Chuyên Đề:
KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BÀI TOÁN CỰC TRỊ

I. BÀI TOÁN MỞ ĐẦU

Bài toán 1. Cho $\begin{cases} a,b>0 \\ a+b\le 1 \end{cases}$, tìm GTNN của $P=\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{2ab}$

Giải

Ta có: $\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{2ab}\ge \dfrac{4}{a^2+2ab+b^2}=\dfrac{4}{(a+b)^2}\ge 4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Min}P=4$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$

Bài toán 2. Cho $\begin{cases} a,b>0 \\ a+b\le 1 \end{cases}$, tìm GTNN của $P=\dfrac{1}{1+a^2+b^2}+\dfrac{1}{2ab}$

Giải

Lời giải 1. Ta có: $P=\dfrac{1}{1+a^2+b^2}+\dfrac{1}{2ab}\ge \dfrac{4}{a^2+2ab+b^2+1}=\dfrac{4}{(a+b)^2+1}\ge \dfrac{4}{2}=2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^2+b^2=2ab \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2+1=0 \\ a+b=1 \end{cases}$(vô nghiệm). Vậy không tồn tại Min$P$...?..?

Lời giải 2. Ta có:

$$P=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{6ab}+\frac{1}{3ab}\ge \frac{4}{a^2+6ab+b^2+1}+\frac{1}{3ab}=\frac{4}{(a+b)^2+1+4ab}+\frac{1}{3ab}$$

Mặt khác $ab\le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$. Vậy $P\ge \dfrac{4}{2+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{6\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}\ge \dfrac{8}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^2+b^2=3ab \\ a=b \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$.

Lời bình: Bài toán 1 và bài toán 2 gần như tương tự nhau, cùng áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge \dfrac{4}{a+b}$. Lời giải 1 tại sao sai? Lời giải 2 tại sao lại tách $\dfrac{1}{2ab}=\dfrac{1}{6ab}+\dfrac{1}{3ab}$?..? Làm sao nhận biết được điều đó…?...***Đó chính là kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức. Và qua chuyên đề này chúng ta sẽ hiểu sâu hơn về kỹ thuật "chọn điểm rơi" trong việc giải các bài toán cực trị***

II. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Có thể nói tằng bài toán bất đẳng thức nói chung và bài toán tìm GTNN, GTLN nói riêng là một trong những bài toán được quan tâm đến nhiều ở các kỳ thi Học sinh giỏi, tuyển sinh Đại học,…và đặc biệt hơn nữa là với xu hước ra đề chung của Bộ GD – ĐT. Trong kỳ thi tuyển sinh Đại học thì bài toán bất đẳng thức là bài toán khó nhất trong đề thi mặc dù chỉ cần sử dụng một số bất đẳng thức cơ bản trong Sách giáo khoa nhưng học sinh vẫn gặp nhiều khó khăn do một số sai lầm do thói quen như lời giải 1 trong bài toán mở đầu là một ví dụ. Để giúp học sinh hiểu sâu hơn về bài toán cực trị đặc biệt là các trường hợp dấu đẳng thức xảy ra, tôi viết chuyên đề "Chọn điểm rơi trong giải toán bất đẳng thức".

III. NỘI DUNG

1. Bổ túc kiến thức về bất đẳng thức

a) Tính chất cơ bản của bất đẳng thức

Định nghĩa: $a \ge b \Leftrightarrow a - b \ge 0$

- $\begin{cases} a \ge b \\ b \ge c \end{cases} \Rightarrow a \ge c$
- $a \ge b \Leftrightarrow a + c \ge b + c$
- $\begin{cases} a \ge b \\ c \ge d \end{cases} \Rightarrow a + c \ge b + d$
- $a \ge b > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} \le \dfrac{1}{b}$

b) Một số bất đẳng thức cơ bản

- ***Bất đẳng thức Cauchy***

  Cho n số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n (n \ge 2)$ ta luôn có $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

- ***Một vài hệ quả quan trọng***:

  \+ $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right) \ge n^2$ với $\forall a_i > 0, i = \overline{1,n}$

  \+ $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} \ge \dfrac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ với $\forall a_i > 0, i = \overline{1,n}$

  \+ Cho $2n$ số dương ($n \in Z, n \ge 2$): $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ ta có:

  $$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)...(a_n + b_n)} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 ... b_n}$$

- ***Bất đẳng thức BCS***

  Cho $2n$ số dương ($n \in Z, n \ge 2$): $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ ta có:

  $$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$(quy ước nếu $b_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$)

- ***Hệ quả(Bất đẳng thức Svác-xơ)***

Cho hai dãy số $a_1,a_2,...,a_n$ và $b_1,b_2,...,b_n$ với $b_i>0\ \forall i=\overline{1,n}$ ta luôn có:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$

2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Cho $f(x_1,x_2,...,x_n)$ là một hàm n biến thực trên $D\subset\mathbb{R}^n: f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

- $\underset{D}{\text{Max}}\,f=M\Leftrightarrow\begin{cases}f(x_1,x_2,...,x_n)\le M\ \forall(x_1,x_2,...,x_n)\in D\\ \exists(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\in D: f(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)=M\end{cases}$
- $\underset{D}{\text{Min}}\,f=m\Leftrightarrow\begin{cases}f(x_1,x_2,...,x_n)\ge m\ \forall(x_1,x_2,...,x_n)\in D\\ \exists(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\in D: f(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)=M\end{cases}$

3. Phương pháp chọn điểm rơi

Nhận xét: Các bất đẳng thức trong các đề thi đại học thông thường là đối xứng với các biến, và ta dự đoán dấu bằng xảy ta khi các biến bằng nhau và xảy ra tại biên.

a) Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cauchy

Sử dụng hệ quả (1) và (2)

Bài 1. Cho $\begin{cases}a,b>0\\ a+b\le1\end{cases}$, tìm GTNN của biểu thức $P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab$.

Sai lầm thường gặp:

Sai lầm 1: Ta có :

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{2ab}+4ab\ge\frac{4}{a^2+b^2+2ab}+\frac{1}{2ab}+4ab=\frac{4}{(a+b)^2}+\left(\frac{1}{2ab}+4ab\right).$$

Mặt khác $\frac{1}{2ab}+4ab\ge2\sqrt{\frac{1}{2ab}.4ab}=2\sqrt{2}$. Vậy $P\ge4+2\sqrt{2}$ nên $MinP=2(2+\sqrt{2})$

Sai lầm 2:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+\left(4ab+\frac{1}{4ab}\right)+\frac{1}{4ab}\ge\frac{4}{(a+b)^2}2\sqrt{4ab.\frac{1}{2ab}}+\frac{1}{4ab}\ge4+2+\frac{1}{4ab}=6+\frac{1}{4ab}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=2ab\\ a^2b^2=\frac{1}{16}\\ a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$. Thay $a=b=\frac{1}{2}$ vào ta được $P\ge7$

$\Rightarrow MinP=7$ khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Nguyên nhân sai lầm:

Sai lầm 1: Học sinh chưa có khái niệm "điểm rơi", việc tách $\frac{1}{ab}=\frac{1}{2ab}+\frac{1}{2ab}$ là do thói quen để làm xuất hiện $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$. $MinP=4+2\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ \frac{1}{2ab}=4ab\\ a+b=1\end{cases}\Rightarrow VN$.

Dấu "=" bất đẳng thức không xảy ra $\Rightarrow$ không kết luận được $MinP=4+2\sqrt{2}$

Sai lầm 2: Học sinh đã có khái niệm điểm rơi, dự đoán được dấu bằng khi $a=b=\frac{1}{2}$ nên đã tách các số hạng và $MinP=7$ khi $a=b=\frac{1}{2}$ là đúng, nhưng bước cuối học sinh làm sai ví dụ như $(1-x)^2+x\geq x$, dấu bằng xảy ra khi $x=1\Rightarrow Min\left[(x-1)^2+x\right]=1??$.

Lời giải đúng: Do P là biểu thức đối xứng với a,b, ta dự đoán $MinP$ đạt tại $a=b=\frac{1}{2}$, ta có:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+\left(4ab+\frac{1}{4ab}\right)+\frac{1}{4ab}\geq\frac{4}{(a+b)^2}+2\sqrt{4ab.\frac{1}{2ab}}+\frac{1}{4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\geq 7$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=2ab\\ a^2b^2=\frac{1}{16}\\ a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Bài 2. Cho $\begin{cases}a,b>0\\ a+b\leq 1\end{cases}$, tìm GTNN của biểu thức $S=\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$.

Sai lầm thường gặp:

Ta có: $S=\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{3a^2b}+\frac{1}{3ab^2}+\frac{2}{3a^2b}+\frac{2}{3ab^2}\geq\frac{9}{a^3+b^3+3a^2b+3ab^2}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}\right)$

$$=\frac{9}{(a+b)^3}+\frac{2}{3}.\frac{1}{ab}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right]\geq 9+\frac{2}{3.\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.\frac{4}{a+b}\geq\frac{59}{3}$$

$MinS=\frac{59}{3}$

Nguyên nhân sai lầm: $MinS=\frac{59}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3+b^3=3a^2b\\ a=b\\ a+b=1\end{cases}\quad (vn)$

Lời giải đúng

Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}$, và ta thấy $a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=(a+b)^3$ vì thế ta muốn xuất hiện $(a+b)^3$; ta áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{2ab^2}$ và nếu vậy:

$\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{2ab^2}\geq\frac{9}{(a+b)^3-ab(a+b)}$, ta không đánh giá tiếp được cho nên ta phải áp dụng bất đẳng thức cho 5 số:

$$S=\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{2ab^2}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{2ab^2}\geq\frac{25}{(a+b)^3+ab(a+b)}\geq\frac{25}{(a+b)^3+\frac{(a+b)^3}{4}}\geq 20$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Bài 3. Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \end{cases}$. Tìm GTLN của $P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$.

Sai lầm thường gặp:

Sai lầm 1: Ta có

$$P\leq\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}\right)=\frac{5}{18}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow MaxP=\frac{10}{9}$$

Sai lầm 2:

$$P\leq\frac{1}{3\sqrt[3]{2xyz}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x.2yz}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{xy2z}}\leq\frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}\right)=\frac{10}{9}$$

Nguyên nhân sai lầm: Cả hai lời giải trên đều đã biết hướng "đích" song chưa biết chọn điểm rơi. $MaxP=\frac{10}{9}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x=y=z \\ 2y=x=z \\ 2z=x=y \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \end{cases}\quad (vn)$, tức là không tồn tại $(x,y,z)\in D: P=\frac{10}{9}$

Lời giải đúng: Từ hai lời giải trên với dự đoán $MaxP$ đạt được tại $x=y=z=\frac{4}{3}$ nên tách các số $2x=x+x$ ra cho dấu bằng xảy ra.

Cách 1: Ta có $\frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{x+x+y+z}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, tương tự và ta có:

$$P \le \frac{1}{16}\left[\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)\right]=1$$, vậy $MaxP = 1$ khi $x = y = z = \frac{4}{3}$.

Cách 2: Ta có $2x+y+z = x+x+y+z \ge 4\sqrt[4]{x.x.y.z} \Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} \le \frac{1}{4\sqrt[4]{x^2yz}}$, mặt khác:

$\sqrt[4]{\frac{1}{x}.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}.\frac{1}{z}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, tương tự ta có:

$P \le \frac{1}{16}.4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{4}$, suy ra:

$MaxP = 1$ khi $x = y = z = \frac{1}{4}$.

Nhận xét: Ta có thể mở rộng bài 3:

Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 4 \end{cases}$. Tìm GTLN của $P = \frac{1}{\alpha x+\beta y+\gamma z}+\frac{1}{\beta x+\gamma y+\alpha z}+\frac{1}{\gamma x+\alpha y+\beta z}$.

Với $\alpha, \beta, \gamma \in N^*$: Cách làm tương tự như bài 3, ta tách $\alpha x = \underbrace{x+x+\cdots = x}_{\alpha \text{ số}}, \ldots$. Nếu $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$, thì bài toán có còn giải quyết được không? Câu trả lời dành cho độc giả trong phần sau" Kỹ thuật chọn điểm rơi trong BCS"

Bài 4. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c = 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a} \le 3\sqrt[3]{3}$.

Sai lầm thương gặp:

Ta có: $\sqrt[3]{1.1(a+2b)} \le \frac{1+1+(a+2b)}{3} = \frac{2+a+2b}{3}$, tương tự ta có:

$$\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a} \le \frac{2+a+2b}{3}+\frac{2+b+2c}{3}+\frac{2+c+2a}{3} = 5,$$

mà $5 > 3\sqrt[3]{3} \Rightarrow$ đề ra sai...?...?

Nguyên nhân sai lầm: $P = VT \le 5$, vậy $MaxP=5 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=1 \\ b+2c=1 \\ c+2a=1 \\ a+b+c=3 \end{cases}$ (vn), vậy $P < 5$

Lời giải đúng: Ta dự đoán dấu "=" trong bất đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy ta áp dụng Cauchy cho ba số $a+2b, 3, 3$ ta có:

$\sqrt[3]{a+2b} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\sqrt[3]{3.3(a+2b)} \le \frac{1}{\sqrt[3]{9}}.\frac{3+3+(a+2b)}{3} = \frac{6+a+2b}{3\sqrt[3]{9}}$, tương tự ta có:

$P \le \frac{6+a+2b}{3\sqrt[3]{9}}+\frac{6+b+2c}{3\sqrt[3]{9}}+\frac{6+c+2a}{3\sqrt[3]{9}} = 3\sqrt[3]{3}$, dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$

Bài 5. Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xyz=1 \end{cases}$, chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{1+y}+\dfrac{y^2}{1+z}+\dfrac{z^2}{1+x}\ge\dfrac{3}{2}$

Sai lầm thường gặp:

Sai lầm 1: $P=\dfrac{x^2}{1+y}+\dfrac{y^2}{1+z}+\dfrac{z^2}{1+x}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{(xyz)^2}{(1+y)(1+z)(1+x)}}$, mặt khác $\begin{cases} 1+y\ge 2\sqrt{y} \\ 1+z\ge 2\sqrt{z} \\ 1+x\ge 2\sqrt{x} \end{cases}$, suy ra:

$(1+y)(1+z)(1+x)\le 8\sqrt{xyz}=8$. Vậy $P\ge\dfrac{3}{2}$, dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$

Sai lầm 2: ta có: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{1+y}+(1+y)\ge 2x \\ \dfrac{y^2}{1+z}+(1+z)\ge 2y \\ \dfrac{z^2}{1+x}+(1+x)\ge 2z \end{cases} \Rightarrow P\ge 2(x+y+z)-(x+y+z)-3=x+y+z-3$,

mặt khác $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3\Rightarrow P\ge 0$

Nguyên nhân sai lầm:

Ở sai lầm 1: Học sinh quên tính chất cơ bản của bất đẳng thức: $a\ge b>0\Rightarrow\dfrac{1}{a}\le\dfrac{1}{b}$

Ở sai lầm 2: Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} x=y=z \\ \dfrac{x^2}{1+y}=1+y,\dfrac{y^2}{1+z}=1+z,\dfrac{z^2}{1+x}=1+x\,(vn) \\ xyz=1 \end{cases}$

Lời giải đúng: Ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$. Vì vậy khi áp dụng Cauchy cho $\dfrac{x^2}{1+y}$ và $\dfrac{1+y}{\alpha}$: $\dfrac{x^2}{1+y}=\dfrac{1+y}{\alpha}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha=4$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{1+y}+\dfrac{1+y}{4}\ge x \\ \dfrac{y^2}{1+z}+\dfrac{1+z}{4}\ge y \\ \dfrac{z^2}{1+x}+\dfrac{1+x}{4}\ge z \end{cases} \Rightarrow P\ge(x+y+z)-\dfrac{1}{4}(x+y+z)-\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}(x+y+z)-\dfrac{3}{4}\ge\dfrac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài tập tương tự(trích dẫn trong các đề thi đại học)

Bài 1. Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xyz=1 \end{cases}$, chứng minh rằng $\frac{\sqrt{m+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{m+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{m+z^3+x^3}}{zx}\ge 3\sqrt{3}$, với $m\in N^*$: Nếu $m=1$ là đề thi Đại học khối D năm 2005

Bài 2. Cho x,y,z là 3 số thỏa $x+y+z=0$, chứng minh rằng:

$\sqrt{3+4^x}+\sqrt{3+4^y}+\sqrt{3+4^z}\ge 6$ (đề tham khảo 2005)

Bài 3. Cho $a\ge 2, b\ge 3, c\ge 4$, tìm GTLN: $P=\frac{ab\sqrt{c-4}+bc\sqrt{a-2}+ca\sqrt{b-3}}{abc}$

Bài 4. Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{3}{4}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+3a}\le 3$ (ĐTK 2005)

Bài 5. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\le 1 \end{cases}$, tìm GTNN của các biểu thức sau:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

$$S=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

$$Q=\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

Bài 6. Cho $u^2+v^2=1$, chứng minh rằng: $\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)^2+\left(v^2+\frac{1}{v^2}\right)^2\ge \frac{25}{2}$.

Bài 7. Cho a,b,c là các số dương. Tìm GTNN của:

$$Q=\frac{\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}$$ (ĐHQGHN 2001-2002)

Bài 8. Cho a,b,c dương thỏa $abc=1$, tìm GTNN của biểu thức:

$$Q=\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}$$ (ĐH 2000 – 2001)

Bài 9. Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x+y=1 \end{cases}$, tìm GTNN của $P=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}$ (ĐHNT 2001 – 2002)

Bài 10. Cho x,y,z là ba số dương và $x+y+z\le 1$, chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}$$ (ĐH 2003)

b) Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức BCS.

Bài 1. Cho x, y, z là ba số dương và $x+y+z \le 1$, chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \ge \sqrt{82}$$

Nhận xét: chúng ta có thể dùng bất đẳng thức Cauchy như ở phần 1

Sai lầm : $\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(1^2+1^2\right)} \ge \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} = x+\frac{1}{x} \Rightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

Tương tự ta có: $P \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x+y+z)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right] \ge \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} = 3\sqrt{2}$

Vậy $P \ge 3\sqrt{2}$....?

Nguyên nhân sai lầm: $P = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1}=\frac{1}{x}, \frac{y}{1}=\frac{1}{y}, \frac{z}{1}=\frac{1}{z} (vn) \\ x+y+z=1 \end{cases}$

Lời giải đúng: Ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$; và biểu thức trong căn gợi cho tam sử dụng BCS: $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right) \ge \left(\alpha x+\frac{\beta}{y}\right)^2$ với α, β là những số thỏa mãn:

$\frac{x}{\alpha}=\frac{\frac{1}{x}}{\beta}=\frac{1}{\beta x} \Leftrightarrow x^2=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{9}$, chọn $\alpha=1, \beta=9$

Ta có $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(1^2+9^2\right) \ge \left(x+\frac{9}{x}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{82}}\left(x+\frac{9}{x}\right)$, tương tự ta có:

$P \ge \frac{1}{\sqrt{82}}\left[9x+y+z)+9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]$, do $x+y+z=1; \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9$ nên ta tách:

$$(x+y+z)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{80}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge \frac{2}{3}\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}+\frac{80}{9}\frac{9}{x+y+z} \ge 82$$

Vậy $P \ge \sqrt{82}$, dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 2. Cho $\begin{cases} x, y, z.0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le 1 \end{cases}$, tìm GTLN của $P=\frac{1}{\sqrt{2}x+y+z}+\frac{1}{x+\sqrt{2}y+z}+\frac{1}{x+y+\sqrt{2}z}$

Giải

Áp dụng hệ qua (1) ta có: $\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{(\alpha+z)^2}{\sqrt{2}x+y+z}$, ta chọn α sao cho $x=y=z=3$ và $\frac{\alpha}{\sqrt{2x}}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}\Rightarrow\frac{\alpha}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow\alpha=\sqrt{2}$

Vậy ta có: $\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{(2+\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}x+y+z}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}y}+\frac{1}{z}\ge\frac{(2+\sqrt{2})^2}{x+\sqrt{2}y+z}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\sqrt{2}z}\ge\frac{(2+\sqrt{2})^2}{x+y+\sqrt{2}z}\end{cases}\Rightarrow P\le\frac{\left(\sqrt{2}+2\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right]\le\frac{1}{2+\sqrt{2}}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=3\Rightarrow MaxP=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ khi $x=y=z=3$

Bài tập áp dụng

Bài 1. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=1\end{cases}$,chứng minh rằng $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$

Bài 2. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=1\end{cases}$, tìm GTNN của $P=\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}$

Bài 3. Cho $a,b,c,d>0$, tìm GTNN của

$P=\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}$

Bài 4. Cho $\begin{cases}x_i>0,\ i=\overline{1,n}\\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1\end{cases}$, tìm GTNN của $P=\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\cdots+\sqrt{1-x_n}$

Bài 5. Cho $a,b,c>0$, chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge1$

IV. THAY CHO LỜI KẾT

Để làm rõ vai trò quan trọng của việc chọn điểm rơi trong việc định hướng giải quyết bài toán và cũng là kết lại phần chuyên đề này, tôi xin nêu một phương pháp mới giải bài toán sau:

Bài toán: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Phân tích để đi đến lời giải: Ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC là tam giác đều $A=B=C=\frac{\pi}{3}$.

Vì $A+B+C=\pi$ ta giảm bớt số biến bằng $\sin C=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$P=\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+\sin B+\sin A\cos B+\sin B\cos A$, ta nghĩ đến:

$\begin{cases}\sin^2 A+\cos^2 A=1\\ \sin^2 B+\cos^2 B=1\end{cases}$; A,B không còn quan hệ ràng buộc, làm thế nào để xuất hiện $\sin^2 A,\cos^2 A$, ta nghĩ ngay đến bất đẳng thức $ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$,

$\sin A=\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\cos A=\cos B=\dfrac{1}{2}$, Ta áp dụng Cauchy:

$$\left[\frac{\sin A}{\sqrt{3}}\cos B+\frac{\sin B}{\sqrt{3}}\cos A\right]\sqrt{3}\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{\sin^2 A}{3}+\cos^2 B\right)+\left(\frac{\sin^2 B}{\sqrt{3}}+\cos^2 A\right)\right]$$

Ta có: $\sin A+\sin B\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\sin^2 A+\dfrac{3}{4}\right)+\left(\sin^2 B+\dfrac{3}{4}\right)\right]$. Vậy:

$$VT\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{\sin^2 A}{3}+\cos^2 B\right)+\left(\frac{\sin^2 B}{3}+\cos^2 A\right)\right]+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\sin^2 A+\frac{3}{4}\right)+\left(\sin^2 B+\frac{3}{4}\right)\right]=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$