# LỜI TỰA

*Kể từ khi được học về Số Học, thì Phần Nguyên là một trong những chương hấp dẫn tôi nhất. Có lẽ vì định nghĩa của nó đơn giản, nó cơ bản như định nghĩa về số nguyên tố vậy! Tuy nhiên bên trong của sự đơn giản ấy là một mảnh đất rất màu mỡ, còn vô số những hoa thơm cỏ lạ đang chờ tôi cùng các bạn khám phá. Quả thực, đào sâu nghiên cứu về Phần Nguyên là một đề tài không tồi. Không có nhiều tài liệu viết về chủ đề này. Bởi vì lẽ đó, tôi quyết định tổng hợp lại một số kết quả thu được viết lên tài liệu này, hy vọng mang đến bạn đọc một vài điều thú vị. Rất mong các bạn đóng góp và xây dựng để chủ đề này được phát triển và hoàn thiện hơn nữa.*

*Hoàng Xuân Thanh, 10- 2010*

*Tài liệu tham khảo:*

1. Bài giảng Số Học – Đặng Hùng Thắng
2. 104 Number Theory Problems Titu Andresscu
3. http://diendantoanhoc.net
4. Một số website Toán học khác

## VẤN ĐỀ I: - MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

### 1. Định nghĩa:

**Phần nguyên (hay sàn)** *(Floor Function: Nghĩa là hàm "sàn")* của số thực x là: **Số nguyên lớn nhất không lớn hơn x.**

Một định nghĩa tương tự với *Floor* là *Ceilling (hàm "trần")*
**Trần** của số thực x là: **Số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x**

Không nên nhầm lẫn *Floor* và *Ceiling* với hàm làm tròn *Around*(x), và hàm "chặt đuôi" *Trunc*(x) mà các bạn vẫn thường sử dụng trong các ngôn ngữ lập trình.

*Around*(x): Là số nguyên gần x nhất (ưu tiên chiều bên phải trên trục số)
Trunc(x): Là số nguyên có được sau khi bỏ đi phần thập phân của x

| | | | |
|---|---|---|---|
| Around(5.5)=6; | Floor(5.5)=5; | Ceilling(5.5)=6; | Trunc(5.5)=5 |
| Around(5.4)=5; | Floor(5.4)=5; | Ceilling(5.4)=6; | Trunc(5.4)=5 |
| Around(-5.4)=-5; | Floor(-5.4)=-6; | Ceilling(-5.4)=-5; | Trunc(-5.4)=-5 |

Kí hiệu phần nguyên của x là $\lfloor x \rfloor$, trần của x là $\lceil x \rceil$. Ngoài ra người ta cũng gọi

$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ Là phần lẻ *(fractional part)* của số thực x. $0 \le \{x\} < 1$

Các bạn có thể tham khảo thêm về các hàm này trong website
http://en.wikipedia.org/wiki/Floor_and_ceiling_functions

Định nghĩa về phần nguyên được hiểu theo một trong hai công thức sau:

$x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$ hoặc $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$

### 2. Các tính chất cơ bản

i. $x > y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \ge \lfloor y \rfloor$

ii. $\lfloor x + n \rfloor \Rightarrow \lfloor x \rfloor + n \quad | n \in \mathbb{Z}$

iii. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x + y \rfloor \le \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

iv. $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & | x \in \mathbb{Z} \\ -1 & | x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

v. $\left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{x}{n} \right\rfloor \quad | n \in \mathbb{Z}$

vi. Số các số nguyên dương là bội của *n* và không vượt quá *x* là $\left\lfloor \dfrac{x}{n} \right\rfloor$

*Chứng minh:* Tính chất i. và ii. Là hiển nhiên

iii. Đặt $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}; \quad 0 \le \{x\} < 1$

$y = \lfloor y \rfloor + \{y\}; \quad 0 \le \{y\} < 1$

ta có: $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \{x\} + \{y\} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$

vì $0 \le \{x\} + \{y\} < 2$ nên ta suy ra điều phải chứng minh

iv. Đặt $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}; \quad 0 \le \{x\} < 1$

ta có $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor -\lfloor x \rfloor - \{x\} \rfloor = \lfloor -\{x\} \rfloor$

vì $-1 < -\{x\} \le 0$ chỉ bằng 0 khi x nguyên. Từ đó có đpcm

v. Đặt $m = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$, khi đó $m \le \frac{x}{n} < m+1$

$\Rightarrow mn \le x < (m+1)n$

$\Rightarrow mn \le \lfloor x \rfloor < (m+1)n \qquad (mn \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow \quad m \le \frac{\lfloor x \rfloor}{n} < m+1$

$\Rightarrow \quad m = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor$

vi. Các số nguyên dương là bội của *n* không vượt quá *x* là $n, 2n, ..., mn$.

Trong đó *m là* số thỏa mãn điều kiện

$mn \le x < (m+1)n$

$\Rightarrow m \le \frac{x}{n} < m+1$

$\Rightarrow m = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$

### 3. Định lý Legendre

Số mũ của số nguyên tố *p* trong phân tích tiêu chuẩn của *n*! được tính theo công thức:

$$e_p(n) = \sum_{i \ge 1} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

*Chứng minh:* Trước hết ta có nhận xét rằng, tổng trên chỉ gồm hữu hạn số hạng khác không.

Vì với chỉ số *i* đủ lớn thì $n < p^i$ , khi đó $\left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor = 0 \quad \forall m \geq i$

Trong tích $n! = 1.2...n$ có đúng $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ thừa số là bội của p (theo tính chất vi)

Do đó:

$$n! = p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} . \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor ! A_1$$

Trong đó: $(A_1, p) = 1$

Tương tự

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor ! = p^{\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{p} \right\rfloor} . \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{p} \right\rfloor ! A_2$$

Với $(A_2, p) = 1$. Theo tính chất v. ta có $\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$

Vậy $$n! = p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor} . \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor ! A_2$$

Lập lại lí luận trên với $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor !$ và cứ tiếp tục cho tới khi $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < p$

Cuối cùng ta được số mũ $e_p(n)$ của *p* trong phân tích nguyên tố của *n*! là

$$e_p(n) = \left\lfloor \frac{n}{p^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Với *k* là chỉ số thỏa mãn $p^k \leq n < p^{k+1}$ .đpcm

### 4. Một số bài tập

$\boxed{\text{Ex1.1}}$ Chứng minh rằng $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

*Lời giải:* Đặt $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}; \quad 0 \leq \{x\} < 1$, $\quad y = \lfloor y \rfloor + \{y\}; \quad 0 \leq \{y\} < 1$. Khi đó

$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\{x\} \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor$

Và $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$

Ta phải CM $\lfloor 2\{x\} \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor \geq \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$

Vì $0 \leq \{x\} + \{y\} < 2$ nên có thể xảy ra 2 trường hợp sau:

* Nếu $0 \leq \{x\} + \{y\} < 1$ thì vế phải bằng 0, do đó bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

* Nếu $1 \leq \{x\} + \{y\} < 2$ khi đó phải có ít nhất một trong hai số $\{x\}$ hoặc $\{y\}$ lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$. Giả sử $\{x\} \geq \frac{1}{2}$, vậy:

$\lfloor 2\{x\} \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor \geq 1 + \lfloor 2\{y\} \rfloor \geq 1 = \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$

$\boxed{\text{Ex1.2}}$ Chứng minh rằng, với *n* là số nguyên dương bất kì ta có

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

*Lời giải:* Đặt $k = \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad ; \quad m = \left\lfloor \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$

Ta có $k \leq \sqrt{n} + \frac{1}{2} < k+1 \Leftrightarrow k - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} < k + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k^2 - k + \frac{1}{4} \leq n < k^2 + k + \frac{1}{4}$

Vì *n* nguyên dương nên phải có $k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k$

Tương tự $m \leq \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} < m+1 \Leftrightarrow m^2 - m + \frac{1}{4} \leq n - \frac{3}{4} < m^2 + m + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow m^2 - m + 1 \leq n \leq m^2 + m$

Do đó phải có $k = m$ .Đpcm

$\boxed{\text{Ex1.3}}$ Giải phương trình $\lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 1$

*Lời giải:* Ta có $1 \leq x\lfloor x \rfloor < 2$

- $x \geq 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor \geq 2 \Rightarrow x\lfloor x \rfloor \geq 4 \Rightarrow$ Pt vô nghiệm
- $1 \leq x < 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \leq x\lfloor x \rfloor < 2 \Rightarrow$ Pt nghiệm đúng

- $0 \le x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow x\lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow$ Pt vô nghiệm
- $-1 < x < 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -1 \Rightarrow x\lfloor x \rfloor = -x < 1 \Rightarrow$ Pt vô nghiệm
- $x = -1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -1 \Rightarrow x\lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow$ Pt nghiệm đúng
- $x < -1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor \le -2 \Rightarrow x\lfloor x \rfloor > 2 \Rightarrow$ Pt vô nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình là $x \in \{-1\} \cup [1,2)$

$\boxed{\text{Ex1.4}}$ Giải phương trình $3x^2 - 10\lfloor x \rfloor + 3 = 0$

*Lời giải:* Ta có $(3x-1)(x-3) = 3x^2 - 10x + 3 \le 3x^2 - 10\lfloor x \rfloor + 3 = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \le x \le 3 \Rightarrow 1 \le \lfloor x \rfloor \le 3$$

Thay từng giá trị $\lfloor x \rfloor = 1,2,3$ vào pt, giải ra ta được các nghiệm là

$$x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}; \quad x_2 = \sqrt{\frac{17}{3}}; \quad x_3 = 3$$

$\boxed{\text{Ex1.5}}$ Với *n* nguyên dương cho trước, phương trình $x + 2y = n$

Có bao nhiêu nghiệm nguyên dương? *(perfectstrong VMF)*

*Lời giải:* Ta có $2y = n - x \le n - 1$

Tương ứng với mỗi giá trị của *y* ta có $x = n - 2y$ chính là 1 nghiệm của pt. Số nghiệm phương trình chính là số các giá trị có thể có của y, là số các bội của 2 mà không vượt quá *n-1*.

Là $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ nghiệm nguyên dương

$\boxed{\text{Bt1.6}}$ Cho $A = \sqrt{4n^2 + n}$ $\quad n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng $\{A\} \le \frac{1}{4}$ *(Romania-2003)*

$\boxed{\text{Bt1.7}}$ Chứng minh rằng $\lfloor 5x \rfloor + \lfloor 5y \rfloor \ge \lfloor 3x + y \rfloor + \lfloor x + 3y \rfloor$

Từ kết quả đó chứng minh $(5m)!(5n)!$ chia hết cho $m!n!(3m+n)!(3n+m)!$

*(USA-1975)*

$\boxed{\text{Bt1.8}}$ Tìm số tự nhiên *n* nhỏ nhất sao cho *n*! tận cùng bằng 290 chữ số 0 *(HMMT-2003)*

### 5. Định lý Hermite

Với *n* nguyên dương, *x* là số thực bất kỳ, ta có:

$$\boxed{\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x+\frac{n-1}{n} \right\rfloor}$$

*Chứng minh:*

Xét hàm $f(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x+\frac{n-1}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor$

Ta có:

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right) = \left\lfloor x+\frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x+\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n} \right\rfloor - \left\lfloor n\left(x+\frac{1}{n}\right) \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor x+\frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x+\frac{n-1}{n} \right\rfloor + \lfloor x+1 \rfloor - \lfloor nx+1 \rfloor$$

$$= f(x)$$

Do đó $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $\frac{1}{n}$. Trên khoảng chu kỳ $0 \le x < \frac{1}{n}$ thì tất cả các số hạng:

$$\lfloor x \rfloor, \left\lfloor x+\frac{1}{n} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor x+\frac{n-1}{n} \right\rfloor, \lfloor nx \rfloor \text{ đều bằng 0}$$

Từ đó $f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

đpcm

**Ex1.9** Tính tổng $\sum_{0\le i<j\le n} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor$

*Lời giải:*

Ta có $\sum_{0\le i<j\le n} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{0\le i<j} \left\lfloor \frac{x+i}{j} \right\rfloor \right) = \sum_{j=1}^{n} \lfloor x \rfloor = n \lfloor x \rfloor$ (Theo định lý Hermite)

**Bt1.10** Tính tổng $S = \sum_{k=0}^{2009} \left( \left\lfloor \frac{3^k+2010}{3^{k+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2010-3^k}{3^{k+1}} \right\rfloor \right)$

**Bt1.11** Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

**VẤN ĐỀ II: DÃY SỐ & TỔNG PHẦN NGUYÊN**

$\boxed{\text{Ex}2.1}$

$\{U_n\}$ là dãy số "Thứ tự tăng dần của các số tự nhiên lẻ không chia hết cho 3"

$\{U_n\}_1^\infty = \{1,5,7,11,13,17,19,23,25,...\}$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số trên.

*Lời giải:*

Xét theo số dư thì tất cả các số tự nhiên không chia hết cho 3 đều có dạng $3p-1$ hoặc $3p+1$, đây là 2 số chẵn hoặc 2 số lẻ liên tiếp tùy theo p lẻ hãy chẵn.

Khi p chẵn $p = 2k$, thì hai số có dạng $6k-1$ và $6k+1$ là 2 số lẻ. Tất cả các số dạng này chính là các số hạng của dãy cần tìm. Xếp theo thứ tự tăng dần ta sẽ có:

$U_{2k} = 6k-1$ và $U_{2k+1} = 6k+1$

Như vậy với $n = 2k + r, \quad r = \{0,1\}$, ta có:

$$U_n = 6\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \{-1,1\}$$

$$= 6\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\{0,1\} - 1$$

$$= 6\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2r - 1$$

$$= 6\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\left(n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) - 1$$

$$\boxed{U_n = 2n + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}$$ ☺

$\boxed{\text{Ex}2.2}$

$\{U_n\}$ Là dãy số : "Thứ tự tăng dần của các số tự nhiên không chính phương"

$\{U_n\}_1^\infty : \{2,3,5,6,7,8,10,...\}$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số trên.

*Lời giải:* Xét dãy số tự nhiên $\{D_n\}_1^\infty : \{1,2,3,4,5,...\} \quad (D_n = n)$

Dễ thấy $U_n = D_n + k$ . Ở đó *k* là số các số chính phương nhỏ hơn $U_n$

(bị loại đi từ dãy $\{D_n\}$ )

Như vậy $U_n$ phải nằm giữa 2 số chính phương liên tiếp: $k^2+1 \le U_n \le (k+1)^2-1$

Trên mỗi đoạn $\left[i^2+1;(i+1)^2-1\right]$ (giữa 2 số chính phương liên tiếp) có $2i$ số tự nhiên.

Đếm các số hạng của dãy $\{U_n\}$ có giá trị nhỏ hơn $k^2$ ta có

$\sum_{i=1}^{k-1} 2i = k^2-k$ số hạng. Như vậy chỉ số $n$ sẽ phải thỏa mãn

$k^2-k+1 \le n \le k^2+k$

hay $\sqrt{n+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} \le k \le \sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}$

vì $\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}-1 < \sqrt{n+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} \le k \le \sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}$

nên $k=\left\lfloor \sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2} \right\rfloor$ hay $k=\left\lfloor \sqrt{n}+\frac{1}{2} \right\rfloor$ (Theo Ex1.2 )

Cuối cùng ta có: $U_n = n+k = n+\left\lfloor \sqrt{n}+\frac{1}{2} \right\rfloor$

$\boxed{\text{Ex2.3}}$ Tính tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$

*Lời giải:*

Đặt $m=\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$ suy ra $m^2 \le n < (m+1)^2$

Xét các số hạng của $S_n$ trên mỗi đoạn $i^2 \le k \le i^2+2i$ có $2i+1$ số hạng, các số hạng này đều có giá trị là $i$ . Như vậy ta có:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{m-1}\left(\sum_{k=i^2}^{i^2+2i}\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor\right) + \sum_{k=m^2}^{n}\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1} i(2i+1) + \sum_{k=m^2}^{n}\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$$
$$= \frac{m(m-1)(2m-1)}{3} + \frac{m(m-1)}{2} + (n+1-m^2)m$$
$$= nm - \frac{m(m-1)(2m+5)}{6}$$

$\boxed{\text{Bt2.4}}$ Tính tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k}+\frac{1}{2} \right\rfloor$

$\boxed{\text{Bt2.5}}$ Tính tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor 2\sqrt{k} \right\rfloor,$$

(Để ý đến một trường hợp riêng định lý Hermite $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$ )

$\boxed{\text{Bt2.6}}$ Cho dãy $\{U_n\}_1^\infty : \{1,2,2,2,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,4,5,...\}$

Được xác định bằng quy luật : 1 số 1; 3 số 2; 5 số 3;…; 2k-1 số k;…

Tìm số hạng tổng quát của dãy trên.

1. ĐỊNH LÝ BEATTY

$\alpha, \beta$ là các số vô tỷ dương sao cho $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Khi đó 2 tập (2 dãy)

$$\{A_n\}_1^\infty = \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, ...\}; \qquad \{B_n\}_1^\infty = \{\lfloor \beta \rfloor, \lfloor 2\beta \rfloor, \lfloor 3\beta \rfloor, ...\};$$

lập thành 2 "phân hoạch" của tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$

(nghĩa là: $\{A_n\}_1^\infty \cap \{B_n\}_1^\infty = \varnothing$ và $\{A_n\}_1^\infty \cup \{B_n\}_1^\infty = \mathbb{N}^*$ )

*Chứng minh:*

Trước tiên ta chứng minh tính tách rời giữa $\{A_n\}_1^\infty$ và $\{B_n\}_1^\infty$

Thật vậy, giả sử tồn tại các chỉ số $i, j$ sao cho $A_i = B_j \Leftrightarrow \lfloor i\alpha \rfloor = \lfloor j\beta \rfloor = k$. Khi đó bởi vì hai số $i\alpha$ và $j\beta$ đều là các số vô tỉ nên:

$k < i\alpha < k+1$ và $k < j\beta < k+1$

hay $\frac{i}{k+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{i}{k}$ và $\frac{j}{k+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{j}{k}$

cộng các vế 2 bất đẳng thức này lại ta có $\frac{i+j}{k+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 < \frac{i+j}{k}$

hay $k < i + j < k+1$ . Điều này vô lý!

Tiếp theo ta sẽ chứng minh số tự nhiên *n* bất kì phải có mặt trong hoặc $\{A_n\}_1^\infty$ hoặc $\{B_n\}_1^\infty$

Thật vậy, cũng bằng phản chứng, ta giả sử *n* không xuất hiện trong cả $\{A_n\}_1^\infty$ và $\{B_n\}_1^\infty$

Khi đó tồn tại các chỉ số $i, j$ sao cho

$i\alpha < n; \qquad (i+1)\alpha > n+1$ và $j\beta < n; \qquad (j+1)\beta > n+1$

hay $\frac{i}{n} < \frac{1}{\alpha} < \frac{i+1}{n+1}$ và $\frac{j}{n} < \frac{1}{\beta} < \frac{j+1}{n+1}$
cộng các bất đẳng thức theo vế ta có

$$\frac{i+j}{n} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 < \frac{i+j+2}{n+1} \quad \Rightarrow i+j < n < i+j+1$$

Điều này cũng không thể xảy ra! Vậy mỗi số tự nhiên xuất hiện đúng 1 lần ở 1 trong 2 dãy trên. Đpcm.

2. ĐIỂM NGUYÊN VÀ PHẦN NGUYÊN

ĐỊNH LÝ 1: Cho $a, c$ là các số thực dương

Giả sử $f : [a,b] \to [c,d]$ là hàm đơn điệu tăng và khả nghịch.

Khi đó ta có:
$$\boxed{\sum_{a \le k \le b} \lfloor f(k) \rfloor + \sum_{c \le k \le d} \lfloor f^{-1}(k) \rfloor - n(G_f) = \lfloor b \rfloor \lfloor d \rfloor - \alpha(a)\alpha(c) \quad (1)}$$

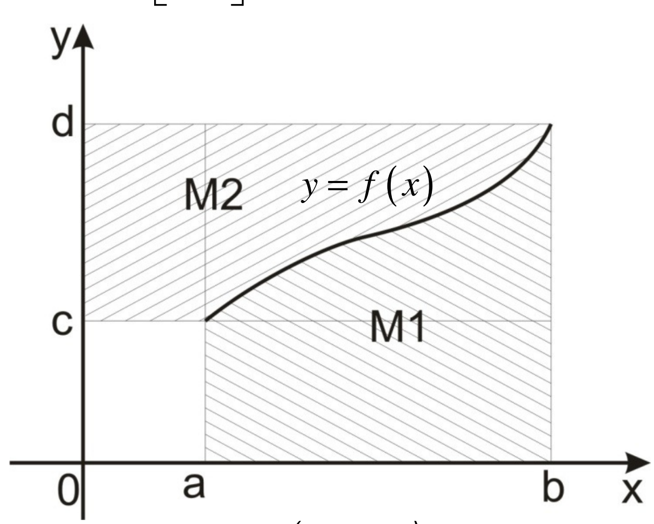
Trong đó $n(G_f)$ là số điểm nguyên của đồ thị hàm $f$ trên đoạn $[a,b]$, còn $\alpha$ là hàm $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}^*$ xác định bởi
$$\alpha(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor; & x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}^* \\ x - 1; & x \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

(Lưu ý có thể biểu diễn $\alpha(x)$ dưới dạng $\alpha(x) = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \right\rfloor ; \forall x \in \mathbb{R}^+$ )

*Chứng minh:* Kí hiệu $n(M)$ là số điểm nguyên của miền M. Theo hình minh họa

Dễ thấy: $n(M1) = \sum_{a \le k \le b} \lfloor f(k) \rfloor$

$$n(M2) = \sum_{c \le k \le d} \lfloor f^{-1}(k) \rfloor$$



*(Hình II.2.1)*

Rõ ràng vế trái của (1) chính là toàn bộ số điểm nguyên dương nằm trong vùng đã gạch, cũng là số điểm nguyên dương của h.c.n lớn trừ đi số điểm nguyên dương của h.c.n nhỏ (không tính trên biên h.c.n nhỏ).

Hiệu đó chính là VP. (đpcm)

**ĐỊNH LÝ 2:** Cho $m,n,s$ là các số nguyên dương $m \le n$ . Khi đó:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{s}\left\lfloor \frac{km}{n}\right\rfloor + \sum_{1\le k\le \frac{ms}{n}}\left\lfloor \frac{kn}{m}\right\rfloor = s\left\lfloor \frac{ms}{n}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{(m,n)s}{n}\right\rfloor \quad (2)} \qquad (m,n)=ucln(m,n)$$

*Chứng minh:* Dựa vào bổ đề đơn giản sau đây:

Trong dãy $\frac{1m}{n},\frac{2m}{n},...,\frac{sm}{n}$ có đúng $\left\lfloor \frac{(m,n)s}{n}\right\rfloor$ số nguyên

Thật vậy, ta có $m=m_1(m,n),\quad n=n_1(m,n)$ . với $(m_1,n_1)=1$ .Dãy trên trở thành

$\frac{1m_1}{n_1},\frac{2m_1}{n_1},...,\frac{sm_1}{n_1}$ Do $(m_1,n_1)=1$ nên số các số nguyên trong dãy là $\left\lfloor \frac{s}{n_1}\right\rfloor = \left\lfloor \frac{(m,n)s}{n}\right\rfloor$

Xét hàm $f:[1,s]\to\left[\frac{m}{n},\frac{ms}{n}\right],\quad f(x)=\frac{m}{n}x \quad \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{n}{m}x$

Theo định lý 1 ta có

$$\sum_{k=1}^{s}\left\lfloor \frac{km}{n}\right\rfloor + \sum_{1\le k\le \frac{ms}{n}}\left\lfloor \frac{kn}{m}\right\rfloor - n(G_f) = s\left\lfloor \frac{ms}{n}\right\rfloor - 0$$

Theo bổ đề ở trên thì $n(G_f)=\left\lfloor \frac{(m,n)s}{n}\right\rfloor$

Từ đó suy ra đpcm

*Hệ quả:* Trường hợp đặc biệt khi $s=n$ , ta có

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{km}{n}\right\rfloor + \sum_{k=1}^{m}\left\lfloor \frac{kn}{m}\right\rfloor = mn+(m,n) \quad (3)}$$

**ĐỊNH LÝ 3:** Cho $a,c$ là các số thực dương

Giả sử $f:[a,b]\to[c,d]$ là hàm đơn điệu giảm và khả nghịch.

Khi đó ta có: $\boxed{\sum_{a\le k\le b}\lfloor f(k)\rfloor - \sum_{c\le k\le d}\lfloor f^{-1}(k)\rfloor = \lfloor b\rfloor\alpha(c) - \lfloor d\rfloor\alpha(a) \quad (4)}$

Trong đó $\alpha(x)$ là hàm được xác định như trong định lý 1 $\alpha(x)=\lfloor x\rfloor - \left\lfloor \frac{\lfloor x\rfloor}{x}\right\rfloor ;\forall x\in\mathbb{R}^+$

*Chứng minh:* Tương tự định lý 1

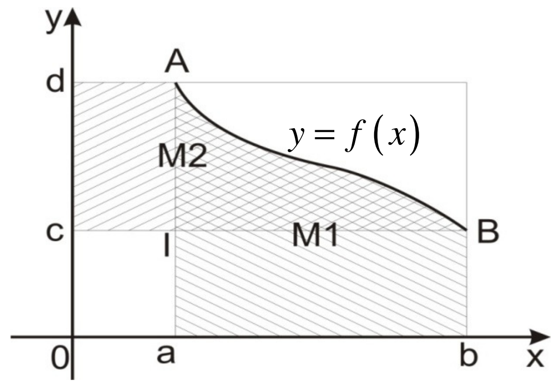
Ta cũng có: $n(M1)=\sum_{a\le k\le b}\lfloor f(k)\rfloor$ và $\quad n(M2)=\sum_{c\le k\le d}\lfloor f^{-1}(k)\rfloor$

Từ hình minh họa ta thấy ngay được hiệu

$n(M1)-n(M2)$ chính là hiệu các điểm nguyên dương của h.c.n abBI và cdAI.

Hay là bằng $n(0\text{bBc})-n(0\text{aAd})$

$=\lfloor b\rfloor\alpha(c)-\lfloor d\rfloor\alpha(a)$ (đpcm)




(Hình II.2.3)

$\boxed{\text{Ex}2.7}$ Tính $\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{km}{n}\right\rfloor \quad (m\le n)$

*Lời giải:* Xét hàm $f:[1,n]\to\left[1,m+1-\frac{m}{n}\right],\quad f(x)=m+1-\frac{m}{n}x$ là hàm đơn điệu giảm

Có hàm ngược là $f^{-1}(x)=n+\frac{n}{m}(1-x)$

Theo định lý 3, ta có

$$\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor m+1-\frac{km}{n}\right\rfloor-\sum_{1\le k\le m+1-\frac{m}{n}}\left\lfloor n+\frac{(1-k)n}{m}\right\rfloor=n\alpha(1)-\left\lfloor m+1-\frac{m}{n}\right\rfloor\alpha(1)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor m+1-\frac{km}{n}\right\rfloor-\sum_{k=1}^{m}\left\lfloor n+\frac{(1-k)n}{m}\right\rfloor=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor 1+\frac{(k-1)m}{n}\right\rfloor-\sum_{k=1}^{m}\left\lfloor\frac{kn}{m}\right\rfloor=0$$ *(Đảo chiều biến chạy)*

$$\Leftrightarrow n-m+\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{km}{n}\right\rfloor-\sum_{k=1}^{m}\left\lfloor\frac{kn}{m}\right\rfloor=0$$

Theo (3) ta có: $\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{km}{n}\right\rfloor+\sum_{k=1}^{m}\left\lfloor\frac{kn}{m}\right\rfloor=mn+(m,n)$

Từ đó suy ra: $\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{km}{n}\right\rfloor=\frac{1}{2}\big(mn+m-n+(m,n)\big)$

Kết quả trên có thể viết dưới dạng $\sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor\frac{km}{n}\right\rfloor=\frac{1}{2}\big(mn-m-n+(m,n)\big)$

Đặc biệt hơn nữa khi $(m,n)=1$ $\quad\sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor\frac{km}{n}\right\rfloor=\frac{(m-1)(n-1)}{2}$

$\boxed{\text{Ex}2.8}$

Tính $\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$ (KMO-1997)

*Lời giải:*

Xét hàm $f:[1,n]\to\left[1,\sqrt{n}\right],\quad f(x)=\sqrt{x}$ , đây là hàm đơn điệu tăng và

Có hàm ngược là $f^{-1}(x)=x^2$ .Theo định lý 1, ta có

$$\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor+\sum_{k=1}^{\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor}\left\lfloor k^2 \right\rfloor-n\left(G_f\right)=n\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$$

Mặt khác $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor=a$ là số điểm nguyên dương của đồ thị hàm số trên. Do đó

$$\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor=(n+1)a-\sum_{k=1}^{a}k^2=(n+1)a-\frac{a(a+1)(2a+1)}{6}$$

*(Chú ý: so sánh với Ex 2.3)*

$\boxed{\text{Ex}2.9}$ Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{n^2}{k^2} \right\rfloor=\sum_{k=1}^{n^2}\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{k}} \right\rfloor$$

*Lời giải:*

Xét hàm $f:[1,n]\to\left[1,n^2\right],\quad f(x)=\frac{n^2}{x^2}$ , là hàm đơn điệu giảm,

có hàm ngược là $f^{-1}(x)=\frac{n}{\sqrt{x}}$

Theo định lý 3 ta có:

$$\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{n^2}{k^2} \right\rfloor-\sum_{k=1}^{n^2}\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{k}} \right\rfloor=\lfloor n \rfloor\alpha(1)-\left\lfloor n^2 \right\rfloor\alpha(1)=0$$

Từ đó ta có đpcm.

$\boxed{\text{Ex}2.10}$ Tính $\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$

*Lời giải:*

Xét hàm $f:[3,n]\to\left[1,\frac{n}{3}\right],\quad f(x)=\frac{x}{3}$ , là hàm đơn điệu tăng,

có hàm ngược là $f^{-1}(x)=3x$

Theo định lý 1 ta có $\sum_{k=3}^{n}\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor+\sum_{1\le k\le\frac{n}{3}}\lfloor 3k \rfloor-\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor=\lfloor n \rfloor\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor-\alpha(3)\alpha(1)$

Suy ra:
$$\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k}{3}\right\rfloor = \sum_{k=3}^{n}\left\lfloor \frac{k}{3}\right\rfloor = (n+1)\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor - \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor} 3k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k}{3}\right\rfloor = (n+1)\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor - \frac{3}{2}\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor\left(\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor + 1\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k}{3}\right\rfloor = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor - \frac{3}{2}\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor^2$$

$\boxed{\text{Bt2.11}}$ Tính $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k^2-3k+2}{5}\right\rfloor$

$\boxed{\text{Bt2.12}}$ Tính $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left\{ \frac{km}{n}\right\}$ *(Japan MO-1995)*

$\boxed{\text{Bt2.13}}$ Cho $\lambda$ là một số vô tỉ, *n* là một số nguyên dương. Chứng minh rằng:
$$\sum_{k=1}^{n}\lfloor k\lambda\rfloor + \sum_{k=1}^{\lfloor k\lambda\rfloor}\left\lfloor \frac{k}{\lambda}\right\rfloor = n\lfloor n\lambda\rfloor$$

$\boxed{\text{Bt2.14}}$ Tính $\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}}\left\lfloor \frac{\sqrt{8k+1}-1}{2}\right\rfloor$

ĐỊNH LÝ 4: Cho *p* là một số nguyên tố lẻ, *q* là số nguyên không chia hết cho p.

Giả sử hàm $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- $\dfrac{f(k)}{p}$ không là số nguyên, với mỗi $k = 1,2,...,p-1$
- •• $f(k)+f(p-k)$ là số nguyên chia hết cho *p*, với mỗi $k = 1,2,...,p-1$

Khi đó ta có:
$$\sum_{k=1}^{p-1}\left\lfloor f(k)\frac{q}{p}\right\rfloor = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{q}{p}f(k) - \frac{p-1}{2}$$

*Chứng minh:*

Ta có $\dfrac{qf(k)}{p}+\dfrac{qf(p-k)}{p}\in\mathbb{Z}$. Và $\dfrac{qf(k)}{p}\notin\mathbb{Z}$; $\dfrac{qf(p-k)}{p}\notin\mathbb{Z}$ với mỗi $k = 1,2,...,p-1$

Do vậy, từ tính chất phần lẻ, $0 \le \left\{\frac{qf(k)}{p}\right\} + \left\{\frac{qf(p-k)}{p}\right\} < 2$

ta suy ra $\left\{\frac{qf(k)}{p}\right\} + \left\{\frac{qf(p-k)}{p}\right\} = 1$ với mỗi $k = 1, 2, ..., p-1$

Lấy tổng các giá trị này từ 1 đến *p*-1 ta có

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{qf(k)}{p}\right\} + \sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{qf(p-k)}{p}\right\} = p-1$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{qf(k)}{p}\right\} = p-1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{qf(k)}{p}\right\} = \frac{p-1}{2}$$

Từ kết quả này ta có

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left\lfloor f(k)\frac{q}{p}\right\rfloor + \sum_{k=1}^{p-1}\left\{f(k)\frac{q}{p}\right\} = \sum_{k=1}^{p-1}\left\lfloor f(k)\frac{q}{p}\right\rfloor + \frac{p-1}{2} = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{q}{p}f(k)$$

suy ra đpcm.

$\boxed{\text{Ex}2.15}$ Cho *p* và *q* là 2 số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left\lfloor k\frac{q}{p}\right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2} \qquad (Gauss)$$

*Lời giải:* Xét hàm $f(x) = x$. Dễ thấy $f(x)$ thỏa mãn cả 2 điều kiện của định lý 4, và theo đó ta có

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left\lfloor k\frac{q}{p}\right\rfloor = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{q}{p}k - \frac{p-1}{2} = \frac{q}{p}\frac{(p-1)p}{2} - \frac{p-1}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

$\boxed{\text{Ex}2.16}$ Cho *p* là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left\lfloor \frac{k^3}{p}\right\rfloor = \frac{(p-1)(p+1)(p-2)}{4} \qquad (German\,MO-2002)$$

*Lời giải:* Xét hàm $f(x) = x^3$.

Vì *p* nguyên tố, nên $1^3, ..., (p-1)^3$ đều không chia hết cho *p. (điều kiện đầu tiên thỏa)*

Mặt khác $f(x)+f(p-x)=x^3+(p-x)^3=p^3-3p^2x+3px^2 \vdots p$

Do đó theo định lý 4, ta có

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{k^3}{p}\right\rfloor=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{k^3}{p}-\frac{p-1}{2}=\frac{1}{p}\frac{(p-1)^2p^2}{4}-\frac{p-1}{2}=\frac{(p-1)(p+1)(p-2)}{4}$$

$\boxed{\text{Ex}2.17}$ Cho $p$ là số nguyên tố lẻ

Tính tổng: $$S=\sum_{k=1}^{(p-1)(p-2)}\left\lfloor\sqrt[3]{kp}\right\rfloor$$

*Lời giải:*

Xét hàm $f:\left[1,(p-1)(p-2)\right]\to\left[\sqrt[3]{p},\sqrt[3]{p(p-1)(p-2)}\right],\quad f(x)=\sqrt[3]{px}$

$f(x)$ là hàm đơn điệu tăng,

có hàm ngược là $f^{-1}(x)=\dfrac{x^3}{p}$. Theo định lý 1 ta có:

$$\sum_{k=1}^{(p-1)(p-2)}\left\lfloor\sqrt[3]{kp}\right\rfloor+\sum_{\sqrt[3]{p}\le k\le\sqrt[3]{p(p-1)(p-2)}}\left\lfloor\frac{k^3}{p}\right\rfloor-n(G_f)=$$

$$=(p-1)(p-2)\left\lfloor\sqrt[3]{p(p-1)(p-2)}\right\rfloor-\alpha(1)\alpha\left(\sqrt[3]{p}\right)$$

Để ý là $\left\lfloor\sqrt[3]{p(p-1)(p-2)}\right\rfloor=(p-2)$

Do $k^3$ không chia hết cho $p$ với mỗi $k=1,2,...,p-1$, nên

số điểm nguyên dương của đồ thị $n(G_f)=n\left(G_{f^{-1}}\right)=0$

Với $k<\sqrt[3]{p}$ thì $\left\lfloor\dfrac{k^3}{p}\right\rfloor=0$

Do đó ta có $$\sum_{k=1}^{(p-1)(p-2)}\left\lfloor\sqrt[3]{kp}\right\rfloor+\sum_{k=1}^{p-2}\left\lfloor\frac{k^3}{p}\right\rfloor=(p-1)(p-2)^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{(p-1)(p-2)}\left\lfloor\sqrt[3]{kp}\right\rfloor=(p-1)(p-2)^2+\left\lfloor\frac{(p-1)^3}{p}\right\rfloor-\sum_{k=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{k^3}{p}\right\rfloor$$

Theo kết quả của Ex2.16, phần trên: ta có

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{(p-1)(p-2)} \left\lfloor \sqrt[3]{kp} \right\rfloor = (p-1)(p-2)^2 + (p-1)(p-2) - \frac{(p-1)(p+1)(p-2)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{(p-1)(p-2)} \left\lfloor \sqrt[3]{kp} \right\rfloor = \frac{(p-1)(p-2)(3p-5)}{4}$$

$\boxed{\text{Bt2.18}}$ Cho *m,n* là các số nguyên dương

Tính $S = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor$

$\boxed{\text{Bt2.19}}$ Cho *p* là số nguyên tố lẻ; *q* là số nguyên không chia hết cho *p*.

Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor (-1)^k k^2 \frac{q}{p} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$

$\boxed{\text{Bt2.20}}$ Cho *p* là số nguyên tố lẻ.

Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{k^p - k}{p} \equiv \frac{(p+1)}{2} \pmod{p}$

$\boxed{\text{Bt2.21}}$ Cho *p* và *q* là 2 số lẻ

Tính giá trị biểu thức $S = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{kq}{p} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor$

$\boxed{\text{Bt2.22}}$ Cho số nguyên $n \geq 2$

Tính $S = \sum_{m=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \sum_{k=1}^{n+1-2m} \left\lfloor \frac{n-m}{k+m-1} \right\rfloor$

## VẤN ĐỀ III – GỘP CÁC CÔNG THỨC THEO PHẦN DƯ

Trong một số bài toán liên quan đến dãy số như tìm công thức tổng quát một dãy truy hồi, tính tổng các số hạng, tính chia hết của một nhóm số hạng. Đôi khi giải quyết bài toán lại đòi hỏi ta phải chia ra rất nhiều trường hợp (chẵn lẻ chẳng hạn) mỗi trường hợp lại cho ta một kết quả khác nhau? Sự khác nhau giữa các công thức tìm được ấy là gì? Phải chăng có thể biểu diễn chúng dưới 1 dạng duy nhất? Đó là nội dung của vấn đề ta nghiên cứu sau đây:

- Phép chia số nguyên *n* cho số tự nhiên *k*

$$n = pk + r, \quad 0 \le r \le k-1$$

Ta có thương là *p*, còn *r* là phần dư, *r* lấy các giá trị từ 0 đến *k* – 1.

Theo tính chất của phần nguyên ta có

$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{pk+r}{k} \right\rfloor = \left\lfloor p + \frac{r}{k} \right\rfloor = p$, và như vậy phần dư $r = n - k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

Thay vì xét đến *k* số dư từ 0 đến *k* – 1. Ta viết $r = \{0,1,\ldots,k-1\}$ xem như một tập hợp *k* giá trị tương ứng với *k* trường hợp của số dư *r*.

Các phép tính toán học đối với tập giá trị này, được hiểu theo luật phân phối:

$$0 = \{0,\ldots,0\}_{k\,so\,0}$$

$$1 = \{1,\ldots,1\}_{k\,so\,1}$$

$$x \oplus \{a_1,\ldots,a_k\} = \{x \oplus a_1,\ldots,x \oplus a_k\}$$

$$\{a_1,\ldots,a_k\} \oplus \{b_1,\ldots,b_k\} = \{a_1 \oplus b_1,\ldots,a_k \oplus b_k\}$$

Trong đó *x* là số nguyên ⊕ là phép toán bất kỳ

Ta có một số các kết quả liên quan sau:

$$\left\lfloor \frac{r+1}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\{1,2,\ldots,k\}}{k} \right\rfloor = \{0,0,\ldots,1\}$$ (*k* - 1 số 0; 1 số 1 cuối)

$$\left\lfloor \frac{r+2}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\{2,3,\ldots,k,k+1\}}{k} \right\rfloor = \{0,0,\ldots,1,1\}$$ (*k* – 2 số 0; 2 số 1 cuối)

…

$$\left\lfloor \frac{r+a}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\{a, a+1, ..., k, ...k+a-1\}}{k} \right\rfloor = \{0, ..., 1, 1\}$$ (*a < k;* có *a* số 1 ở cuối)

Tiếp theo

$$-\left\lfloor \frac{r-1}{k} \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{\{-1, 0, ..., k-2\}}{k} \right\rfloor = \{1, 0, ..., 0\}$$ (1 số 1 ở đầu, còn lại là 0)

$$-\left\lfloor \frac{r-2}{k} \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{\{-2, -1, 0, ..., k-3\}}{k} \right\rfloor = \{1, 1, ..., 0\}$$ (2 số 1 ở đầu, còn lại là 0)

…

$$-\left\lfloor \frac{r-a}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\{-a, ..., 0, ..., k-1-a\}}{k} \right\rfloor = \{1, 1, ..., 0\}$$ ( $a < k$ ; có a số 1 ở đầu)

Các kết quả khá đơn giản này chính là công cụ gộp các công thức rất hiệu quả. Hãy xét ví dụ minh họa sau:

$\boxed{\text{Ex3.1}}$

Tính $S_n = \sum_{i=0}^{n} \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor$

*Lời giải:* Ta có $S_n = S_{n-1} + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

Xét từng trường hợp:

$$S_{3k+1} = S_{3k} + \left\lfloor \frac{3k+1}{3} \right\rfloor = S_{3k} + k$$

$$S_{3k+2} = S_{3k+1} + \left\lfloor \frac{3k+2}{3} \right\rfloor = S_{3k+1} + k$$

$$S_{3k+3} = S_{3k+2} + \left\lfloor \frac{3k+3}{3} \right\rfloor = S_{3k+2} + k + 1 = S_{3k+1} + 2k + 1 = S_{3k} + 3k + 1$$

Suy ra

$$S_{3(k+1)} = S_{3k} + 3(k+1) - 2$$
$$S_{3k} \quad = S_{3(k-1)} + 3k - 2$$
...
$$S_3 \quad = S_0 + 3.1 - 2$$

Cộng các đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$S_{3k} = \sum_{i=1}^{k}(3i-2) = \frac{3k(k+1)}{2} - 2k = \frac{3k^2}{2} - \frac{k}{2} \qquad (1)$$

$$S_{3k+1} = S_{3k} + k = \frac{3k^2}{2} + \frac{k}{2} \qquad (2)$$

$$S_{3k+2} = S_{3k+1} + k = \frac{3k^2}{2} + \frac{3k}{2} \qquad (3)$$

Các bạn thấy gì từ các công thức (1), (2), (3) ?

Đặt $n = 3k + r, \quad r = \{0,1,2\}$

$$\Rightarrow k = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \quad \& \quad r = n - 3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Bây giờ (1), (2), (3) có thể viết gộp thành

$S_n = \frac{3}{2}\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor^2 + \frac{1}{2}\{-1,1,3\}\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, ta cần biểu diễn giá trị $\{-1,1,3\}$ qua biểu thức của r

Cách 1 $\{-1,1,3\} = -\{1,0,0\} + \{0,1,1\} + 2\{0,0,1\} = \left\lfloor \frac{r-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+2}{3} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{r+1}{3} \right\rfloor$

Cách 2 $\{-1,1,3\} = \{0,2,4\} - 1 = 2\{0,1,2\} - 1 = 2r - 1$

Ta thấy rõ ràng biểu diễn theo cách 2 gọn gàng hơn cách 1 rất nhiều. Tuy vậy cách 1 là phương pháp tổng quát nhất để biểu diễn bộ $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ bất kỳ theo $r = \{0,1,...,k-1\}$

Thay giá trị $r = n - 3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ (theo cách biểu diễn thứ 2), ta có

$$S_n = \frac{3}{2}\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor^2 + \frac{1}{2}\left(2\left(n - 3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) - 1\right)\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

$$\boxed{S_n = \sum_{i=0}^{n}\left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \frac{3}{2}\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor^2}$$

$\boxed{\text{Ex3.2}}$ Tổng quát hóa: Chứng minh rằng, với m,n nguyên dương

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n}\left\lfloor \frac{i}{m} \right\rfloor = \left(n + 1 - \frac{m}{2}\right)\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor - \frac{m}{2}\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor^2}$$

Gợi ý: Đặt $n = km + r, \quad r = \{0,...,m-1\}$ *(Đừng quên so sánh với Ex2.10)*

$\boxed{\text{Ex3.3}}$ Rút gọn biểu thức

$$\boldsymbol{S} = \left\lfloor \frac{n - 3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left(1 - 2\left\lfloor \frac{n - 3\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}{2} \right\rfloor\right)\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$$

Lời giải: Đặt $n = 6k + r, \quad r = \{0,1,2,3,4,5\}$

Ta có:

$$S = \left\lfloor \frac{6k + r - 3\left\lfloor \frac{6k + r}{3} \right\rfloor}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{6k + r}{3} \right\rfloor + \left(1 - 2\left\lfloor \frac{6k + r - 3\left\lfloor \frac{6k + r}{3} \right\rfloor}{2} \right\rfloor\right)\left\lfloor \frac{6k + r}{6} \right\rfloor$$

$$S = \left\lfloor \frac{r - 3\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor}{2} \right\rfloor \left(2k + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor\right) + \left(1 - 2\left\lfloor \frac{r - 3\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor}{2} \right\rfloor\right) k$$

$$S = \left\lfloor \frac{r - 3\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + k$$

$$S = \left\lfloor \frac{\{0,1,2,3,4,5\} - 3\{0,0,0,1,1,1\}}{2} \right\rfloor \{0,0,0,1,1,1\} + k$$

$$S = \left\lfloor \frac{\{0,1,2,0,1,2\}}{2} \right\rfloor \{0,0,0,1,1,1\} + k$$

$$S = \{0,0,1,0,0,1\}\{0,0,0,1,1,1\} + k$$

$$S = k + \{0,0,0,0,0,1\}$$

$$S = k + \left\lfloor \frac{r+1}{6} \right\rfloor$$

$$S = k + \left\lfloor \frac{n-6k+1}{6} \right\rfloor$$

$$S = \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor$$

$\boxed{\text{Ex3.4}}$

Cho dãy số $\{U_n\}$ thỏa mãn
$U_1 = -1, \quad U_2 = 0, \quad U_{n+2} = 2\left(U_{n+1} - U_n\right), \quad \forall n \geq 1$
Tìm số hạng tổng quát của dãy $\{U_n\}$

Lời giải:

Đây là dãy truy hồi tuyến tính bậc 2. Một cách rất tự nhiên là ta xét pt đặc trưng
$x^2 - 2x + 2 = 0$
Tiếc rằng phương trình này vô nghiệm (thực ra ta có thể dùng nghiệm phức, nhưng trong khuôn khổ bài viết này chúng ta sẽ không đề cập đến)

Ta hãy xem $\{U_n\}$ có tính chất gì bằng cách tính thử một vài giá trị

$U_3 = 2(0+1) = 2, \quad U_4 = 2(2-0) = 4, \quad U_5 = 2(4-2) = 4, \ldots$

Kể từ số hạng $U_2$ trở đi các số hạng của dãy đều là lũy thừa của 2 (suy ra từ biểu thức truy hồi). Ta liệt kê được bảng sau

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dấu của $\{U_n\}$ | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 |
| Lũy thừa của 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| $\{U_n\}$ | -1 | 0 | $2^1$ | $2^2$ | $2^2$ | 0 | $-2^3$ | $-2^4$ | $-2^4$ | 0 | $2^5$ | $2^6$ | $2^6$ | 0 | $-2^7$ | $-2^8$ |

Đến đây ta nhận thấy được quy luật

$U_n = D_n 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ Với $\{D_n\}$ là dãy dấu của $\{U_n\}$ mà ta cần tìm

Nhìn vào bảng liệt kê trên ta thấy $\{D_n\}$ là dãy tuần hoàn với chu kỳ bằng 8 ta sẽ chứng minh khẳng định này. Dựa vào biểu thức truy hồi. Ta có:

$$
\begin{aligned}
D_{n+8} 2^{\left\lfloor \frac{n+8}{2} \right\rfloor} &= 2D_{n+7} 2^{\left\lfloor \frac{n+7}{2} \right\rfloor} - 2D_{n+6} 2^{\left\lfloor \frac{n+6}{2} \right\rfloor} \\
&= 4D_{n+6} 2^{\left\lfloor \frac{n+6}{2} \right\rfloor} - 4D_{n+5} 2^{\left\lfloor \frac{n+5}{2} \right\rfloor} - 2D_{n+6} 2^{\left\lfloor \frac{n+6}{2} \right\rfloor} \\
&= 2D_{n+6} 2^{\left\lfloor \frac{n+6}{2} \right\rfloor} - 4D_{n+5} 2^{\left\lfloor \frac{n+5}{2} \right\rfloor} \\
&= 4D_{n+5} 2^{\left\lfloor \frac{n+5}{2} \right\rfloor} - 4D_{n+4} 2^{\left\lfloor \frac{n+4}{2} \right\rfloor} - 4D_{n+5} 2^{\left\lfloor \frac{n+5}{2} \right\rfloor} \\
&= -4D_{n+4} 2^{\left\lfloor \frac{n+4}{2} \right\rfloor} \\
&= -D_{n+4} 2^{\left\lfloor \frac{n+4}{2} \right\rfloor + 2}
\end{aligned}
$$

Suy ra $D_{n+8} = -D_{n+4} = D_n, \quad \forall n \geq 1$

Như vậy quả thực $\{D_n\}$ là dãy tuần hoàn với chu kỳ bằng 8.

$n = 8k + r, \quad r = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

Trên một chu kỳ từ n=8 đến n=15 chẳng hạn $\{D_n\}$ nhận các giá trị $\{-1,-1,0,1,1,1,0,-1\}$

Tương ứng với mỗi r ta có 1 công thức để biểu diễn $\{U_n\}$ ?

☺ Giờ là lúc ta dùng các kiến thức đã có để gộp 8 công thức trên làm 1:

$$
\begin{aligned}
U_n &= \{-1-1,0,1,1,1,0,-1\} 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \\
&= \left(\{0,0,0,1,1,1,1,1\} - \{1,1,0,0,0,0,0,0\} - \{0,0,0,0,0,0,1,1\} - \{0,0,0,0,0,0,0,1\}\right) 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \\
&= \left( \left\lfloor \frac{r+5}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r-2}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r+2}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r+1}{8} \right\rfloor \right) 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}
\end{aligned}
$$

Thay giá trị $r = n - 8\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$ rồi rút gọn, cuối cùng ta được

$$
\boxed{U_n = \left( \left\lfloor \frac{n+5}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+2}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+1}{8} \right\rfloor \right) 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}
$$

==========================