

# KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA

## LỚP 12 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM HỌC 2009-2010

Thời gian làm bài : 180 phút

**Câu 1.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases}$$

**Câu 2.** Cho dãy số  $\{a_n\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  được xác định bởi  $a_1 = 5$ ,  $a_n = \left(a_{n-1} + 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$  với mọi  $n \geq 2$ .

- Tìm công thức tổng quát của dãy  $\{a_n\}$ .
- Chứng minh rằng dãy  $\{a_n\}$  là dãy giảm.

**Câu 3.** Cho đường tròn  $(O)$ . Hai điểm  $B, C$  cố định trên đường tròn,  $BC$  không phải là đường kính. Lấy  $A$  là một điểm trên đường tròn không trùng với  $B$  và  $C$ . Gọi  $AD, AE$  lần lượt là các đường phân giác trong và ngoài của tam giác  $ABC$  ( $D, E$  thuộc đường thẳng  $BC$ ). Gọi  $I$  là trung điểm của  $DE$ . Qua trực tâm tam giác  $ABC$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AI$  cắt  $AD, AE$  lần lượt tại  $M, N$ .

- Chứng minh rằng  $MN$  luôn đi qua một điểm cố định.
- Tìm vị trí của  $A$  sao cho diện tích tam giác  $AMN$  lớn nhất.

**Câu 4.** Chứng minh rằng với mọi  $n$  nguyên dương, phương trình  $x^2 + 15y^2 = 4^n$  có ít nhất  $n$  nghiệm tự nhiên.

**Câu 5.** Cho bảng  $3 \times 3$  và  $n$  là một số nguyên dương cho trước. Tìm số các cách tô màu không như nhau khi tô mỗi ô bởi 1 trong  $n$  màu. Hai cách tô màu gọi là như nhau nếu 1 cách nhận được từ cách kia bởi 1 phép quay quanh tâm.