

Đáp án đề thi thử số 1

Ngày 28 tháng 11 năm 2011

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $(I) : y = \frac{2x}{x+2}$

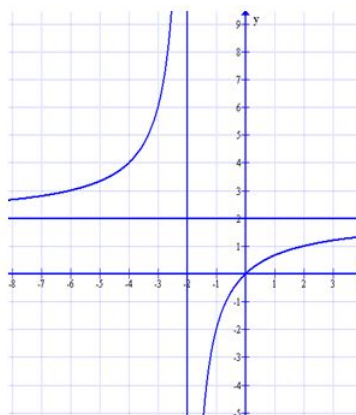
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (I) .

Lời giải :

- Tập xác định : $\mathbb{R} \neq \{-2\}$
- Sự biến thiên :
 - Chiều biến thiên :
 - * $y' = \frac{4}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq -2.$
 - * Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -2), (-2; +\infty).$
 - Cực trị : hàm số không có cực trị.
 - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2; \lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = +\infty.$ Đồ thị có tiệm cận đứng là $x = -2$, tiệm cận ngang là $y = 2.$
 - Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

- Đồ thị đi qua $O(0;0)$ và có tâm đối xứng là $I(-2;2)$



□

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (I), biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (I) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

Lời giải : Tâm đối xứng $I(-2; 2)$.

Tiếp tuyến Δ của đồ thị (I) tại điểm có hoành độ $x_0 \neq -2$ có phương trình dạng :

$$y = \frac{4(x - x_0)}{(x_0 + 2)^2} + \frac{2x_0}{x_0 + 2}$$

Hay $4x - (x_0 + 2)^2 y + 2x_0^2 = 0$

Ta có :

$$\begin{aligned} d_{(I;\Delta)} &= \frac{|-8 - 2(x_0 + 2)^2 + 2x_0^2|}{\sqrt{16 + (x_0 + 2)^4}} \\ &= \frac{|8x_0 + 16|}{\sqrt{16 + (x_0 + 2)^4}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{\frac{16}{(x_0 + 2)^2} + (x_0 + 2)^2}} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\frac{16}{(x_0 + 2)^2}$ và $(x_0 + 2)^2$:

$$d_{(I;\Delta)} \leq 2\sqrt{2}$$

Vậy $\max d_{(I;\Delta)} = 2\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -4 \end{cases}$

Do đó 2 tiếp tuyến cần tìm là $y = x$ và $y = x + 8$. □

Câu II.1 (1 điểm) Giải phương trình: $\sin x \sin 2x + \sin 3x = 6 \cos^3 x$

Lời giải : Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sin x (2 \sin x \cos x) + 3 \sin x - 4 \sin^3 x &= 6 \cos^3 x \\ \Leftrightarrow 4 \sin^3 x - 3 \sin x - 2 \sin^2 x \cos x + 6 \cos^3 x &= 0 \quad (\star) \end{aligned}$$

Nếu $\cos x = 0$ là nghiệm của $(\star)$ thì:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \cos x = 0 \\ 4 \sin^3 x - 3 \sin x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \\ 4 \sin^3 x - 3 \sin x = 0 \end{cases} \quad (\text{vô lí}) \end{aligned}$$

Vậy $\cos x \neq 0$. Ta chia hai vế của $(\star)$ cho $\cos^3 x$ ta được :

$$\begin{aligned}(\star) &\Leftrightarrow \tan^3 x - 2 \tan^2 x - 3 \tan x + 6 = 0 \\&\Leftrightarrow (\tan^2 x - 3)(\tan x - 2) = 0 \\&\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 2 = \tan \alpha \\ \tan x = \pm \sqrt{3} = \pm \tan \frac{\pi}{3} \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \left\{ \alpha + k\pi, \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}, \tan \alpha = 2, k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Câu II.2 (1 điểm) Giải phương trình

$$\sqrt{4-x^2} + \sqrt{1+4x} + \sqrt{x^2+y^2-2y-3} = \sqrt{x^4-16} - y + 5 \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải : Điều kiện xác định của phương trình

$$\begin{aligned}&\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 1+4x \geq 0 \\ x^2+y^2-2y-3 \geq 0 \\ x^4-16 \geq 0 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ x \geq -\frac{1}{4} \\ x^2+y^2-2y-3 \geq 0 \\ |x| \geq 2 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ (y-1)^2 \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $x = 2$. Với $x = 2$ phương trình trở thành :

$$\begin{aligned}\sqrt{(y-1)^2} &= 2 - y \\ \Leftrightarrow |y-1| &= 2 - y \\ \Leftrightarrow y &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Kết luận : phương trình có một cặp nghiệm (x, y) duy nhất là $\left(2, \frac{3}{2}\right)$. $\square$

Câu III (1 điểm) Tính tích phân

$$I = \int_0^3 \frac{|x^2 - x|}{x^2 + 3} dx.$$

Lời giải :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{|x^2 - x|}{x^2 + 3} dx + \int_1^3 \frac{|x^2 - x|}{x^2 + 3} dx \\ &= - \int_0^1 \frac{x^2 - x}{x^2 + 3} dx + \int_1^3 \frac{x^2 - x}{x^2 + 3} dx \end{aligned}$$

Xét

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_0^1 \frac{x^2 - x}{x^2 + 3} dx \\ &= - \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{x^2 + 3} - \frac{3}{x^2 + 3} \right) dx \\ &= - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 3} dx + \int_0^1 \frac{3}{x^2 + 3} dx \\ &= - \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2 + 3)}{x^2 + 3} + \int_0^1 \frac{3}{x^2 + 3} dx \\ &= -1 + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} + \int_0^1 \frac{3}{x^2 + 3} dx \end{aligned}$$

Đặt $x = \sqrt{3} \tan t$, thế thì $dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt$

Do đó :

$$\begin{aligned} I_1 &= -1 + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3}{3 \tan^2 t + 3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt \\ &= -1 + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} + \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt \\ &= -1 + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} + \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

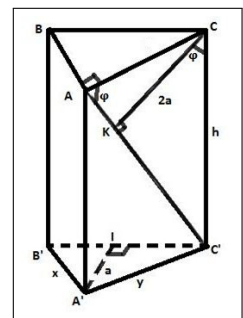
Hoàn toàn tương tự ta tính được :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^3 \frac{x^2 - x}{x^2 + 3} dx \\ &= 2 - \frac{1}{2} \ln 3 - \sqrt{3} \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Kết luận : $I = I_1 + I_2 = 1 + \ln \frac{2}{3}$.

□

Câu IV (1 điểm) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Gọi khoảng cách giữa AA' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là a , khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') là $2a$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng φ . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a và φ .



Lời giải :

Dựng $A'I \perp B'C'$.

Ta lại có $CC' \perp (A'B'C')$ nên $CC' \perp A'I$.

Do đó $A'I \perp (B'C'CB)$ hay $A'I = a$.

Dựng $CK \perp AC'$

Ta lại có $(BAC') \perp (CAA'C')$ và $(BAC') \cap (CAA'C') = AC'$

Do đó $CK \perp (BAC')$ hay $CK = 2a$

Mặt khác $(\widehat{ABC'}, \widehat{ABC}) = \widehat{CAC'} = \varphi$

Đặt $A'B' = x$, $A'C' = y$ và $CC' = h$. Ta sẽ tính x, y, h theo a và φ .

Xét các tam giác ACK và CKC' ta có :

$$y = \frac{2a}{\sin \varphi}$$

$$h = \frac{2a}{\cos \varphi}$$

Tam giác $A'B'C'$ vuông tại A' , do đó :

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2a}{\sqrt{4 - \sin^2 \varphi}}$$

Thể tích hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V = \frac{1}{2}xyh = \frac{4a^3}{\sin \varphi \cos \varphi \sqrt{4 - \sin^2 \varphi}}$ □

Câu V(1 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $9(a^4 + b^4 + c^4) - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}$$

Lời giải : Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^2}{b+2c} + \frac{a^2(b+2c)}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+2c} \cdot \frac{a^2(b+2c)}{9}} = \frac{2a^2}{3}$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{c+2a} + \frac{b^2(c+2a)}{9} \geq \frac{2b^2}{3}; \quad \frac{c^2}{a+2b} + \frac{c^2(a+2b)}{9} \geq \frac{2c^2}{3}$$

Suy ra:

$$P \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a^2(b+2c) + b^2(c+2a) + c^2(a+2b)) \quad (1)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$a^2c + b^2a + c^2b \leq \frac{a^3 + a^3 + c^3}{3} + \frac{b^3 + b^3 + a^3}{3} + \frac{c^3 + c^3 + b^3}{3} = a^3 + b^3 + c^3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow P &\geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$. Từ giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} 25(a^2 + b^2 + c^2) - 48 &= 9(a^4 + b^4 + c^4) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 3 \leq a^2 + b^2 + c^2 &\leq \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Do đó $P \geq \frac{2}{9}t^2 - \frac{1}{27}t^3 = f(t)$ với $t \in [3; 4]$. Mặt khác $\min_{t \in [3; 4]} f(t) = f(3) = 1$. Suy ra $P \geq 1$.

Vậy GTNN của P là 1, đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Câu VI.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(5; 0)$ và $B(1; 2)$. Hãy tìm đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ A đến (d) bằng 3 và khoảng cách từ B đến (d) bằng 1.

Lời giải :

- Trường hợp 1 $(d) : x = a$
Theo đề bài ta có :

$$\begin{cases} |5 - a| = 3 \\ |1 - a| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$$

- Trường hợp 2 $(d) : y = ax + b$

Theo đề bài ta có :

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} |5a + b| = 3\sqrt{a^2 + 1} \\ |a - 2 + b| = \sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} |5a + b| = |3a + 3b - 6| \\ |a - 2 + b| = \sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} 2a + 6 = 2b \\ |a - 2 + b| = \sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \\ \begin{cases} 8a - 6 = -4b \\ |a - 2 + b| = \sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} a + 3 = b \\ |2a + 1| = \sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \\ \begin{cases} -2a + \frac{3}{2} = b \\ \left|a + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} a + 3 = b \\ 3a^2 + 4a = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2a + \frac{3}{2} = b \\ \left|a + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\frac{4}{3} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 0 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy có 4 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán :

$$(d_1) : x = 2$$

$$(d_2) : y = 3$$

$$(d_3) : y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$(d_4) : y = \frac{3}{4}x$$

□

2. Cho mặt cầu $(C) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 11$ và hai đường thẳng

$$(d_1) : \frac{x}{1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 1}{2}; \quad (d_2) : \frac{x + 1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

Viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với (C) đồng thời song song với (d_1) và (d_2) .

Lời giải : (d_1) qua $M_1(0; -1; 1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{S}_1 = \{1; 1; 2\}$

(d_2) qua $M_2(-1; 0; 0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{S}_2 = \{1; 2; 1\}$

Mặt phẳng song song với (d_1) và (d_2) phải có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{S}_1 \wedge \vec{S}_2 = \{-3; 1; 1\}$ và mặt phẳng có dạng : $-3x + y + z + D = 0$ (P) .

Mặt khác để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (C) thì khoảng cách từ tâm $I(1; -1; 0)$ đến (P) phải bằng $\sqrt{11}$:

$$\left| \frac{-3 - 1 + D}{\sqrt{11}} \right| = \sqrt{11} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 15 \\ D = -7 \end{cases}$$

Vậy có 2 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán :

$$(P_1) : -3x + y + z + 15 = 0$$

$$(P_2) : -3x + y + z - 7 = 0$$

□

Câu VI.b (1 điểm) Tính tổng gồm $2n$ số hạng :

$$S = \frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \dots + (-1)^k \frac{1}{k}C_{2n}^{k-1} + \dots + (-1)^{2n+1} \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n},$$

trong đó C_n^k là các hệ số của sự khai triển nhị thức Newton.

Lời giải : Nhận xét rằng với mọi $k = 2, 3, \dots, 2n+1$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}C_{2n}^{k-1} &= \frac{1}{k} \cdot \frac{(2n)!}{(k-1)!(2n-k+1)!} \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} \\ &= \frac{C_{2n+1}^k}{2n+1} \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k \cdot \frac{C_{2n+1}^k}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k C_{2n+1}^k - C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} ((1-1)^{2n+1} - 1 + 2n+1) \\ &= \frac{2n}{2n+1} \end{aligned}$$

□