} = \cos\dfrac{180^0 - \alpha}{2}$, (vì $\widehat{ANI} = 90^0$).

$\Rightarrow MN = AB.\cos\dfrac{180^0 - \alpha}{2}$ không đổi khi C thay đổi, **(đpcm)**.



b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định.

+) Gọi K là trung điểm của AB ta đã có $\widehat{ANB} = 90^0 \Rightarrow KA = KB = KN$

$\Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{KNB} + \widehat{KBN} = 2\widehat{KBN} = \widehat{ABC}$, (1).

+) Mặt khác từ $\Delta NIM \sim \Delta AIB$ ở câu (a) ta có $\widehat{NMI} = \widehat{IBA} = \widehat{IBE}$, (2).

$\Rightarrow$ IMEB là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IMB} = \widehat{IEB} = 90^0$

$\Rightarrow$ IMBD cũng là tứ giác nội tiếp vì $\widehat{IMB} + \widehat{IDB} = 180^0$.

$\Rightarrow \widehat{IMD} = \widehat{IBD}$, (3).

+) Từ (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{NMD} = \widehat{NMI} + \widehat{IMD} = \widehat{IBE} + \widehat{IBD} = \widehat{ABC}$, (4).

+) Từ (1) và (4) $\Rightarrow \widehat{NKA} = \widehat{NMD} \Rightarrow$ tứ giác NKDM nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua điểm K cố định, (***đpcm***).

Bài 4 Cho ba số thực a, b, c thoả mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương n, $a^n+b^n+c^n$ **là một số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên p, q, r sao cho a, b, c là ba nghiệm của phương trình** $x^3+px^2+qx+r=0$**.**

Giải

+) Giả sử tồn tại các số p, q, r thoả mãn bài toán. Theo định lí Viet ta có : $\begin{cases} a+b+c=-p \\ ab+bc+ca=q \\ abc=-r \end{cases}$

+) Như vậy để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh $\begin{cases} a+b+c\in Z \\ ab+bc+ca\in Z \\ abc\in Z \end{cases}$

+) Hiển nhiên $a+b+c\in Z$, (1). Vì theo giả thiết $a^n+b^n+c^n\in Z, \forall n$.

+) Vì $a^n+b^n+c^n\in Z, \forall n \Rightarrow a^2+b^2+c^2\in Z$, $a^3+b^3+c^3\in Z$, $a^4+b^4+c^4\in Z$, $a^6+b^6+c^6\in Z$

+) Ta sẽ đi chứng minh $abc\in Z$. Thật vậy:

- Ta có $2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow 2(ab+bc+ca)\in Z$
- Ta có $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=(a^2+b^2+c^2)^2-(a^4+b^4+c^4)\Rightarrow 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\in Z$
- Ta có $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\Rightarrow 2(a^3+b^3+c^3)-6abc=(a+b+c)\left[2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\right]$

$\Rightarrow 6abc=2(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)\left[2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\right]$

$\Rightarrow 6abc\in Z$

- Ta có $a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2=(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)$

$\Rightarrow 2(a^6+b^6+c^6)-6a^2b^2c^2=(a^2+b^2+c^2)\left[2(a^4+b^4+c^4)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\right]$

$\Rightarrow 6a^2b^2c^2=2(a^6+b^6+c^6)-(a^2+b^2+c^2)\left[2(a^4+b^4+c^4)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\right]$

$\Rightarrow 6a^2b^2c^2\in Z$

- Từ các dữ kiện $6abc\in Z$ và $6a^2b^2c^2\in Z\Rightarrow abc\in Z$, (2).

+) Ta sẽ đi chứng minh $ab+bc+ca\in Z$. Thật vậy:

- Ta có $\left(ab+bc+ca\right)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\Rightarrow 2\left(ab+bc+ca\right)^2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4abc(a+b+c)$

$\Rightarrow 2\left(ab+bc+ca\right)^2\in Z$

- Từ các dữ kiện $2(ab+bc+ca)\in Z$ và $\Rightarrow 2\left(ab+bc+ca\right)^2\in Z\Rightarrow ab+bc+ca\in Z$, (3).

+) Từ (1), (2) và (3) ta có bài toán được chứng minh.

Bài 5 Cho số nguyên dương n. Kí hiệu T là tập hợp gồm 2n số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có bao nhiêu tập con S của T có tính chất : trong S không tồn tại các số a, b mà $|a-b| \in \{1; n\}$.

***Lưu ý** Tập rỗng được coi là tập con có tính chất nêu trên.*

Giải

(Lời giải bài 5 được tham khảo tại http://forum.mathscope.org)

+) Trước hết ta xét bài toán sau:
Cho 2 hàng điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ ở trên và $B_1, B_2, ..., B_n$ ở dưới. Các điểm cặp điểm $(A_i; A_{i-1})$, $(B_{i-1}; B_i)$, $(A_i; B_i)$ được nối với nhau, ngoài ra A_1 và B_n cũng được nối với nhau. Tính số cách chọn ra một số điểm mà không có hai điểm nào được nối với nhau.

+) Gọi S_n là số cách chọn thỏa mãn điều kiện trên,nhưng có thể chứa cả A_1 và . Gọi x_n là số cách chọn thỏa mãn nhưng không chứa điểm nào trong 4 điểm A_1, B_1, A_n, B_n. Gọi y_n là số cách chọn thỏa mãn nhưng chứa đúng 1 điểm trong 4 điểm trên. Gọi z_n là số cách chọn thỏa mãn nhưng chứa đúng 2 điểm A_1, A_n hoặc B_1, B_n. Gọi t_n là số cách chọn nhưng chứa đúng 2 điểm A_1, B_n hoặc A_n, B_1.

Khi đó ta có $S_n = x_1 + y_n + z_n + t_n$ và số cách chọn thỏa mãn bài toán là $S_n - \frac{t_n}{2}$.

+) Dễ dàng lập công thức truy hồi cho S_n là $\begin{cases} S_0 = 1 \\ S_1 = 3 \\ S_{n+1} = 2S_n + S_{n-1} \end{cases}$.

+) Mặt khác ta có:
$x_n = S_{n-2}$, (1)
$y_n = 2(S_{n-1} - S_{n-2})$, (2)
$z_n = t_{n-1} + \frac{1}{2} y_{n-2}$ và $t_n = z_{n-1} + \frac{1}{2} y_{n-2}$, (3).
Từ (1) và (2) suy ra $z_n + t_n = S_n - S_{n-2} - 2(S_{n-1} - S_{n-2}) = 2S_{n-2}$, (4).
Từ (3) suy ra $z_n - t_n = -(z_{n-1} - t_{n-1})$. Từ đây dễ dàng suy ra $z_n - t_n = 2(-1)^{n-1}$, (5).

Từ (4) và (5) ta có $t_n = S_{n-2} + (-1)^n$.

Vậy ta có số dãy thỏa mãn là $S_n - \frac{1}{2} t_n = \frac{2S_n - S_{n-2} + (-1)^{n-1}}{2}$

Cuối cùng thu được kết quả là $\frac{\left(5 + 4\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1} + \left(5 - 4\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1} + 2.(-1)^{n-1}}{4}$

+) Trở lại bài toán đang xét nếu ta coi điểm A_i được gắn số n + i và điểm B_i được gắn số i thì ta có kết quả của bài toán số 5.