Bài tham gia thi thử đại học VMF

Họ và tên: Trần Ngọc Tiến

Lớp: 11A1

Trường: THPT Dương Quảng Hàm- Văn Giang- Hưng Yên

Nick diễn đàn: NGOCTIEN_A1_DQH

ĐỀ SỐ 2

Bài làm

Câu 1:

1.1:

*)tập xác định: D=R

*)chiều biến thiên:

+) đạo hàm và cực trị:

đạo hàm: $y' = f'(x) = -3x^2 - 6x$

cực trị: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = -2$

$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 4$

$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 0$

+) điểm uốn: $f''(x) = -6x - 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$

Suy ra điểm uốn là $U(-1;2)$

+) giới hạn ở ∞ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3) = +\infty$.

+) bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	0	-
f''(x)		+	0	-	
f(x)	$+\infty$	0	2	4	$-\infty$

+) nhận xét :

Hàm số đồng biến trên (-2 ;0)

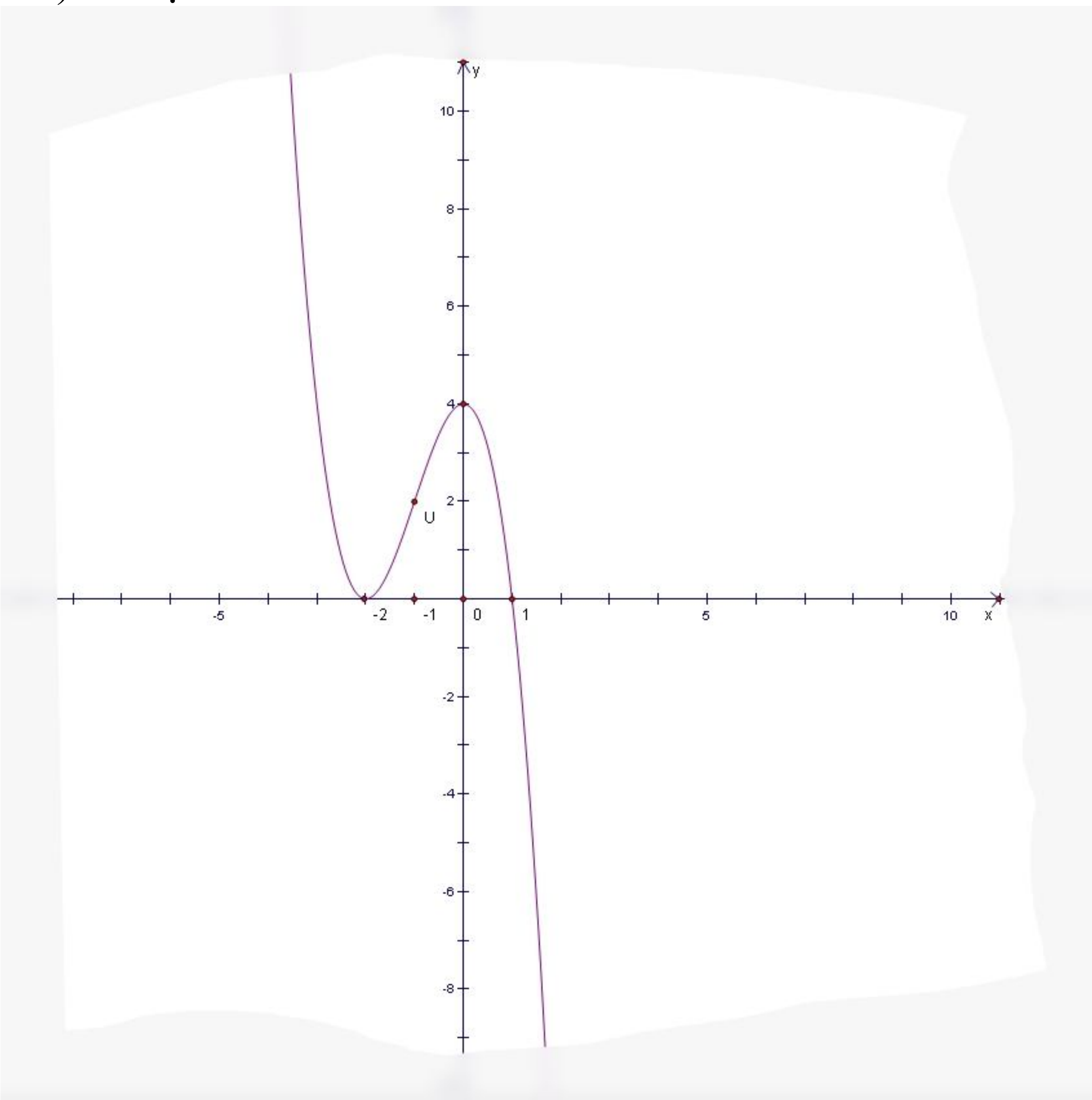
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)$

Hàm số lồi trên (-1 ;+∞)

Hàm số lõm trên (-∞ ;-1)

Hàm số có điểm uốn U(-1 ;2).

+) đồ thị :



đồ thị giao với Ox tại 2 điểm (1 ;0) và (-2 ;0)
đồ thị giao với Oy tại điểm (0 ;4)

1.2 :

gọi 2 điểm cực trị của hàm số là $M(0,4)$ và $N(-2;0)$
thì vecto pháp tuyến của MN là : $\vec{n}_{MN} = (-2;-4)$
suy ra phương trình của MN : $2x - y + 4 = 0.$
đường tròn (C) có tâm $I(m;m+1)$; bán kính $R = \sqrt{5}$.
MN là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ $d_{(I;MN)} = R = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m - m - 1 + 4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |m+3|=5$$

$$\Leftrightarrow m=2 \vee m=-8$$

vậy với m=2 hoặc m=-8 thoả mãn đề bài.

Câu II.1:

Phương trình đã cho tương đương với:

$2cos^2(\frac{\pi}{2}.cos^2x)-1=cos(\pi.sin2x)$

$\Leftrightarrow cos(\pi.cos^2x)=\cos(\pi.sin2x)$

$\Leftrightarrow \pi.cos^2x=\pi.sin2x+k2.\pi(k\in Z)(1)$

hoặc: $\pi.cos^2x=-\pi.sin2x+k'2.\pi(k'\in Z)(2)$

xét trường hợp (1):

$\pi.cos^2x=\pi.sin2x+k2.\pi(k\in Z)$

$\Leftrightarrow cos^2x=sin2x+2k$

Vì $\cos^2x, sin2x\in[-1;1]$ nên k=0 hoặc k=1

Khi k=0 thì PT trở thành:

$cos^2x=sin2x$

$\Leftrightarrow cosx=0 \vee cosx=2sinx$

$+)\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+m.\pi(m\in Z)$

$+)\cos x=2\sin x \Rightarrow tanx=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=arctan(\frac{1}{2})+n.\pi(n\in Z)$

Khi k=1 thì PT trở thành:

$cos^2x=sin2x+2$

Vì $\cos^2x, sin2x\in[-1;1]$ nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} sin2x=-1 \\ cos^2x=1 \end{cases}$$

hệ này vô nghiệm

xét trường hợp (2)

$(2)\Leftrightarrow cos^2x=-sin2x+2k'$

Vì $\cos^2x, sin2x\in[-1;1]$ nên k'=0 hoặc k'=1

khi k'=0 thì phương trình trở thành :

$cos^2x=-sin2x$

$\Leftrightarrow cosx=0 \vee cosx=-2sinx$

$+)\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+m.\pi(m\in Z)$

+) $\cos x = -2\sin x \Leftrightarrow tanx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan(-\frac{1}{2}) + l.\pi (l \in Z)$

Khi k'=1 thì PT trở thành :

$cos^2 x = 2 - sin2x$

Vì $cos^2 x, sin2x \in [-1;1]$ nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} sin2x = 1 \\ cos^2 x = 1 \end{cases}$$

đây là điều vô lí nên hệ vô nghiệm

vậy PT có 3 họ nghiệm là :

$x = \frac{\pi}{2} + m.\pi ; x = arctan(\frac{1}{2}) + n.\pi ; x = arctan(-\frac{1}{2}) + l.\pi (l, m, n \in Z)$

Câu II.2 :

điều kiện : $x \in [-2;2]$

thực hiện phép nhân liên hợp với 2 biểu thức ở vế trái ta được :

$$\frac{2x+4-8+4x}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} = \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$\Leftrightarrow (6x-4)(\frac{1}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} - \frac{2}{\sqrt{9x^2+16}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee \frac{1}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} = \frac{2}{\sqrt{9x^2+16}}$$

dễ thấy $x = \frac{2}{3}$ thoả mãn đề bài, xét trường hợp còn lại :

$$\frac{1}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} = \frac{2}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}$$

thực hiện bình phương 2 vế ta được :

$$9x^2 + 16 = 8x + 16 + 32 - 16x + 16\sqrt{8-2x^2}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 8x - 32 = 16\sqrt{8-2x^2}$$

tiếp tục bình phương lần nữa ta có phương trình sau :

$$81x^4 + 64x^2 + 1024 + 144x^3 - 576x^2 - 512x = -512x^2 + 2048$$

$$\Leftrightarrow 81x^4 + 144x^3 - 512x - 1024 = 0$$

Xét thấy x=0 không phải là nghiệm, chia cả 2 vế cho x^2 ta được :

$$81x^2 + 144x - \frac{512}{x} - \frac{1024}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x - \frac{32}{x})(9x + \frac{32}{x} + 16) = 0$$

+) $9x-\frac{32}{x}=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{32}{9}}$ (thoả mãn)

+) $9x+\frac{32}{x}+16=0$

$\Leftrightarrow 9x^2+16x+32=0$

PT này vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x=\frac{2}{3};x=\pm\sqrt{\frac{32}{9}}$

Câu III :

trước hết ta chứng minh công thức sau :

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx\,(*)$

đặt $x=a+b-u \Rightarrow dx=-du$

khi đó :

$\int_a^b f(x)dx=-\int_a^b f(a+b-u)du=\int_a^b f(a+b-x)dx$

vậy ta có điều cần chứng minh

trở lại với bài toán III :

áp dụng công thức (*) ta có :

$$I=\int_0^\pi \frac{xsinx}{1+cos^2x}dx=\int_0^\pi \frac{(\pi-x)sin(\pi-x)}{1+cos^2(\pi-x)}=\pi.\int_0^\pi \frac{sinxdx}{1+cos^2x}-\int_0^\pi \frac{xsinxdx}{1+cos^2x}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}.\int_0^\pi \frac{sinxdx}{1+cos^2x}$$

Xét $J=\int_0^\pi \frac{sinxdx}{1+cos^2x}=-\int_0^\pi \frac{d(cosx)}{1+cos^2x}=-\int_1^{-1}\frac{dt}{1+t^2}=\int_{-1}^1\frac{dt}{1+t^2}=\arctan(1)-\arctan(-1)=\frac{\pi}{2}$

Khi đó : $I=\frac{\pi}{2}.J=\frac{\pi^2}{4}$

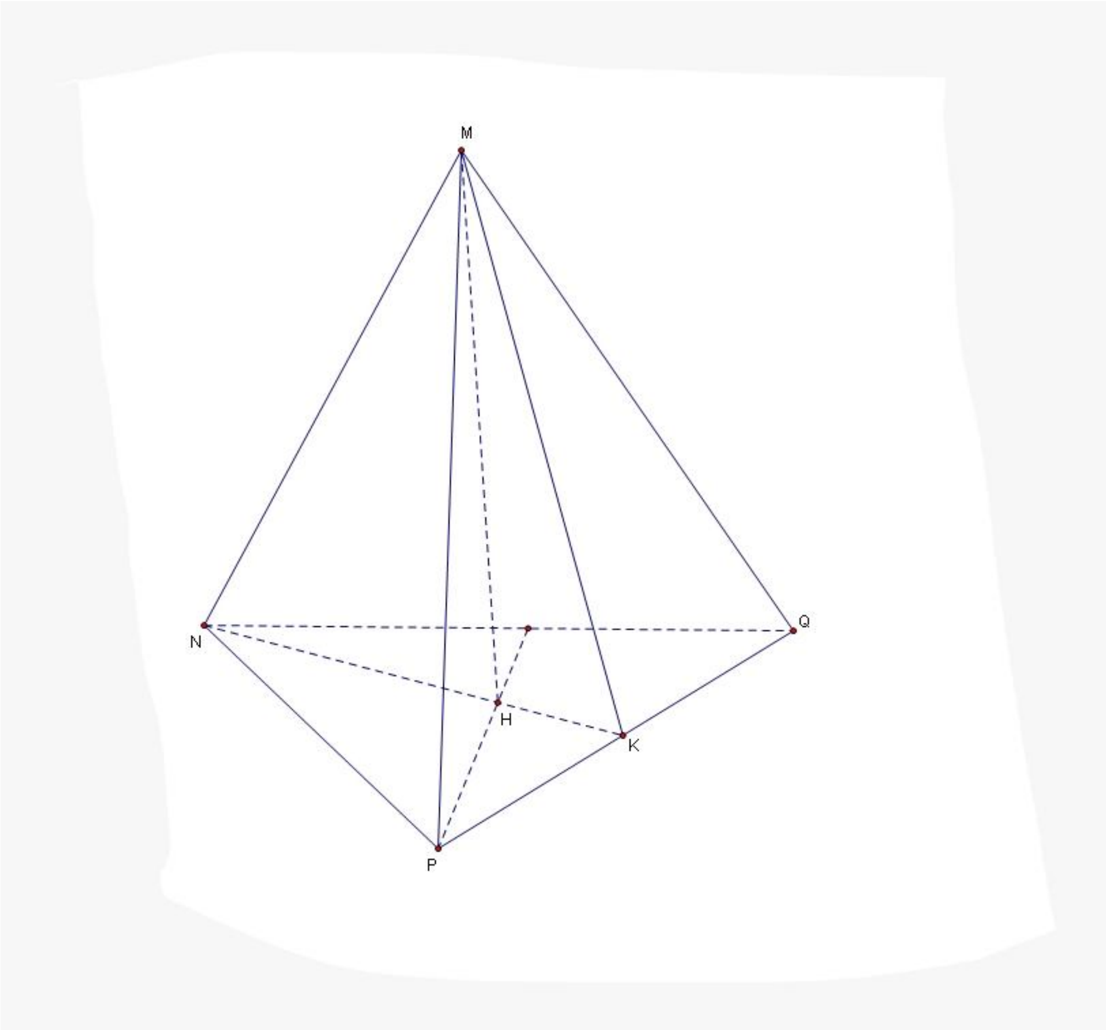
vậy $I=\int_0^\pi \frac{xsinx}{1+cos^2x}dx=\frac{\pi^2}{4}$.

Câu IV:

trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

cho tứ diện MNPQ với MN,MP,MQ đôi , một vuông góc, gọi MH là đường cao kẻ từ M của tứ diện,(H thuộc (NPQ)). chứng minh rằng:

$$\frac{1}{MH^2}=\frac{1}{MN^2}+\frac{1}{MP^2}+\frac{1}{MQ^2}$$



chứng minh bổ đề:

ta có : $\begin{matrix} MN \perp MQ \\ MN \perp MP \end{matrix}$

$\Rightarrow MN \perp$ (MPQ)

$\Rightarrow MN \perp PQ$

Mà NH là hình chiếu của MN trên (NPQ)

Nên $NH \perp PQ$

gọi K là giao điểm của NH và PQ

ta có : $PQ \perp (MNK) \Rightarrow PQ \perp \mathrm{MK}$

mặt khác, $\mathrm{MN} \perp \mathrm{(MPQ)} \Rightarrow MN \perp \mathrm{MK}$

xét $\triangle\mathrm{MNK}$ vuông tại M có $\mathrm{MH} \perp \mathrm{NK}$ nên :

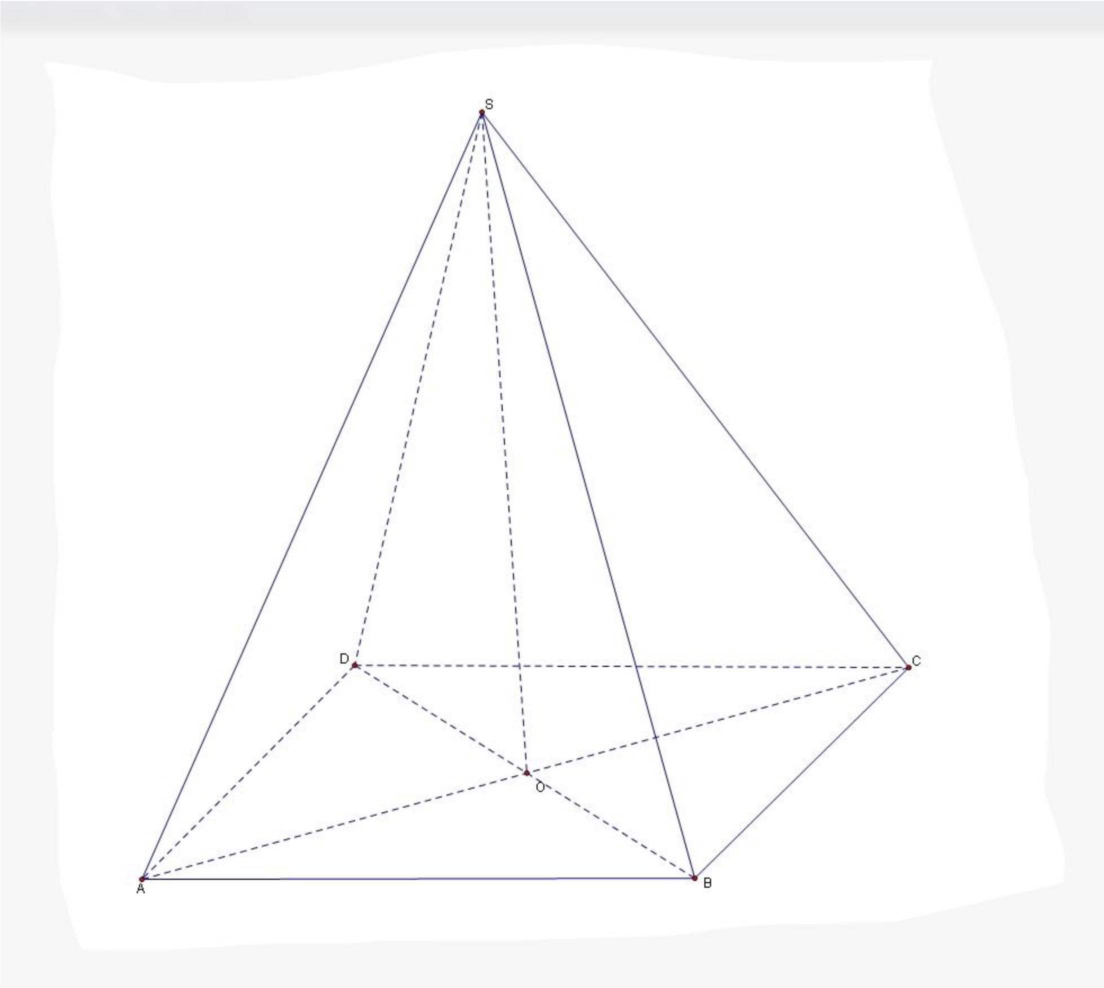
$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MK^2} + \frac{1}{MN^2}$$

Xét $\triangle MPQ$ vuông tại M có $MK \perp PQ$ nên :

$$\frac{1}{MK^2} = \frac{1}{MQ^2} + \frac{1}{MP^2}$$

từ 2 điều trên ta suy ra $\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} + \frac{1}{MQ^2}$

vậy bổ đề được chứng minh
trở lại bài toán IV:



Vì $(SAC) \perp (SBD)$ nên ta có:

$AC \perp BD$, $SO \perp AC, SO \perp BD$

Các tứ diện O.SAB; O.SBC; O.SCD; O.SDA đều thoả mãn bổ đề đã chứng minh ở trên nên ta có:

$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OS^2}$;

$\frac{1}{q^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OS^2}$;

$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OS^2}$;

$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OS^2}$.

$\Rightarrow \frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2}$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu V :

đặt : $\frac{x}{y}=a,\frac{y}{z}=b,\frac{z}{x}=c(a,b,c\in[\frac{1}{3};3])$

$\Rightarrow abc=1$

khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành :

$$a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{26}{3}$$

Xét hàm số : $f(a)=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Có $f'(a)=1-\frac{1}{a^2}$

$f'(a)=0\Leftrightarrow a=1$

Vì $f'(a)$ đổi dấu từ dương sang âm tại a=1 nên f(a) đạt cực đại tại a=1

Hay : $f(a)\le f(1)=2+b+c+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Mà với $a=1\Rightarrow b=\frac{1}{c}\Rightarrow f(a)\le 2+2c+\frac{2}{c}$

Ta sẽ chứng minh $2+2c+\frac{2}{c}\le\frac{26}{3}$ với $c\in[\frac{1}{3};3]$

thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với :

$$3c^2-10c+3\le 0$$

$$\Leftrightarrow (c-3)(c-\frac{1}{3})\le 0$$

Đây là điều hiển nhiên đúng vì $c\in[\frac{1}{3};3]$

vậy bất đẳng thức được chứng minh, dấu « = » xảy ra khi $a=1,b=\frac{1}{3},c=3$ hoặc các hoán vị hay khi $x=y=1;z=3$ và các hoán vị tương ứng.

Câu VI.a.1:

Vì B thuộc Ox và B thuộc BC nên toạ độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=0 \\ \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow B(1;0)$

Gọi $A(k;0)$

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên phương trình AC là : $x=k$

Suy ra toạ độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=k \\ \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=k \\ y=\sqrt{3}k-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow C(k;\sqrt{3}k-\sqrt{3})$$

Khi đó, $AB = |k-1|$

$AC = \sqrt{3}|k-1|$

$BC = 2|k-1|$

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác $S = pr$ với p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ta có:

$$S_{ABC} = pr = \frac{AB+BC+CA}{2}.r = \frac{(3+\sqrt{3}).|k-1|}{2}.2 = (3+\sqrt{3}).|k-1|$$

Mà tam giác ABC vuông tại A nên:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC = \frac{\sqrt{3}}{2}.(k-1)^2$$

$$\Rightarrow (3+\sqrt{3}).|k-1| = \frac{\sqrt{3}}{2}.(k-1)^2 \; (*)$$

Xét khi k=1 thì A trùng với B nên điều này không thể xảy ra

Xét khi $k \neq 1$:

Phương trình (*) tương đương với:

$|k-1| = 2\sqrt{3}+2$

$\Rightarrow k = 2\sqrt{3}+3 \vee k = -2\sqrt{3}-1$

+) khi $k = 2\sqrt{3}+3$ thì:

$A(2\sqrt{3}+3;0)$

$B(1;0)$

$C(2\sqrt{3}+3;6+2\sqrt{3})$

từ đây suy ra $G(\frac{4\sqrt{3}+7}{3};\frac{6+2\sqrt{3}}{3})$.

+) khi $k = -2\sqrt{3}-1$ thì:

$A(-2\sqrt{3}-1;0)$

$B(1;0)$

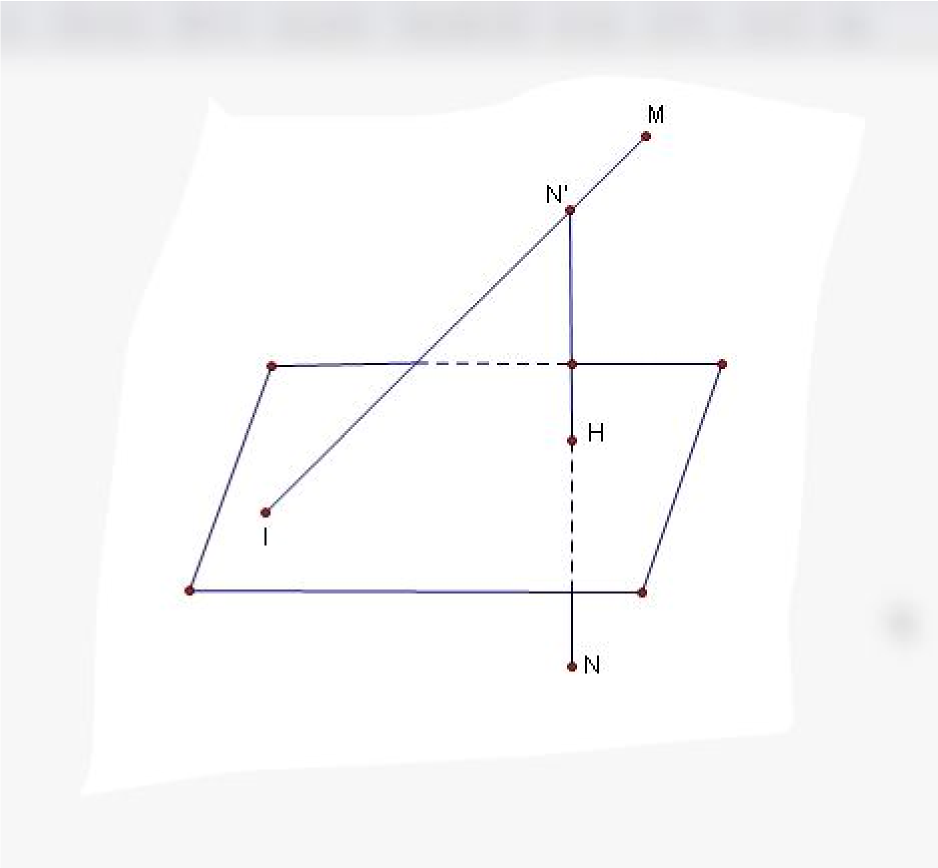
$C(-2\sqrt{3}-1;-6-2\sqrt{3})$

Suy ra $G(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3};\frac{-6-2\sqrt{3}}{3})$

vậy xác định được 2 điểm G ứng với 2 tam giác là $G(\frac{4\sqrt{3}+7}{3};\frac{6+2\sqrt{3}}{3})$ và $G(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3};\frac{-6-2\sqrt{3}}{3})$.

Bài VI.a.2:

Ta thấy M và N nằm khác phía đối với (α)



Khi đó, gọi N’ là điểm đối xứng với N qua (α) thì $|IM - IN| = |IM - IN'| \le MN'$ (không đổi) dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi N’ nằm giữa I và M, hay I là giao điểm của MN’ với (α).

Ta sẽ đi tìm điểm N’ và điểm I :

gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên (α) và (d) là đường thẳng đi qua N và H khi đó, $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_\alpha} = (2;-1;1)$.

đường thẳng (d) đi qua N(-9 ;4 ;9) và có $\overrightarrow{u_d} = (2;-1;1)$ nên (d) có phương trình là :

$$(d):\begin{cases} x = 2t - 9 \\ y = 4 - t \\ z = 9 + t \end{cases}$$

Vì H là giao điểm của (d) và (α) nên toạ độ H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 2t = -9 \\ y + t = 4 \\ z - t = 9 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \\ z = 11 \\ t = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow H(-5;2;11)$.

Mà H là trung điểm của NN’ nên :

$$\begin{cases} x_{N'} = 2x_H - x_N = -1 \\ y_{N'} = 2y_H - y_N = 0 \\ z_{N'} = 2z_H - z_N = 13 \end{cases}$$

$\Rightarrow N'(-1;0;13)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{u_{MN'}} = \overrightarrow{MN'} = (-4;-1;13)$

đường thẳng MN' đi qua M(3 ;1 ;0) và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_{MN'}} = (-4;-1;13)$ nên

có phương trình là : $MN': \begin{cases} x = 3-4t \\ y = 1-t \\ z = 13t \end{cases}$

vì I là giao của MN' và (α) nên toạ độ I là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x = 3-4t \\ y = 1-t \\ z = 13t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 7 \\ y = 2 \\ z = -13 \end{cases}$$

$\Rightarrow I(7;2;-13)$

vậy với I(7 ;2 ;-13) thì |IM-IN| đạt giá trị lớn nhất.

Bài VIIA:

gọi các điểm thoả mãn là M(z)

Trên trục ảo xét 2 điểm $F_1(i); F_2(-i)$.

Khi đó thì $F_1F_2 = 2$ và $MF_1 = |z-i|; MF_2 = |z+i|$

Mà theo bài ra ta có : $|z-i| + |z+i| = 4$

$\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4$.

điểm M có tổng khoảng cách tới 2 điểm F_1, F_2 cố định là một số không đổi nên M thuộc elip có 2 tiêu điểm là F_1, F_2.

gọi phương trình elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

khi đó ta có $MF_1 + MF_2 = 2a$

mà $MF_1 + MF_2 = 4 \Rightarrow a = 2$.

mặt khác, nếu 2c là tiêu cự của elip thì $F_1F_2 = 2c \Rightarrow c = 1$

mà $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$

Suy ra phương trình của elip là : $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

vậy tập hợp các điểm thoả mãn là elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.