

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN LẦN THỨ XVIII (2010)

Đề thi môn : Đại số

Thời gian làm bài : 180 phút

Câu 1. Cho A, B là các ma trận vuông cấp 2010 với hệ số thực sao cho $\det A = \det (A+B) = \det (A+2B) = \dots = \det (A+2010B) = 0$.

(i) Chứng minh rằng $\det (xA+yB) = 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) Tìm ví dụ chứng tỏ kết luận trên không còn đúng nếu chỉ có $\det A = \det (A+B) = \det (A+2B) = \dots = \det (A+2009B) = 0$.

Câu 2. Cho $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ là các dãy số được xác định bởi : $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ và $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 7v_n + 5w_n, \\ v_{n+1} = -2u_n - 8v_n + 6w_n, \\ w_{n+1} = -4u_n - 16v_n + 12w_n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $v_n - 2$ là số nguyên chia hết cho 2^n .

Câu 3.

(i) Chứng minh rằng ứng với mỗi số n nguyên dương, biểu thức $x^n + y^n + z^n$ có thể biểu diễn dưới dạng đa thức $P_n(s, p, q)$ bậc không quá n của các biến

$$s = x + y + z, \quad p = xy + yz + zx, \quad q = xyz$$

(ii) Hãy tìm tổng các hệ số của đa thức $P_{2010}(s, p, q)$

Câu 4. Xác định các đa thức thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(x)P(x^2) = P(x^3 + 2x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 5. Chọn một trong hai câu sau:

5a. Cho A là ma trận thực vuông, cấp $n \geq 2$, có tổng các phần tử trên đường chéo bằng 10 và $\text{rank } A = 1$. Tìm đa thức đặc trưng và đa thức tối thiểu của A (đa thức tối thiểu của A là đa thức $p(t) \neq 0$ có bậc nhỏ nhất, với hệ số thực và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất bằng 1, sao cho $p(A) = 0$).

5b. Cho A, B, C là các ma trận thực, vuông cấp n , trong đó A khả nghịch và đồng thời giao hoán với B và C . Giả sử $C(A+B) = B$. Chứng minh rằng B và C giao hoán với nhau.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.