GIẢI ĐỀ THI THỬ VMF SỐ 01

Ngày 13 tháng 11 năm 2011

<u>Bài 1:</u> Cho hàm số (I): $y = \dfrac{2x}{x+2}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (I).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (I), biết rằng khoảng cahcs từ tâm ssoois xứng của đồ thị (I) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

<u>*Bài giải*</u>: *) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

1. TXĐ: $D = \mathbb{R} / \{-2\}$.
2. Sự biến thiên:

   *) Chiều biến thiên: $y' = \dfrac{4}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq -2$.

   Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

   Hàm số không có cực trị.

   Tiệm cận: Ta có:

   $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{2x}{x+2} = +\infty; \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{2x}{x+2} = -\infty$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

   $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{x+2} = 2$ nên $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

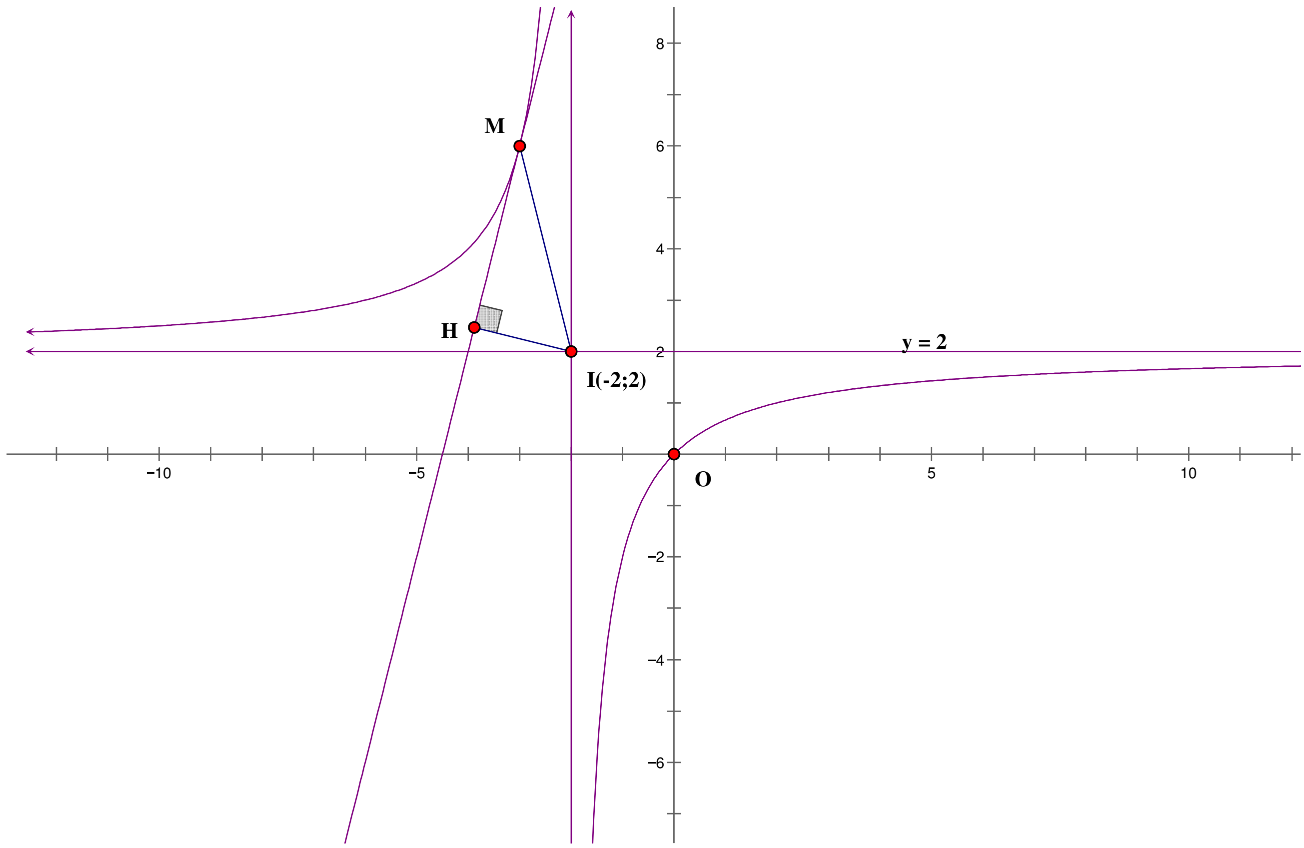
   Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

3. Đồ thị:

   Đồ thị hàm số cắt trục Oy điểm O (0;0).

   Nhận điểm I (-2;2) là tâm đối xứng.



*) Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0}{x_0+2}\right)$ là một điểm thuộc đồ thị hàm số. (d) là tiếp tuyến tại M của đồ thị (I).

Gọi H là hình chiếu của điểm I(-2;2) là tâm đối xứng của đồ thị hàm số (I).

Ta luôn có: $IH \le MH$ nên để khoảng cách từ I đến d lớn nhất thì $MI \perp (d)$.

Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của 2 đường thẳng MI và (d) thì $k_1.k_2 = -1$

Ta có: $k_2 = f'(x_0) = \dfrac{4}{(x_0+2)^2}$; Lại có: $\overrightarrow{IM} = \left(x_0+2;\dfrac{-4}{(x_0+2)}\right)$ suy ra vecto chỉ phương của đường thẳng IM là $\vec{n} = \left(\dfrac{4}{(x_0+2)^2};1\right)$. Do đó: $k_1 = \dfrac{4}{(x_0+2)^2}$.

Vậy: $\dfrac{4}{(x_0+2)^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+2=2 \\ x_0+2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-4 \end{array}\right.$. Khi đó, phương trình các tiếp tiến thỏa mãn là:

$(\Delta_1): y = x$ và $(\Delta_2): y = x+8$.

<u>Câu II</u> (*2 điểm*). 1. Giải phương trình: $\sin x.\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$

2. Giải phương trình: $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{1+4x} + \sqrt{x^2+y^2-2y-3} = \sqrt{x^4-16} - y + 5$.

<u>Bài giải:</u> 1. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sin x.\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x.\cos x + \sin x\left(3-4\sin^2 x\right) = 6\cos^3 x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\cos x + \sin x\left(3\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 6\cos^3 x \Leftrightarrow 6\cos^3 x - 3\cos^2 x.\sin x + \sin^2 x\left(2\cos x - \sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(3\cos^2 x + \sin^2 x\right)\left(2\cos x - \sin x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(1+2\cos^2 x\right)\left(2\cos x - \sin x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x = \sin x \Leftrightarrow \tan x = 2 \Leftrightarrow x = \arctan 2 + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Điều kiện để các căn thức có nghĩa là: $\begin{cases} 4-x^2 \ge 0 \\ x^2+y^2-2y-3 \ge 0 \\ x^4-16 \ge 0 \\ 1+4x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ 1+4x \ge 0 \\ y^2-2y+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành:

$$\sqrt{y^2-2y+1} = 3-y \Leftrightarrow |y-1| = 3-y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-1=3-y \\ 1-y=3-y \end{array}\right. \Leftrightarrow y=2$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm $(x;y)=(2;2)$.

<u>Câu III</u> (*1 điểm*) : Tính tích phân: $I=\int_0^3 \frac{|x^2-x|}{x^2+3}dx$.

Bài giải: Ta có:

$$I=\int_0^1 \frac{x-x^2}{x^2+3}dx+\int_1^3 \frac{x^2-x}{x^2+3}dx=\left(\int_0^1\left(\frac{x}{x^2+3}-1\right)dx+\int_1^3\left(1-\frac{x}{x^2+3}\right)\right)+\left(\int_0^1 \frac{3}{x^2+3}-\int_1^3 \frac{3}{x^2+3}\right)$$

Xét các tích phân vô định:

$$I_1=\int\left(\frac{x}{x^2+3}-1\right)dx=\int\frac{d\left(x^2\right)}{2\left(x^2+3\right)}-\int dx=\frac{1}{2}.\ln\left(x^2+3\right)-x+C_1.$$

$I_2=\int \frac{3}{x^2+3}dx.$ Đặt $x=\sqrt{3}\tan t \Rightarrow dx=\left(\sqrt{3}\tan t\right)'.dt=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}.dt$. Ta có:

$$I_2=\int\frac{3}{3\tan^2 t+3}d\left(\sqrt{3}.\tan t\right)=\int dt=t+C_2=\arctan x+C_2.$$

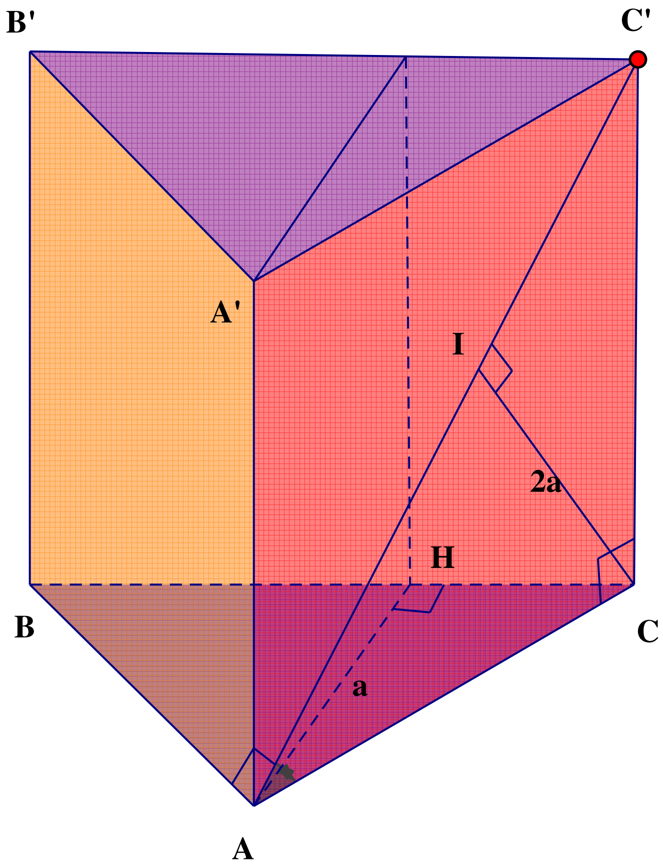
Vậy:

$$I=\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)-x\right)\Big|_0^1-\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)-x\right)\Big|_1^3+\sqrt{3}\arctan x\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}-\sqrt{3}\arctan x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}$$

$$=\ln 4-\frac{\ln 12+\ln 3}{2}+1+2\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}=\ln\frac{2}{3}+1$$

<u>Câu IV</u> (*1 điểm*): Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Gọi khoảng cách giữa AA' và mp(BCC'B') là a, khoảng cách từ điểm C đến mp(ABC') là 2a. Góc giauwx 2 mp(ABC') và mp(ABC) là φ. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a và φ.

<u>Bài giải:</u> (hình vẽ bên)



Kẻ $AH \perp BC$ mà $CC' \perp mp(ABC) \Rightarrow CC' \perp AH$ nên $AH \perp mp(BCC'B')$

Suy ra: $d_{(AA';(BCC'B'))} = d_{(A;(BCC'B'))} = AH = a$.

Lại có: $CC' \perp AB, CA \perp AB \Rightarrow AB \perp (ACC'A') \Rightarrow AB \perp AC'$.

Do đó, kẻ CI vuông góc với AC' thì $CI \perp mp(ABC') \Rightarrow d_{(C;(ABC'))} = CI = 2a$.

Và $\left(\widehat{(ABC);(ABC')}\right) = \widehat{CAC'} = \varphi$.

Áp dụng các hệ thức lượng trong các tam giác vuông, ta có:

- ΔCAI vuông tai I: $AC = \dfrac{IC}{\sin\varphi} = \dfrac{2a}{\sin\varphi}$.
- $\Delta CC'A$ vuông tai C: $CC' = AC.\tan\varphi = 2a.\dfrac{\tan\varphi}{\sin\varphi} = \dfrac{2a}{\cos\varphi}$.
- ΔABC vuông tai C, AH $\perp$ BC: $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{\sin^2\varphi}{4a^2} \Rightarrow AB = \dfrac{2a}{\sqrt{4-\sin^2\varphi}}$

Vậy thể tích của khối lăng trụ:

$$V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{ABC} = \frac{1}{2}.CC'.AB.AC = \frac{1}{2}.\frac{2a}{\cos\varphi}.\frac{2a}{\sin\varphi}.\frac{2a}{\sqrt{4-\sin^2\varphi}} = \frac{8a^3}{\sin 2\varphi\sqrt{4-\sin^2\varphi}}.$$

Câu V (*1 điểm*):

Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn: $3\left(a^4+b^4+c^4\right)-25\left(a^2+b^2+c^2\right)+48=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức: $P=\dfrac{a^2}{b+2c}+\dfrac{b^2}{c+2a}+\dfrac{c^2}{a+2b}$.

Bài giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$P=\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}=\frac{a^4}{a^2b+2a^2c}+\frac{b^4}{b^2(c+2a)}+\frac{c^4}{c^2(a+2b)}\geq\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)}$$

Lại có:

$$a^2b+b^2c+c^2a=\sqrt{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)^2}\leq\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}\leq\sqrt{\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{3}}.$$

Tương tự ta có:

$$ab^2+bc^2+ca^2\leq\sqrt{\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{3}}.$$ Suy ra: $\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\leq\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}$

Vậy: $P\geq\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}\qquad(1)$.

Mặt khác: $\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2\geq0\Leftrightarrow3\left(a^4+b^4+c^4\right)\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$ nên từ giả thiết:

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-25\left(a^2+b^2+c^2\right)+48\leq9\left(a^4+b^4+c^4\right)-25\left(a^2+b^2+c^2\right)+48=0$$

$$\Rightarrow\left(a^2+b^2+c^2-3\right)\left[3\left(a^2+b^2+c^2\right)-16\right]\leq0\Leftrightarrow3\leq a^2+b^2+c^2\leq\frac{16}{3}\qquad(2)$$

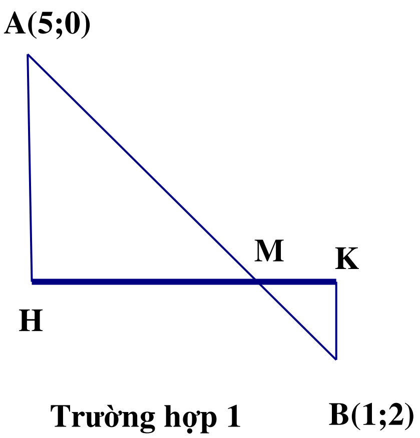
Từ (1) và (2) suy ra: $P\geq1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=c=1$.
Vậy giá trị nhỏ nhất (GTNN) của P là 1.

Câu VI a) (*2 điểm*): 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 2 điểm A(5;0) và B(1;2). Hãy tìm đường thẳng d sao cho khoảng cách từ điểm A đến d bằng 3 và từ B đến d bằng 1.

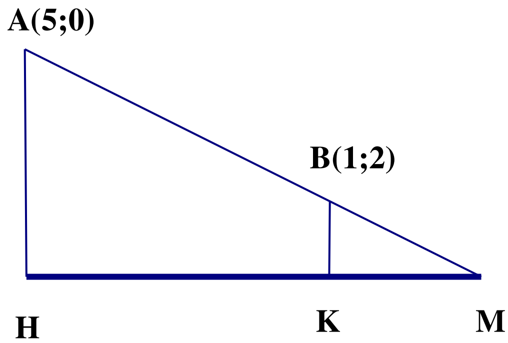
2. Cho mặt cầu $(C):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=11$ và cho 2 đường thẳng:

   $(d_1):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $(d_2):\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$. Viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với (C) đồng thời song song với (d_1) và (d_2).

__Bài giải:__ 1.



Trường hợp 1



Trường hợp 2

Gọi M là giao điểm của AB và đường thẳng d, H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trêm d.
Xét TH1: A và B nằm khác phía đối với đường thẳng d. Khi đó áp dụng định lí Ta-let, ta có:

$$\frac{BK}{AH}=\frac{KM}{HM}=\frac{MB}{MA}=\frac{1}{3} \quad (1) \quad \Rightarrow \overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \begin{cases} x_M-5=3(1-x_M) \\ y_M=3(2-y_M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M=2 \\ y_M=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(2;\frac{3}{2}\right)$$

Giả sử $K(x;y)$ thì cùng từ (1) ta có: $\overrightarrow{HK}=4\overrightarrow{MK}=(4x-8;4y-6)$

Lại có: $\overrightarrow{AB}=(-4;2) \Rightarrow AB=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5} \Rightarrow MB=\frac{\sqrt{5}}{2}$ mà BK = 1 nên MK = $\frac{1}{2} \Rightarrow HK=2$.

Do đó: $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{HK}}\right)=\cos\widehat{KMB}=\frac{MK}{MB}=\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{-4(4x-8)+2(4y-6)}{2\sqrt{5}.2}=\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 4x-2y-5=0$

Vậy phương trình đường thẳng d là: $4x-2y-5=0$.
Xét TH2: 2 điểm A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng d. Tương tự, ta có:
$\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB} \Rightarrow 2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA} \Rightarrow M(-1;3). \Rightarrow \overrightarrow{MK}=(x+1;y-3)$

Tính được: $AB=2\sqrt{5} \Rightarrow MB=\sqrt{5} \Rightarrow KM=\sqrt{5-1^2}=2$.

Do đó: $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{KM}}\right)=\cos\widehat{KMB}=\frac{MK}{MB}=\frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{-4(x+1)+2(y-3)}{2\sqrt{5}.2}=\frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 2x-y+10=0$

Vậy phương trình đường thẳng d là: *2x – y + 10 = 0.*

2. Mặt cầu $(C):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=11 \Rightarrow R=\sqrt{11}$ va $\mathrm{I}(1;-1;0)$ lần lượt là bán kính và tâm (C).

Gọi mp(P) là mặt phẳng cần tìm. Ta có: $(d_1):\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$ và $(d_2):\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ nên vecto chỉ phương của d_1 và d_2 lần lượt là: $\overrightarrow{u_1}=(1;1;2);\overrightarrow{u_2}=(1;2;1)$

Vì mp(P) song song với d_1 và d_2 nên vecto pháp tuyến của mp(P) là:
$\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=\left(\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right)=(0;1;1)$.

Do đó, phương trình mặt phẳng của (P) có dạng: $y+z+D=0$.

Mp(P) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow d_{(I;(P))}=R=\sqrt{11} \Leftrightarrow \frac{-1+D}{\sqrt{2}}=\sqrt{11} \Rightarrow D=1+\sqrt{22}$.

Vậy phương trình mp(P) là: $y+z+1+\sqrt{22}=0$.

<u>Bài VI b)</u> (*1 điểm*)Tính tổng gồm 2n số hạng :

$$S=\frac{1}{2}C_{2n}^{1}-\frac{1}{3}C_{2n}^{2}+...+(-1)^{k}.\frac{1}{k}.C_{2n}^{k-1}+...+(-1)^{2n+1}.\frac{1}{2n+1}.C_{2n}^{2n}.$$

<u>Bài giải</u>: Biến đổi: $\frac{1}{k}C_{2n}^{k-1}=\frac{1}{k}.\frac{(2n)!}{(k-1)!(2n-k+1)!}=\frac{1}{2n+1}.\frac{(2n+1)!}{k!(2n-k+1)!}=\frac{1}{2n+1}.C_{2n+1}^{k}$.

Do đó: $S=\frac{1}{2n+1}\left(C_{2n+1}^{2}-C_{2n+1}^{3}+....+(-1)^{k}C_{2n+1}^{k}+....+C_{2n+1}^{2n}-C_{2n+1}^{2n+1}\right)$

$$S=\frac{1}{2n+1}\left(C_{2n+1}^{2}-C_{2n+1}^{3}+....+(-1)^{k}C_{2n+1}^{k}+....+C_{2n+1}^{2n}-C_{2n+1}^{2n+1}\right)=\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}.(-1)^{k}-C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}\right)$$

$$=\frac{1}{2n+1}.\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}.(-1)^{k}+\frac{2n}{2n+1}.$$

Lại xét khai triển theo nhị thức Niw-ton:

$(1+x)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}.x^{k}$. Cho $x=-1\Rightarrow\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}.(-1)^{k}=0$.

Vậy tổng cần tính: $S=\frac{2n}{2n+1}$.

----------------------------------THE END.----------------------------

Thí sinh: Phạm Hùng Vương.

Lớp $12C_1$ Trường THPT Phan Đăng Lưu, Yên Thành, Nghệ An.

Nick VMF: h.vuong_pdl.